

PARTEA A CINCEA

MECANICA ANALITICĂ

PARTEA A ŞASEA

NOŢIUNI DE DINAMICA MAŞINILOR ŞI EXPERIENŢE MECANICE

INTRODUCERE

A. DEFINIȚIA ȘI DIVIZIUNILE MECANICII

Mecanica este una dintre cele mai vechi științe și evoluția ei, ca și evoluția altor științe, este indisolubil legată de dezvoltarea forțelor de producție. Mecanica s-a format ca știință de-a lungul timpului, pe baza generalizării experienței dobîndite de oameni în procesul activității conștiente efectuate pentru satisfacerea nevoilor de a capta și a utiliza forțele naturii, de a clădi, de a ușura muncile grele, de a construi mașini etc.

Dezvoltarea teoriei s-a produs în strînsă legătură cu nevoile practicii social-istorice, în procesul dialectic de cunoaștere a realității obiective, de la observarea realității obiective la gîndirea abstractă și de la aceasta la verificarea prin practică. Conținutul mecanicii, în fiecare stadiu de dezvoltare istorică, s-a îmbogățit cu noi cunoștințe teoretice, care s-au adăugat la cele vechi sau au aprofundat cunoștințele existente.

De-a lungul a peste 2500 de ani, mecanica s-a dezvoltat și perfecționat necontenit, dezvoltarea Mecanicii împletindu-se strîns cu dezvoltarea civilizației omenești.

În cele ce urmează, ne vom ocupa de *Mecanica teoretică*, numită adeseori *Mecanica rațională*, iar uneori *Mecanica generală*. Mecanica teoretică fiind legată inseparabil de practică, de tehnică, vom arăta și unele din cele mai importante aplicații corespunzătoare teoriei expuse.

Mecanica teoretică este una dintre științele naturii; ea studiază legile obiective ale mișcării mecanice a corpurilor materiale.

Mecanica teoretică este o diviziune a Fizicii.

Scopul Mecanicii teoretice este de a stabili legile obiective ale fenomenelor de mișcare mecanică a corpurilor materiale în vederea aplicării lor în producție, în interesul omului, cu maximum de randament.

Este necesar să explicăm de la început ce se înțelege prin mișcare mecanică și corp material.

§ 1. Mișcare mecanică, sisteme de referință. Mișcarea mecanică a unui corp material este schimbarea în timp a poziției corpului sau a unei părți a acestuia în raport cu un alt corp solid ales ca sistem de referință.

Aceasta, spre deosebire de mișcarea înțeleasă în sens larg, adică în sensul oricărei schimbări în starea corpurilor materiale, a organismelor vii, a societății etc., mișcare care este universală și constituie obiectul de studiu al diferitelor științe, cum sînt chimia, biologia, științele sociale etc.

Materia este într-o continuă mișcare, fără început și fără sfîrșit. Corpurile materiale pe care le studiem, ca părți componente ale materiei uni-

versale, sînt şi ele într-o continuă mişcare şi, deci, ceea ce va studia Mecanica — ca mişcare mecanică a lor — va fi modificarea unei stări de mişcare existente, în raport cu un sistem de referinţă dat. În cele ce urmează, mişcarea mecanică va fi numită prescurtat, *mişcare*.

Sistemul de referinţă este ales arbitrar, dar de fiecare dată va trebui să fie determinat pe deplin faţă de anumite repere (alte corpuri materiale), pentru a exista posibilitatea ca, în raport cu el, în decursul unui anumit interval de timp, să se poată stabili în mod precis poziţia corpului în mişcare.

Alegerea sistemului de referinţă (a reperului) este foarte importantă deoarece, la rîndul său, sistemul de referinţă poate fi în mişcare în raport cu alte sisteme de referinţă.

Sistemele de referinţă se numesc *fixe*, atunci cînd nu au mişcări faţă de un sistem considerat în mod convenţional ca imobil şi se numesc *mobile*, atunci cînd se mişcă în raport cu sistemul convenţional.

Din cele de mai înainte rezultă şi definiţia stării de repaus.

Repausul unui punct material este starea lui de imobilitate în raport cu un sistem de referinţă dat; iar repausul unui sistem de puncte materiale se va produce atunci cînd toate punctele lui vor fi în repaus.

Se vede, deci, că mişcarea şi repausul sînt stabilite în raport cu anumite sisteme alese arbitrar şi, în consecinţă, conţin în ele un element relativ de care va trebui să ţinem seama în studiile pe care le facem. Repaus absolut nu există.

În legătură cu mişcarea corpurilor s-a pus problema *cauzelor* care produc mişcarea considerată, mai exact problema cauzelor care produc modificarea stării de mişcare existente a corpurilor. Această problemă a dat naştere la multe discuţii şi asupra ei vom mai reveni în cele ce urmează.

Trebuie să amintim, totuşi, că multă vreme s-au considerat drept cauze ale mişcării numai forţele. Mai tîrziu, s-a constatat că pot exista mişcări şi fără intervenţia forţelor, de exemplu mişcările rectilinii şi uniforme (mişcări inerţiale).

Sistemele filozofice idealiste consideră forţa ca avînd origine mistică, ca neavînd legătură cu materia. De fapt, forţa are totdeauna o sursă materială; ea apare cu ocazia acţiunii unui corp asupra altui corp. Un corp nu-şi poate schimba starea de mişcare pe care o are la un moment dat, dacă asupra lui nu acţionează un alt corp material.

Corpul asupra căruia acţionează forţa îşi va schimba starea de mişcare mecanică datorită mişcării mecanice a celuilalt corp. Engels spune despre aceasta: „Forţa este, prin urmare, numai expresia abstractă pentru măsura transmiterii mişcării". Numai corpul avînd o mişcare rectilinie şi uniformă nu este acţionat de nici o forţă sau forţele care îl acţionează îşi fac echilibru, ceea ce revine la o situaţie similară aceleia în care nu ar fi acţionat de nici o forţă.

S-a ajuns astfel la noţiunea de *sistem de referinţă inerţial*. Acesta este sistemul de referinţă faţă de care o particulă materială neinfluenţată de alte corpuri materiale, în Mecanica clasică, are o mişcare rectilinie şi uniformă. Orice alte sisteme de referinţă, care se mişcă rectiliniu şi uniform faţă de un sistem de referinţă inerţial dat, sînt tot sisteme de referinţă inerţiale.

§ 2. Particulă materială, [punct material, corp material. *Particula materială* este o părticică a corpului, atît de mică încît dimensiunile ei se neglijează uneori, iar particula poate fi asimilată cu un punct. Mişcarea ei este pe deplin determinată de mişcarea acestui punct, fapt care face ca, în acest caz, particula materială să fie numită, în mod abstract, *punct material*.

Menţionăm că este posibil ca şi pentru corpuri mari, cu dimensiuni apreciabile, să se reducă studiul la examinarea mişcării unui *punct material*, atunci cînd nu interesează forma corpului şi dimensiunile lui; masa corpului, în acest caz, se consideră concentrată în punctul material (punctul geometric) studiat.

Punctul material este deci un punct geometric, dotat cu o masă proprie, determinată. Noţiunea de punct material este un concept matematic, care uşurează mult calculele.

Un sistem de puncte materiale este constituit din totalitatea punctelor materiale luate în considerare, mişcarea fiecărui punct depinzînd de poziţia şi mişcarea celorlalte.

Corpul material, despre care va fi vorba în Mecanică, va fi considerat ca fiind format dintr-o infinitate de puncte materiale legate între ele, astfel încît distanţele dintre puncte să rămînă invariabile. Conceput în acest fel, corpul material — numit şi *corp solid* sau *corp rigid* — nu este decît un sistem de puncte materiale legate invariabil, rigid, între ele, o formă abstractă a corpului solid real.

În timp ce la corpul solid real schimbările formei şi volumului nu pot fi neglijate, la corpul rigid din Mecanică acestea nu se iau în consideraţie.

Mecanica teoretică se foloseşte de această abstractizare cu scopul de a simplifica studiul într-o primă fază. În faza următoare, aceea a Mecanicii aplicate, vor trebui luate în considerare deformaţiile corpului.

Forma corpurilor: după forma lor, facem în Mecanică următoarea clasificare a corpurilor:

Corpurile care au una dintre cele trei dimensiuni foarte mare în raport cu celelalte două, se numesc *bare* (fig. 1, *a*).

Cînd două dimensiuni sînt foarte mici în raport cu a treia, iar corpul este flexibil sub acţiunea forţelor exterioare şi poate lua orice formă, fără a opune o rezistenţă sensibilă la încovoiere, avem cazul *firelor* (fig. 1, *b*).

O bară este definită prin axa ei şi prin legea de variaţie a secţiunii transversale în lungul axei barei. Bara este generată prin deplasarea secţiunii transversale, astfel încît aceasta să rămînă normală pe axă iar centrul ei de greutate să fie pe axă. Barele drepte au ca axe linii drepte; barele curbe au ca axe curbe plane (fig. 2) sau curbe în spaţiu, după forma respectivă a barei.

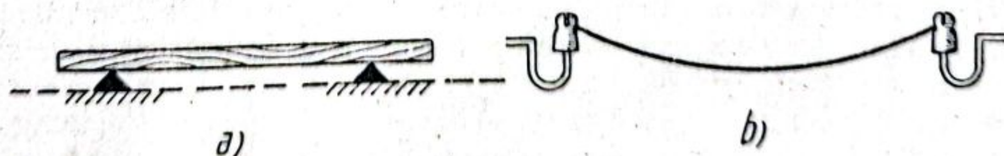


Fig. 1

În cazul cînd două dintre dimensiunile corpului sînt apreciabile în raport cu cea de a treia (foarte redusă), avem o *placă* (fig. 3); cînd placa este flexibilă (sub acţiunea forţelor exterioare placa poate lua orice formă, fără a opune o rezistenţă sensibilă la încovoiere) avem o *membrană*.

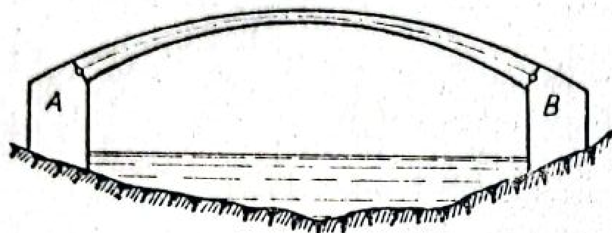


Fig. 2.

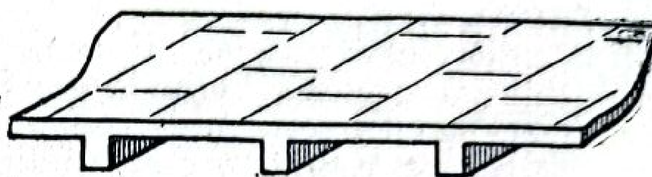


Fig. 3.

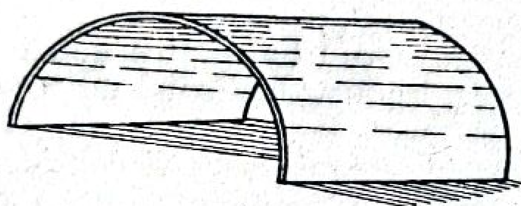


Fig. 4.

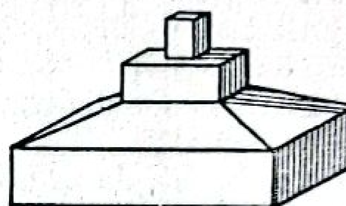


Fig. 5.

După aceleaşi criterii ca la bare, prin extinderea noţiunii de axă, avem la plăci suprafaţa mediană.

Cînd suprafaţa mediană se poate suprapune unui plan, avem o *placă plană* sau o *dală*; cînd se suprapune pe o suprafaţă curbă, avem o *placă curbă* (fig. 4).

În fine, cînd toate trei dimensiunile corpului sînt de mărimi apreciabile, comparabile între ele, se obţine un bloc (fig. 5).

În sistemele pe care le studiem, va trebui să distingem forma corpurilor cu care lucrăm, deoarece forma corpurilor influenţează asupra metodelor de calcul pe care le aplicăm.

§ 3. Diviziunile Mecanicii. Problema generală a Mecanicii constă în stabilirea unor relaţii între forţele care acţionează asupra unui sistem de corpuri materiale şi mişcarea mecanică realizată de aceste corpuri. Metodologic, convenţional, ţinînd seama de cele două elemente de bază care intervin în studiile şi aplicaţiile corespunzătoare, forţele şi mişcarea mecanică şi ţinînd seamă şi de dezvoltarea istorică a acestei ştiinţe, Mecanica teoretică se consideră ca avînd trei mari diviziuni: Statica, Cinematica şi Dinamica.

Statica studiază transformarea sistemelor de forţe exterioare aplicate corpurilor în sisteme echivalente şi condiţiile de echilibru ale sistemelor de forţe.

Statica studiază un caz particular al mişcării: cazul cînd corpul, sub acţiunea forţelor exterioare care-l acţionează, rămîne în repaus în raport cu un sistem de referinţă determinat, sau are o mişcare rectilinie şi uniformă.

Această parte a Mecanicii era cunoscută încă din antichitate, prezentînd un interes deosebit pentru tehnica construcţiilor. De aceea găsim

studii temeinice în ceea ce priveşte Statica, făcute încă înaintea erei noastre, de Arhitas, Aristotel, Arhimede, Vitruvius şi alţii.

Cinematica studiază mişcarea punctului sau a sistemelor de puncte, în timp, din punct de vedere geometric, independent de forţele care acţionează asupra punctului sau sistemului. De aceea a şi fost numită uneori *Geometria Mecanicii* (*Phoronomia*). Deşi într-o foarte mică măsură s-au ocupat şi anticii cu studii geometrice privitoare la mişcare, totuşi Cinematica a fost creată în timpurile moderne. De abia de la Leonardo da Vinci, Galilei, Newton şi Lagrange se poate vorbi de studii specifice Cinematicii.

Dinamica studiază mişcarea corpurilor materiale ţinînd seama de forţele care acţionează asupra acestora. Această parte a Mecanicii stabileşte cele mai generale legi ale mişcării corpurilor materiale şi este de o deosebită importanţă pentru tehnica maşinilor, construcţiilor etc.

Dinamica s-a dezvoltat, îndeosebi, începînd de la Galilei, Newton şi Lagrange; ea capătă o dezvoltare din ce în ce mai amplă în prezent, cînd calculul maşinilor complexe şi al marilor construcţii nici n-ar mai fi de conceput fără a ţine seamă de solicitările dinamice.

De fapt, Mecanica este un tot şi este destul de dificil să se facă împărţirea arătată mai înainte. Mereu trebuie să se treacă de la o diviziune la alta. Numai convenţional şi pentru a se da posibilitatea unei însuşiri treptate a materialului, se procedează la această împărţire. S-a mai ţinut seamă, în această împărţire, şi de dezvoltarea istorică a acestei ştiinţe.

În dezvoltarea prezentei lucrări se vor face aceste împărţiri numai în măsura în care va fi nevoie pentru înţelegerea treptată a fenomenelor.

În concluzie, Mecanica teoretică studiază legile obiective cele mai generale ale mişcării mecanice a corpurilor rigide, considerate ca simple puncte materiale sau ca sisteme de puncte materiale legate invariabil între ele.

Sistemele la care distanţele dintre punctele materiale se schimbă sub acţiunea diferitelor solicitări, sînt studiate în *Mecanica aplicată* sau *Mecanica corpurilor deformabile*: Rezistenţa materialelor, Elasticitatea, Mecanica fluidelor etc. Mecanica teoretică stă la baza calculului construcţiilor, maşinilor etc. şi are o importanţă deosebită pentru producţie.

Vom face observaţia, asupra căreia vom reveni mai tîrziu, că Mecanica, definită ca mai înainte, priveşte mişcarea corpurilor rigide „macroscopice" a căror mişcare se produce cu viteze obişnuite pentru om şi mult inferioare vitezei luminii.

Este ceea ce numim Mecanica clasică, spre deosebire de alte Mecanici mai noi, în care, de exemplu, vitezele corpurilor sînt foarte mari, apropiindu-se de cea a luminii (Mecanica relativistă), sau în care se studiază corpuri „microscopice"[1] (Mecanica cuantică, Mecanica statistică).

Instrumentul de calcul în Mecanică îl constituie matematicile cele mai avansate, în deosebi Analiza matematică, calculul vectorial şi cal-

[1] Denumirea de „microscopice", utilizată adesea, este improprie deoarece în Mecanica cuantică se studiază particule mult mai mici decît cele care se văd la microscop (electroni etc.).

culul tensorial; adeseori s-a spus chiar că Mecanica a fost matematizată în chip exagerat. Păstrînd o legătură strînsă cu numeroasele aplicații în care intervine Mecanica, acest pericol poate fi evitat.

B. NOȚIUNI ȘI PRINCIPII FUNDAMENTALE ALE MECANICII

Mecanica, ca și celelalte științe, își bazează teoria pe cîteva noțiuni și principii fundamentale — noțiuni și principii stabilite pe baza unei îndelungate experiențe — care pot fi verificate în lucrările ce se execută pe baza proprietăților lor, dar care nu pot fi reduse — cel puțin în Mecanica clasică, cu cunoștințele pe care le avem pînă în prezent — la alte noțiuni sau principii mai simple.

Studiind mișcarea mecanică a corpurilor materiale, noțiunile fundamentale care intervin în Mecanica clasică sînt: *spațiul, timpul și masa*; iar principiile fundamentale sînt: *principiul inerției, principiul independenței acțiunii forțelor și principiul egalității acțiunii cu reacțiunea.*

Mecanica clasică a fost creată de-a lungul a peste 2 000 ani și este folosită, în tehnica curentă, la calculul construcțiilor și mașinilor obișnuite, în care intervin viteze cu mult inferioare vitezei luminii. În Mecanica clasică se atribuie spațiului și masei proprietăți care, de cele mai multe ori, pot fi verificate de simțurile omului sau cu aparate nu prea complicate. În Mecanica clasică se aplică geometria lui Euclid și Analiza matematică curentă, teoria Mecanicii clasice constituind o primă aproximație pentru a face cercetări și calcule cu privire la fenomenele curente, la scara omului. Mecanica clasică se mai numește și Mecanica newtoniană (fiind bazată pe principiile enunțate de Isaac Newton în 1686).

Începuturi în teoria Mecanicii clasice au fost făcute încă din antichitate, de Arhitas, Aristotel, Arhimede, Vitruvius etc.; dar prima ei fundamentare științifică au făcut-o Galilei și Newton, în secolul al XVII-lea. După aceea au urmat numeroase precizări și perfecționări, care continuă și în prezent.

În ultimul secol au apărut și alte mecanici, care țin seama de viteze foarte mari, de alcătuirea materiei pînă la microparticule și de alte proprietăți ale materiei, descoperite în ultimul timp. Mecanica relativistă, cuantică, ondulatorie, statistică etc. sînt astfel de mecanici, dar care nu constituie obiecte de studiu în cadrul acestei lucrări.

§ 1. Noțiunile fundamentale ale Mecanicii. Noțiunile fundamentale de care ne ocupăm în Mecanica clasică sînt: *spațiul*, *timpul* și *masa*.

De spațiu, timp și masă ne dăm seama, pe baza practicii, că există în mod obiectiv, în realitatea înconjurătoare: trăim în spațiu și în timp, în jurul nostru sînt diferite obiecte la care ajungem mișcîndu-ne, obiectele au o masă de care ne dăm seama cînd vrem să le mișcăm etc.

Cu timpul, prin generalizarea unui număr mare de experiențe făcute asupra realității din jurul său, omul a reușit să formuleze aceste noțiuni, ca o reflectare generalizată în mintea sa a unor fenomene aparținînd realității pe care o trăia. Bineînțeles, în măsura în care nivelul cunoașterii științifice i-a permis aceasta în diferite epoci istorice.

Spațiul, timpul, masa și mișcarea constituie unitatea dialectică a materiei. Ele reprezintă diferitele forme de existență ale realității obiective din jurul nostru, care este materia.

Aceasta, spre deosebire de concepția lui Newton, care considera spațiul, timpul și masa ca fiind complet independente și fără nici o legătură între ele. Această mentalitate a durat multă vreme și mai există și astăzi în concepția idealistă care nu vede legătura spațiu-timp-masă-mișcare și care rupe aceste noțiuni de realitate. Mecanica clasică admite și ea lipsa de legătură dintre spațiu, timp și masă.

Materialismul dialectic a arătat în mod clar falsitatea acestor afirmații și a dovedit interdependența dintre spațiu, timp, masă și mișcare. Totodată a dovedit realitatea obiectivă a materiei și faptul că materia este într-o continuă mișcare, fără început și fără sfîrșit.

În cele ce urmează vom examina pe scurt aceste noțiuni și vom arăta anumite pr prietăți care li se atribuie în „Mecanica clasică."

Spațiul este una dintre formele obiective de existență a materiei. De spațiu ne dăm seama direct, prin simțurile noastre. „Formele de bază ale oricărei existențe — spune Engels — sînt spațiul și timpul, și o existență în afara timpului este o absurditate tot atît de mare ca și o existență în afara spațiului" (Fr. Engels, „Anti-Dühring", București, Ed. P.M.R., 1952, ed. a II-a, p. 61).

Noțiunea de spațiu oglindește spațiul real existent în mod obiectiv. Spațiul Mecanicii clasice se consideră ca avînd următoarele proprietăți:

— este infinit, adică nu are nici o limită; iar pentru a preciza poziția ocupată de un corp trebuie să ne raportăm la un alt corp, care constituie corpul-reper;

— este tridimensional;

— este continuu, adică nu se poate trece de la un punct al spațiului la altul, fără a trece printr-o infinitate de puncte intermediare foarte apropiate;

— este omogen, adică diferitele porțiuni ale lui nu se deosebesc unele de altele;

— este izotrop, adică proprietățile după diferitele direcții care pleacă dintr-un același punct nu se deosebesc între ele;

— permite mărirea sau reducerea figurilor, dacă se păstrează unghiurile neschimbate și se menține un raport de proporționalitate între dimensiuni; se obțin în acest mod figuri asemenea.

Spațiul astfel definit constituie spațiul geometriei euclidiene, permițînd aplicarea metodelor geometriei clasice și calculului infinitezimal obișnuit.

În mecanicile mai noi, aceste proprietăți se modifică într-o oarecare măsură. Astfel, spațiul rămîne infinit și tridimensional, dar nu mai este omogen și izotrop. Cînd se consideră că formează o unitate cu timpul și masa, își schimbă și unele proprietăți în consecință.

Timpul este și el o formă obiectivă de existență a materiei. Noțiunea de timp oglindește timpul real existent în mod obiectiv. De timpul real ne dăm seama în mod practic, cu simțurile noastre, în legătură cu succesiunea evenimentelor din natură.

Chiar spaţiul este perceput tot în legătură cu timpul, deoarece ne dăm seama de spaţiu, parcurgîndu-l de la un loc la altul, într-un anumit timp.

Timpul în Mecanica clasică este: nelimitat, continuu, omogen, se scurge într-un singur sens (este ireversibil).

Durata fenomenelor se reperează faţă de o origine a timpului, aleasă arbitrar.

Mecanicile mai noi păstrează, în general, aceste proprietăţi cu unele modificări, în ceea ce priveşte omogenitatea.

Masa corpurilor măsoară inerţia lor. Noţiunea de masă oglindeşte masa reală a corpurilor, existentă în mod obiectiv şi independentă de locul unde se măsoară. Simţurile noastre percep masa ca pe o caracteristică directă a existenţei substanţei.

În strînsă legătură cu noţiunea de masă este noţiunea de forţă. *Forţa* este noţiunea care apare în legătură cu schimbarea stării de mişcare (sau de repaus relativ) a unui corp. Forţa caracterizează direcţia şi intensitatea acţiunii unui corp material asupra altui corp material, căruia îi schimbă starea de mişcare mecanică pe care o are (existentă); forţa măsoară transmiterea mişcării unui corp asupra altui corp.

Adeseori forţa a fost considerată ca a treia noţiune fundamentală a Mecanicii în locul masei; în acest caz, masa ar deveni o noţiune derivată din forţă. Studiind însă mai îndeaproape fenomenul, observăm că, pentru un acelaşi corp, forţa variază după mărimea intervalului de timp în care voim să producem o anumită deplasare a corpului. Cu alte cuvinte, forţa depinde şi de variaţia de viteză pe care o capătă corpul. Newton — primul care a introdus noţiunea de masă în Mecanica clasică — a conchis, la acea epocă, că orice corp are un element caracteristic al existenţei sale; acest element caracteristic îl constituie masa, — forţa fiind funcţie de acest element şi de acceleraţia mişcării pe care o capătă corpul.

Ca noţiune fundamentală, masa este o noţiune ireductibilă în Mecanica clasică şi se măsoară prin raportul dintre forţa care acţionează corpul (îi modifică starea de mişcare) şi variaţia de viteză (acceleraţia) pe care o capătă acel corp.

Dacă se consideră greutatea corpului, aceasta imprimă corpului lăsat să cadă liber o variaţie de viteză sau o acceleraţie numită acceleraţia gravitaţiei; masa corpului este egală cu raportul dintre greutatea corpului (forţă) şi acceleraţia gravitaţiei ($g=9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$, la latitudinea ţării noastre şi la nivelul mării).

În Mecanica clasică, masa era considerată ca o proprietate invariabilă a substanţei şi deci identică cu materia. Mecanicile mai noi arată însă că masa nu este invariabilă, ci depinde şi de viteza cu care se mişcă corpul a cărui masă se ia în consideraţie.

§ 2. Principiile fundamentale ale Mecanicii. Mecanica clasică se bazează pe un număr de legi sau principii fundamentale, numite uneori şi postulatele sau axiomele Mecanicii clasice.

Aceste principii fundamentale nu pot fi dovedite complet pe cale experimentală sau teoretică şi nici nu pot fi reduse, pînă acum, la alte legi mai simple. Dar, ca şi noţiunile fundamentale, principiile fundamen-

tale se verifică, în Mecanica clasică, în toate împrejurările în care intervine aplicarea lor. De aceea, principiile fundamentale sînt admise în Mecanica clasică ca valabile, cel puţin pînă cînd descoperiri noi vor veni să le dea o altă formă.

Este adevărat că anumite fenomene mecanice nu-şi mai găsesc explicaţii satisfăcătoare în Mecanica clasică şi — în timpul din urmă, pentru explicarea acestor fenomene cu caracter deosebit — principiile Mecanicii clasice au suferit modificări; aceste fenomene, însă, nu intră în cuprinsul studiilor care formează obiectul acestei lucrări şi, de aceea, nu vom insista asupra lor.

În cele ce urmează, se va face doar o scurtă expunere a acestor principii, urmînd să se revină cu unele precizări asupra lor mai tîrziu.

Principiile fundamentale ale Mecanicii clasice sînt următoarele:

a) *Principiul inerţiei.* Recunoscut pentru prima dată de Galilei şi formulat explicit, mai tîrziu, de Newton, principiul are următorul cuprins: *„Un corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, atît timp cît nu intervine vreo forţă care să-i modifice această stare"*. [Corpus[1] omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statuum suum mutare].

Newton numeşte acest principiu, în „Principiile matematice ale filozofiei naturale" — capitolul „Axiomele sau legile mişcării", *Legea I* (Lex prima).

Acest principiu, care guvernează în Mecanica clasică atît mişcarea corpurilor cît şi echilibrul lor, are ca idee fundamentală constatarea că, atît timp cît nu intervine o cauză exterioară, corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă — şi în subsidiar ideea că, drept cauză modificatoare a mişcărilor se consideră forţa.

b) *Principiul independenţei acţiunii forţelor.* Indicat de Galilei, principiul a fost formulat iniţial de Newton, astfel: *„Acceleraţia unui corp este proporţională cu forţa motoare aplicată şi este îndreptată în direcţia după care acţionează forţa"*. [Mutationem motus proportionale esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur].

Newton numeşte acest principiu: *Legea II* (Lex secunda).

În comentariul acestei legi, el arată că, dacă o forţă produce o acceleraţie, o forţă dublă va produce o acceleraţie dublă şi aşa mai departe, fie că, faţă de prima forţă este aplicată „laolaltă şi deodată" sau „treptat şi succesiv".

Pornind de la această observaţie, Newton a introdus noţiunea de masă, ca raport între modulul forţei $\overline{F}$ şi modulul acceleraţiei $\overline{a}$, adică $\frac{F}{a}=m$. În forma $\overline{F}=m\overline{a}$, principiul exprimă *ecuaţia fundamentală a Dinamicii*. Aceasta se mai scrie: $\overline{F}=\frac{d}{dt}(m\overline{v})$. Newton mai constată că, dacă corpul are o acceleraţie, aceasta se va aduna algebric cu acceleraţia existentă în cazul cînd direcţiile celor două acceleraţii coincid şi se va compune geometric în cazul cînd direcţiile lor sînt diferite.

---

[1] Newton înţelegea prin „corpus" punctul material, referindu-se la corpurile cereşti, care în problemele de astronomie sînt adesea considerate ca puncte materiale.

Comentariul principiului al II-lea cuprinde astfel şi *principiul paralelogramului forţelor*: cînd asupra unui punct material acţionează simultan două forţe avînd direcţii diferite, efectul este acelaşi ca şi cînd asupra punctului ar acţiona o forţă unică denumită *rezultantă* şi care are ca mărime direcţie şi sens diagonala paralelogramului avînd drept laturi forţele considerate. Acest comentariu este cunoscut sub numele de *Corolarul I* al lui Newton.

Ţinînd seama de cele arătate, principiul II, într-o formă sintetică, mai nouă, se enunţă şi astfel: *efectul unei forţe asupra unui corp este independent de viteza lui, precum şi de acţiunile altor forţe.*

c) *Principiul acţiunii şi reacţiunii.* Acest principiu a fost formulat de Newton astfel:

„La orice acţiune corespunde totdeauna o reacţiune egală şi contrară: sau acţiunile reciproce a două puncte materiale sînt totdeauna egale şi îndreptate în sens contrar". [Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi].

Newton numeşte acest principiu: *Legea III* (Lex tertia).

Principiul se aplică în Mecanica clasică atît în cazul contactului direct dintre corpuri cît şi în cazul acţiunii de la distanţă.

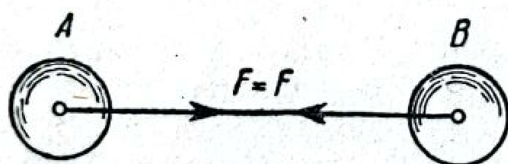


Fig. 6.

Astfel, un corp aşezat pe o masă acţionează asupra mesei prin greutatea lui; la rîndul ei, masa exercită asupra corpului o forţă egală cu această greutate şi de aceeaşi direcţie, însă de sens contrar.

De asemenea, un corp A care atrage alt corp B este la rîndul său atras de acesta cu o forţă egală cu aceea exercitată de A, cu aceeaşi direcţie, însă de sens opus (fig. 6).

Observaţie. Fiindcă am vorbit despre forţe, este important să arătăm o clasificare sumară a forţelor pentru a uşura înţelegerea denumirilor care se vor utiliza în cele ce urmează.

Forţele se clasifică după natura lor, în:

— *forţe exterioare date* (externe date sau active), care se aplică punctului material sau corpului material, din afara lor;

— *forţe exterioare de legătură* (externe de legătură, pasive sau reacţiuni), care se produc în legăturile punctului material sau corpului material considerat cu mediul înconjurător (ca reacţiuni ale corpului de care se leagă);

— *forţe interioare* (eforturi), care apar în interiorul corpului, legînd particulele acestuia între ele, două cîte două. Forţele interioare sînt două cîte două egale şi de sensuri contrarii.

— *forţe de inerţie*, care apar datorită inerţiei corpurilor; ele acţionează asupra agentului motor (corpul care a produs mişcarea corpului considerat).

Din punct de vedere al modului cum se aplică şi se transmit, forţele pot fi:

— *forţe concentrate*, care se consideră că sînt aplicate şi acţionează într-un singur punct (teoretic);

— *forţe repartizate*, care se consideră că se aplică şi acţionează pe o anumită lungime sau suprafaţă; repartizarea poate fi uniformă (egală), triunghiulară, trapezoidală, curbilinie etc.;

— *forţe masice*, care acţionează asupra unor mase avînd volumul diferit de zero (de exemplu greutatea corpurilor).

Asupra acestor definiţii şi asupra modului cum lucrează forţele se va mai reveni.

C. SCURT ISTORIC

Evoluţia Mecanicii, ca şi evoluţia altor ştiinţe, este indisolubil legată de *dezvoltarea forţelor de producţie.*

Nevoile tot mai mari ale omenirii — în legătură cu ridicarea nivelului material şi cultural — au împins oamenii la perfecţionarea forţelor de producţie şi în consecinţă, printr-o practică tot mai lărgită, prin generalizarea experienţei, la formarea, cu timpul, a teoriei; în primul rînd în domeniul construcţiilor, apoi al maşinilor, mijloacelor de transport etc.

Dezvoltarea s-a produs pe calea dialectică de cunoaştere a realităţii obiective: de la observarea realităţii la gîndirea abstractă şi, de la aceasta, înapoi la verificarea practică. Astfel, conţinutul Mecanicii, în fiecare stadiu de dezvoltare, s-a îmbogăţit mereu cu noi cunoştinţe teoretice, care, fie că s-au adăugat la cele vechi, fie că au perfecţionat cunoştinţele anterioare.

Mecanica, ca ştiinţă, apare o dată cu acumularea şi generalizarea experienţei în epoca creerii primelor mijloace de producţie.

În primul rînd a apărut *Statica*, dezvoltarea ei fiind legată de arta construcţiilor, încă din antichitate.

Formaţiunea social-economică sclavagistă — caracteristică lumii antice — se manifesta printr-o tehnică redusă aproape numai la dispozitive de ridicare şi deplasare a greutăţilor. Problema studiului dinamic al mişcării „maşinilor" nu se punea încă, fiind suficient calculul static. De aceea se vorbeşte mai mult despre forţe decît despre mişcare.

Noţiunea fundamentală a staticii — forţa — apare ca urmare a constatării efortului muscular, de care omul îşi dă seama prin practică. Tot practica împinge la precizarea teoriei pîrghiilor şi planului înclinat. Începutul secolului al IV-lea î.e.n. este marcat prin apariţia unor teorii privitoare la compunerea forţelor şi la noţiunea de echilibru.

Arhitas din Trent (430—365 î.e.n.), filozof din şcoala lui Platon, s-a ocupat de primele probleme teoretice ale Mecanicii; lui i se atribuie descoperirea scripetelui şi şurubului.

Aristotel (384—322 î.e.n.) a făcut multe consideraţii juste asupra staticii, îndeosebi asupra echilibrului. El s-a preocupat şi de problema căderii verticale a corpurilor grele, deşi această problemă a tratat-o metafizic, elaborînd o teorie după care „corpul tinde spre locul său din natură". Tot el este primul filozof care abordează problema relativităţii mişcării.

În opoziţie cu Aristotel, materialiştii atomişti *Democrit, Epicur* şi *Lucreţiu* au dezvoltat în Mecanică idei mai apropiate de realitate. Materialiştilor atomişti le aparţin primele afirmaţii mai clare — deşi cu inexactităţi — asupra căderii corpurilor, asupra structurii materiei etc.

Tot în această epocă (sec. al III-lea î.e.n.) a trăit *Arhimede*, pe care Engels l-a numit unul dintre reprezentanţii „cercetării exacte şi sistematice" ai antichităţii. Arhimede (287—212 î.e.n.) a trăit la Siracuza. Mare geometru şi mecanician, adevăratul întemeietor al staticii, el rezolvă aproape toate problemele mecanice care s-au pus în timpul său. În lucrările sale „Despre pîrghii", „Cartea reazemelor" şi „Despre echilibrul suprafeţelor", dă teoria pîrghiilor, rezolvă echilibrul sistemului format din două greutăţi suspendate pe o bară care se poate roti în jurul unui punct, elaborează regulile compunerii şi descompunerii forţelor paralele, dă definiţia centrului de greutate, stabileşte unele legi de bază ale hidrostaticii şi dă indicaţii cu privire la ceea ce, mult mai tîrziu, va fi numit momentul forţelor.

Sfîrşitul orînduirii sclavagiste se caracterizează în Mecanică prin lupta dintre teoriile metafizice şi teoriile progresiste ale materialiştilor atomişti, primele ieşind adeseori învingătoare.

În timpul formaţiunii social-economice feudale nu apare ceva excepţional în Mecanică, pînă spre sfîrşitul acestei epoci, — cînd se fac unele ipoteze noi asupra mişcării, se studiază maşini de irigat terenurile agricole şi, în legătură cu construirea fortificaţiilor, se studiază mai îndeaproape natura forţelor şi problema echilibrului.

O dată însă cu dezvoltarea construirii oraşelor şi drumurilor, meşteşugurilor, comerţului, fortificaţiilor, navigaţiei etc. se dezvoltă şi Mecanica. În deosebi, în timpul Renaşterii — o dată cu înflorirea artelor şi celorlalte ştiinţe — Mecanica ia un avînt considerabil. Acum se face saltul de la Statică la Dinamică. Studiul mişcării şi al forţelor apare pe primul plan. Se stabilesc formulele privitoare la mişcarea uniform variată şi la mişcarea curbilinie a punctului material. În secolul al XVII-lea şi al XVIII-lea se formulează principiile fundamentale ale Mecanicii.

Marelui artist şi învăţat *Leonardo da Vinci* (1452—1518) îi datorează Mecanica multe dintre ideile originale şi îndrăzneţe care i-au trasat căile de dezvoltare în viitor. Leonardo

da Vinci execută primele cercetări experimentale asupra căderii libere a unui corp greu; introduce noțiunea de moment, sub denumirea de „momento" sau pîrghie potențială. La Leonardo da Vinci găsim unele indicații cu privire la principiul deplasărilor virtuale, la legile echilibrului, la egalitatea acțiunii cu reacțiunea etc.; el studiază ciocnirile și stabilește unele reguli privitoare la frecări.

Evenimentul cel mai revoluționar al acestei epoci îl constituie apariția concepției lui *N. Copernic* (1473—1543) asupra sistemului heliocentric al lumii și tot acum apar lucrările lui *Johann Kepler* (1571—1630) cu privire la mișcarea planetelor în jurul Soarelui: celebrele trei legi ale lui Kepler.

Însă, întreaga epocă e dominată de lucrările lui *Galileo Galilei* (1564—1642), unul dintre cei mai mari învățați ai epocii, luptător neînfricat împotriva învățăturii geocentriste și a scolasticii, descoperitor al multor legi de bază ale Mecanicii clasice.

Galileo Galilei formulează noțiunile principale ale Cinematicii (viteza și accelerația) și stabilește formula căderii corpurilor; el introduce noțiunea de forță ca agent mecanic și emite ideea relativității mișcării.

Se poate spune că istoria Dinamicii începe de la Galilei. El formulează legea inerției aproape sub forma în care o cunoaștem și astăzi, teoria mișcării corpului greu pe un plan înclinat, legile mișcării corpului lansat (demonstrînd că traiectoria unui proiectil azvîrlit în vid, sub un unghi oarecare față de orizont, este o parabolă). Sub forma „regulii de aur" a Mecanicii, el arată că — în ceea ce privește mașinile mecanice — cît se cîștigă în forță, se pierde în viteză.

Un merit deosebit al lui Galilei constă în faptul că el atribuie o deosebită importanță experimentării practice, dovedind toate afirmațiile sale prin experiențe; el aduce, în acest mod, în știință, o poziție materialistă, în locul scolasticii — bazată numai pe textele anticilor — care se practicase pînă la el.

În continuare, ucenicul lui Galilei, *E. Toricelli* (1608—1647) dezvoltă teoria mișcării corpurilor grele și a stabilității echilibrului, rezolvînd și unele probleme de hidrostatică.

Simon Stevin (1548—1620) utilizează geometria la rezolvarea problemelor de Mecanică și clarifică modul cum trebuie folosite momentele forțelor la studiul sistemelor în echilibru; elaborează principiul compunerii forțelor; dă metoda de calcul a presiunii apei pe fundul și pereții vaselor.

G. Roberval (1602—1675) își axează statica sa pe studiul mașinilor (mașini simple, balanțe, mașini de împletit frînghii etc.) și alte probleme practice ale tehnicii, generalizînd realizările anterioare, în special în ceea ce privește calculul momentelor și compunerea forțelor.

R. Descartes (1596—1650) emite noțiunea cantității de mișcare, deși cu erori; se preocupă de teoria ciocnirii corpurilor; arată caracterul infinitezimal al principiului deplasărilor virtuale și studiază îndeaproape problema mișcării corpurilor și problema inerției.

Cr. Huygens (1629—1695) a formulat sub o formă incipientă noțiunile de accelerație centrifugă și centripetă și de moment de inerție. A studiat de asemenea mișcările oscilatorii, centrul de oscilație al pendulului fizic, ciocnirea corpurilor elastice.

Isaac Newton (1643—1727) a formulat cele trei principii fundamentale ale Mecanicii clasice; a aprofundat studiul forțelor; a studiat și descoperit legile fundamentale ale opticii; a pus bazele calculului infinitezimal. Mecanica newtoniană se bazează pe studiul naturii, pe numeroase experiențe și pe un deosebit simț de generalizare teoretică.

Galilei și Newton pot fi considerați ca fondatorii Mecanicii clasice.

P. Varignon (1654—1722) a aplicat metodele geometrice în statică, a definit complet noțiunea de moment al forței și a dat cunoscuta teoremă despre momentul rezultantei forțelor.

R. Hooke (1635—1703) a determinat experimental relațiile dintre eforturi și deformații la corpurile elastice, iar *E. Mariotte* (1620—1684) a studiat încovoierea grinzilor privite ca elemente elastice; Mariotte a lucrat mult și în domeniul Mecanicii gazelor și lichidelor.

În acest fel, către sfîrșitul secolului al XVII-lea, bazele Mecanicii erau temeinic stabilite, Mecanica devenind de acum înainte o știință independentă.

O importanță deosebită pentru dezvoltarea ulterioară a Mecanicii teoretice o are în această epocă apariția unor tratate de Mecanică în care se sistematizează realizările anterioare, fapt care va ușura aplicarea cunoștințelor mecanice în practică. Astfel sînt tratatele lui Wallis, Varignon, Poinsot, S. K. Kotelnikov și S. E. Guriev.

În secolul al XVIII-lea, datorită studiilor făcute pentru nevoile producției — mașini, construcții etc. — și pentru nevoile navigației — cercetări astronomice etc. — s-a ajuns la elaborarea de soluții generale pentru rezolvarea problemelor Mecanicii punctului material și corpului solid.

Astfel, *L. Euler* (1707—1783) a dezvoltat dinamica punctului material, utilizînd calculele analitice şi diferenţiale. El este creatorul Mecanicii corpului solid, studiind, primul, metoda mişcării corpului solid cu ajutorul celor trei unghiuri cunoscute sub numele de *unghiurile lui Euler*. El este fondatorul Hidrodinamicii şi al teoriei stabilităţii barelor elastice. De asemenea, a făcut importante cercetări în domeniul Rezistenţei Materialelor (de exemplu momentele de inerţie) şi Mecanicii cereşti.

Daniel Bernoulli (1700—1782) a dat în „Hidrodinamica" cunoscutele ecuaţii fundamentale pentru Hidraulică.

C. A. Coulomb (1736—1806) a stabilit legile experimentale ale frecării de alunecare şi de rostogolire, a studiat torsiunea firelor stabilind legile torsiunii etc.

Pierre Simon Laplace (1749—1827) s-a ocupat cu Mecanica cerească, publicînd renumita sa lucrare „Tratat despre Mecanica cerească" în care face cunoscutele ipoteze privitoare la geneza sistemului solar.

M. V. Lomonosov (1711—1765) studiază problema interacţiunii a două corpuri, face formulări ale bazei teoriei cinetice a propagării căldurii şi este primul care formulează principiul conservării energiei.

Spre mijlocul secolului al XVIII-lea încep a fi formulate şi principiile variaţionale ale Mecanicii.

Astfel, în 1744, *P. Maupertuis* (1698—1759) formulează *principiul minimei acţiuni*, pe care îl aplică la explicarea legilor reflexiei şi refracţiei luminii şi la teoria ciocnirilor. Demonstraţia matematică a acestui principiu a fost dată însă de Euler, iar generalizarea a fost făcută sub prima formă de Lagrange şi complet de Jukovski.

Problema importantă a deplasărilor virtuale, ca principiu care reflectă condiţiile generale de echilibru ale sistemelor, îşi găseşte formularea în secolul al XVIII-lea, sub o primă formă (care pornea de la lucrări mai vechi ale lui Galilei şi ale altora) în lucrările lui *Jean Bernoulli* (1667—1748); cel care îi va da formularea ştiinţifică va fi J. Lagrange, mai tîrziu.

Tot în această epocă *d'Alembert* (1717—1783) publică „Traite de Dynamique", unde este formulată celebra sa metodă privitoare la rezolvarea problemelor de dinamică prin metoda cinetostatică.

Acela care a dezvoltat însă considerabil partea teoretică a Mecanicii a fost *J. Lagrange* (1736—1813), în deosebi în lucrarea sa fundamentală „Mecanica analitică" (1788). Lagrange a creat Mecanica analitică pe baza principiului deplasărilor virtuale; a încercat să demonstreze analitic, atît cît era posibil, principiul deplasărilor virtuale; a demonstrat analitic principiul lui d'Alembert; a rezolvat problema oscilaţiilor mici ale unui sistem de corpuri etc. Se poate spune că apariţia „Mecanicii analitice" a lui Lagrange a determinat direcţiile principale de dezvoltare ulterioară a Mecanicii analitice.

Paralel s-au dezvoltat, în noile condiţii de producţie, şi alte capitole ale Mecanicii. Într-adevăr, capitalismul — pentru a obţine profituri maxime — cere mijloace de producţie mai puternice şi cu randament mai bun, cere construirea de fabrici şi uzine mari, cere mijloace de transport rapide şi căi de comunicaţie bune. Toate acestea necesită maşini complexe şi construcţii mari, deci şi teorii noi pe baza cărora să se poată calcula maşinile şi construcţiile. Aceasta va duce la dezvoltarea rapidă a Mecanicii teoretice şi aplicate.

L. M. Navier (1785—1836), *B. de Saint-Venant* (1797—1886) şi *G. Lamé* (1795—1870) fac studii aprofundate de Statică, de Rezistenţa Materialelor şi de Elasticitate.

M. V. Ostrogradski (1801—1861) studiază legăturile dependente de timp, introduce noţiunea de legături exprimate analitic prin inegalităţi şi aplică pentru astfel de legături, principiul deplasărilor virtuale. Ostrogradski a dat o nouă formă ecuaţiei generale a Dinamicii, ecuaţie care integrată în raport cu timpul va duce la expresia cea mai generală a principiului Hamilton—Ostrogradski.

W. R. Hamilton (1805—1865) aplică calculul variaţional în Mecanică şi formulează principiul care-i poartă numele.

Mijlocul secolului al XIX-lea se caracterizează prin dezvoltarea metodelor generale de integrare a ecuaţiilor diferenţiale ale Dinamicii. În această privinţă, dau metode noi: *S. Poisson* (1781—1840), *K. G. Iacobi* (în 1866) şi alţii.

În secolul al XIX-lea, au fost şi alţi corifei ai Mecanicii: *L. Foucault* (1819—1863), care demonstrează posibilitatea principială de a dovedi, fără cercetări astronomice, rotaţia zilnică a Pămîntului; în 1888, matematiciana rusă *S. V. Kovalevskaia* (1850—1891) a rezolvat încă un caz privitor la problema rotaţiei corpului greu în jurul unui punct fix; în 1893, matematicianul rus *A. M. Liapunov* (1857—1918) a demonstrat că cele trei cazuri ale mişcării corpului rigid cu un punct fix (studiate de Euler, Lagrange şi Kovalevskaia) sînt cazuri unice.

Probleme noi ale balisticii exterioare, au fost puse şi rezolvate de *N. V. Maievski* (1823—1892), *A. N. Krîlov* (1863—1945) etc.

Una dintre principalele probleme care se pune la acea epocă este şi problema stabilităţii echilibrului, studiile fiind începute încă de Lagrange.

Demonstrarea matematică a stabilităţii echilibrului sistemului conservativ a fost generalizată de *P. Dirichlet* (1805—1859); *E. Routh* studiază de asemenea stabilitatea mişcării, aplicînd metoda oscilaţiilor mici, iar *N. E. Jukovski* (1847—1921) face cercetări şi aplicaţii la stabilitatea avioanelor în aer. Dar cel care a studiat riguros stabilitatea mişcării şi a creat teoria şi cele mai generale metode pentru rezolvarea ei a fost *A. M. Liapunov*, în lucrarea sa „Problema generală a stabilităţii mişcării" (1892). Studiile lui Liapunov au fost dezvoltate ulterior de *V. V. Stepanov* (1889—1950).

Progresele importante, în secolul al XX-lea, ale Electrotehnicii, reglării automate a maşinilor, Opticii, Acusticii, sînt legate de numele lui *Liapunov*, *A. Poincaré*, *L. Mandelstam* (1879—1944), *N. D. Papalexi* (1880—1947) şi alţii.

Apare şi o nouă ramură a Mecanicii, Dinamica corpurilor cu masă variabilă. Bazele teoriei mişcării corpurilor cu masă variabilă au fost puse de *V. I. Meşcerski* (1859—1935) în lucrarea sa „Dinamica punctului material cu masă variabilă". Ecuaţia generală a dinamicii punctului cu masă variabilă a servit ca bază teoriei mişcării reactive, care a fost aprofundată de *K. E. Ţiolkovski* (1857—1935). Pornind de la aceste teorii — dezvoltate în mod creator de ştiinţa sovietică — la 4 octombrie 1957 a fost lansat de U.R.S.S. primul satelit artificial al Pămîntului, iar la 2 ianuarie 1959 prima rachetă cosmică, care a devenit prima planetă artificială a sistemului solar.

Din nevoia de a putea explica numeroase fenomene care în Mecanica clasică apăreau ca inexplicabile, în secolul al XX-lea se reexaminează multe dintre tezele şi principiile Mecanicii newtoniene. Ca o consecinţă, apar: Mecanica relativistă, Mecanica cuantică, Mecanica ondulatorie, Mecanica statistică etc. Numele savanţilor *A. Einstein*, *Max Planck*, *de Broglie*, *Fok*, *Vavilov* etc. sînt strîns legate de aceste mecanici noi şi sînt bine cunoscute în toată lumea.

În ţara noastră, trebuie să menţionăm pentru activitatea lor, în domeniul Mecanicii teoretice şi aplicate, pe *Anghel Saligny*, *Spiru Haret*, *Andrei Ioachimescu*, *Ion Ionescu*, *Gh. Em. Filipescu*, care au lăsat importante studii de Mecanică teoretică şi aplicată şi au executat numeroase lucrări inginereşti cu care ne mîndrim.

Un avînt deosebit a luat Mecanica după 1945, cînd s-au putut face studii deosebit de importante în noile laboratoare înfiinţate, cu amplele mijloace de experimentare care au fost puse la dispoziţia oamenilor de ştiinţă din ţara noastră.

NOTAŢII. SIMBOLURI

(A) sistem de puncte materiale;

A arie;

$\overline{a}$ accelerație;

a_x, a_y, a_z proiecțiile accelerației $\overline{a}$ pe axele $Oxyz$;

a_ϱ, a_n, a_μ proiecțiile accelerației $\overline{a}$ în coordonate sferice;

a_τ, a_ν, a_β proiecțiile intrinseci ale accelerației $\overline{a}$;

a_0 accelerația originii O a triedrului mobil T față de triedrul fix T_1;

$\overline{a}_a$ accelerația absolută;

$\overline{a}_r$ accelerația relativă;

$\overline{a}_t$ accelerația de transport;

$\overline{a}_c$ accelerația Coriolis;

a amplitudinea mișcării oscilatorii;

A amplitudinea oscilației forțate;

b numărul barelor unui sistem articulat;

C centrul de curbură principal;

C centrul forțelor paralele, centrul de greutate, centrul maselor;

C constanta ariilor;

CP cai putere;

$\overline{C}$ forța centrifugă propriu-zisă;

(D) domeniul de existență al funcției U;

E energie, energie cinetică;

E_m energie mecanică;

e excentricitate;

$\overline{F}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_A$ forțe;

F_x, F_y, F_z proiecțiile forței F pe axele $Oxyz$;

$\overline{F}_\nu$ componenta normală a forței $\overline{F}$;

$\overline{F}_\tau$ componenta tangențială a forței $\overline{F}$;

$\overline{F}_{ij}$, $\overline{F}_{ji}$ forțe interioare ale sistemului de puncte materiale;

$\overline{F}_{red}$ forța redusă la elementul conducător al mașinii;

$\overline{F}_t$ forță complementară de transport;

$\overline{F}_c$ forță complementară a lui Coriolis;

$\overline{F}_m$ forța rezultantă medie din timpul ciocnirii;

f frecvența;

f constanta de atracție universală;

f săgeata parabolei de echilibru a firului;

$\overline{g}$ accelerația gravitației;

$\overline{G}$ greutatea corpului;

$\overline{g}$ versor în planul tangent la suprafață în triedrul Darboux;

$\overline{g}$ normala geodezică a curbei firului;

$\overline{H}$ impuls;

H distanța polară în poligonul forțelor;

H componenta orizontală a tensiunii N din fir;

h ore;

h înălțime;

I centrul instantaneu de rotație;

I moment de inerție geometric;

I_x, I_y moment de inerție geometric axial;

I_0 moment de inerție geometric polar;

I_{xy} moment de inerție geometric centrifugal;

i rază de inerţie (giraţie);
i raport de transmitere;
J centrul instantaneu al acceleraţiilor;
J moment de inerţie mecanic;
J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_Δ momente de inerţie axiale;
J_{xOy}, J_{yOz}, J_{zOx} momente de inerţie planare;
J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} momente de inerţie centrifugale;
J_1, J_2, J_3 momente de inerţie principale;
J_0 moment de inerţie polar;
J_{red} momentul de inerţie redus al maşinii;
k coeficient de elasticitate;
k coeficient de restituire (coeficient de elasticitate la ciocnire);
$\overline{K}$ moment cinetic;
K curbura;
K_1 torsiunea curbei;
l lungime;
L lucru mecanic;
L_m lucru mecanic motor;
L_r lucru mecanic rezistent;
L_u lucru mecanic util;
L_p lucru mecanic pasiv;
m_i masa punctul A_i;
M masa sistemului de puncte materiale;
M_{red} masa redusă la elementul conducător al maşinii;
m modulul roţilor dinţate;
$\mathcal{M}_O(\overline{F})$ momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu punctul O;
$\overline{\mathcal{M}}_O$ vectorul moment rezultant al unui sistem de forţe;
$\overline{\mathcal{M}}_i$ moment încovoietor;
M_t momentul cuplului de frecare de rostogolire;
M_n momentul cuplului de frecare de pivotare;
M_g moment giroscopic;
$\mathfrak{M}$ momentul cuplului motor (la roata motoare);
n turaţia;
$\overline{n}$ versorul normalei la suprafaţă în triedrul lui Darboux;
n numărul nodurilor unei grinzi cu zăbrele;
$\overline{N}$ reacţiune normală;
N tensiunea din fir;
O originea sistemelor de axe;
p_i forţă de legătură;
$\overline{p}$ percusiune;
p pasul şurubului, pasul roţilor dinţate;
P putere mecanică;
P_m putere motoare;
P_u putere utilă;
P_p putere pierdută;
q forţa repartizată asupra firului;
Q forţa rezistentă a unei maşini simple;
$\overline{r}$ vector de poziţie;
R, r raze;
$\dot{\overline{r}}$ viteza punctului definit de $\overline{r}$;
$\ddot{\overline{r}}$ acceleraţia punctului definit de $\overline{r}$;
$\overline{\mathcal{R}}$ vectorul rezultant al unui sistem de forţe efectiv aplicate;
$\overline{R}$ reacţiune (forţă de legătură);
s spaţiu, arc;
s_0 spaţiu iniţial;
s cursa pistonului
s secunda;
$\dot{s}$ viteza;
$\ddot{s}$ acceleraţia;
s coeficient de frecare la rostogolire;
S moment static;
t timp;
T perioadă;
T tensiune;
$T_1(\equiv O_1x_1y_1z_1)$ triedru cartezian fix;

T componenta reacţiunii după o direcţie tangentă la legătură (forţă de frecare de lunecare);

t_{ij} componentele unui tensor de ordinul al doilea;

U funcţie de forţă;

$|\bar{v}|$ modulul vectorului $\bar{v}$;

$\bar{v}$ viteză

$\dot{\bar{v}}$ acceleraţie;

v_x, v_y, v_z proiecţiile vitezei $\bar{v}$ pe axele $Oxyz$;

v_ρ, v_n, v_μ proiecţiile vitezei $\bar{v}$ în coordonate sferice;

$\bar{v}_0$ viteza iniţială;

$\bar{v}_0$ viteza originii O a triedrului mobil T faţă de triedrul fix T_1;

$\bar{v}_C$ viteza centrului de greutate (a centrului maselor);

$\bar{v}_a$ viteza absolută;

$\bar{v}_r$ viteza relativă;

$\bar{v}_t$ viteza de transport;

$\bar{v}_m$ viteza medie;

V volumul unui corp;

V energie potenţială, funcţie potenţială

V componenta verticală a tensiunii N în fir;

W watt;

W energie, lucru mecanic;

$x, x_1, ..., x_i$ abscisă;

$X, X_1, ... X_i$ proiecţia unei forţe pe Ox;

$\dot{x}$ proiecţia vitezei $\bar{v}$ pe Ox;

$\ddot{x}$ proiecţia acceleraţiei $\bar{a}$ pe Ox;

x elongaţia mişcării oscilatorii;

$y, y_1, ..., y_i$ ordonata unui punct;

$Y, Y_1, ..., Y_i$ proiecţia unei forţe pe Oy;

$\dot{y}$ proiecţia vitezei $\bar{v}$ pe Oy;

$\ddot{y}$ proiecţia acceleraţiei $\bar{a}$ pe Oy;

$z, z_1, ..., z_i$ cota unui punct;

$Z, Z_1, ..., Z_i$ proiecţia unei forţe pe Oz;

$\dot{z}$ proiecţia vitezei $\bar{v}$ pe Oz;

$\ddot{z}$ proiecţia acceleraţiei $\bar{a}$ pe Oz;

α unghi;

α cosinusul director cu axa Ox;

$\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ versorii axelor $Ox_i (i=1, 2, 3)$;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cosinusurile directoare ale unei axe Δ cu axele Ox, Oy, Oz;

α_{ji} $(j=1, 2, 3)$ proiecţiile vectorului $\bar{\alpha}_i$ pe axele Ox_j;

β cosinusul director cu axa Oy;

$\bar{\beta}$ versorul binormalei în triedrul lui Frenet;

γ greutatea specifică;

γ cosinusul director cu axa Oz;

Δ dreaptă, axă, suportul unui vector;

Δ determinant;

δ_j^k simbolul lui Kronecker;

δ gradul de neregularitate al funcţionării maşinilor:

$\delta\bar{r}$, δx deplasări virtuale;

δL lucru mecanic virtual;

$\bar{\varepsilon}$ acceleraţie unghiulară;

θ unghi polar (în coordonate polare);

θ longitudine;

θ unghiul de nutaţie (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);

λ latitudine;

λ lungime de undă;

μ coeficient de frecare de alunecare;

μ_0 coeficient de aderenţă;

μ densitate, masa specifică a corpurilor;

$\bar{\nu}$ versorul normalei principale în triedrul lui Frenet;

ν coeficient de frecare de pivotare;

ν frecvenţa mişcării oscilatorii armonice;

ρ masă specifică;

ρ rază de curbură principală;

ρ_1 rază de torsiune;

ρ_n rază de curbură normală a suprafeţei;

ρ_g rază de curbură geodezică;

$\bar{\rho}$ versorul vectorului de poziţie $\bar{r}$;

$\bar{\tau}$ versorul tangentei în triedrul lui Frenet;

τ_{ij} tensor simetric;

$\tau(\bar{F})$ torsorul forţelor;

φ unghi de frecare;

φ unghiul de rotaţie proprie (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);

φ latitudine;

Φ forţă de aderenţă;

ψ unghiul de precesie (dintre cele trei unghiuri ale lui Euler);

$\bar{\omega}$ viteza unghiulară;

$\dot{\bar{\omega}}$ acceleraţia unghiulară;

ω_m viteza unghiulară medie (de regim, nominală) a maşinii;

$\left.\begin{matrix}\omega_{max}\\ \omega_{min}\end{matrix}\right\}$ valorile extreme ale vitezei unghiulare la o maşină;

ω pulsaţia mişcării periodice;

Ω viteza areolară;

ω_i vectorul asociat al tensorului antisimetric ω_{ij};

ω_{ij} tensorul antisimetric;

η randament mecanic.

PARTEA ÎNTÎIA

GENERALITĂȚI

I. NOŢIUNI DE CALCUL VECTORIAL

A. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

§ 1. Scalari. Vectori. Există mărimi care pot fi definite complet prin cîte un singur număr, valoarea lor numerică nedepinzînd de un reper anumit. Astfel de mărimi se numesc *mărimi scalare* sau simplu *scalari*. Studiul lor se face de obicei în aritmetică.

S-a constatat însă, de-a lungul timpului, că mărimile scalare nu sînt singurele care intervin în ştiinţă şi în tehnică, şi că mai pot fi şi altfel de mărimi, de exemplu mărimi prezentînd un caracter geometric, cunoscute sub numele de *mărimi vectoriale* sau simplu *vectori*. Mărimile vectoriale intervin foarte deseori, după cum vom vedea, în Mecanică.

Vom presupune că spaţiul de care ne ocupăm aici, în care au loc fenomenele mecanice, este spaţiul euclidian E_3 cu trei dimensiuni. De multe ori, însă, va fi avantajos să simplificăm spaţiul E_3 reducîndu-l, în mod convenţional, la două dimensiuni E_2 sau la o dimensiune E_1.

Spaţiul euclidian E_1 este *linia dreaptă oarecare* D, avînd o *direcţie* dată. Dacă se fixează pe dreapta D un sens de deplasare — de exemplu sensul de la A la B (fig. 1.1) — dreapta devine o *axă* (şi zicem axa Δ). Cum orice dreaptă este susceptibilă de a avea două sensuri de-a lungul ei, unul opus celuilalt, rezultă că o dreaptă poate fi considerată ca *suportul* a două axe.

Poziţia unui punct P pe axă ne sugerează să folosim distanţa r de la un punct O al axei (pe care îl vom lua drept origine, reper) ca element determinant. Punctului P îi va corespunde o distanţă r şi un sens de la O spre P. Dacă acest sens este acelaşi cu sensul axei, se va lua distanţa r cu semnul plus; în caz contrar, se va lua r cu semnul minus. În acest mod, poziţia punctului P va fi perfect determinată pe axă, cu ajutorul distanţei r afectată de semnul convenţional $+$ sau $-$. Distanţa r, astfel

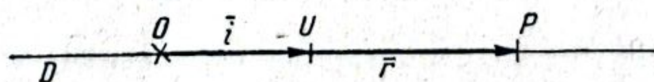


Fig. 1.1

determinată, constituie *vectorul de poziţie* al punctului P pe dreaptă şi se însemnă cu $\bar{r}$. Putem marca în P o săgeată pentru a pune şi mai mult în evidenţă caracterul vectorial al mărimii $\bar{r}(=\overline{OP})$. Valoarea pozitivă a distanţei r este *valoarea absolută* sau *modulul* vectorului $\bar{r}$, pe cînd distanţa

r afectată de semnul $+$ sau $-$ este valoarea scalară a vectorului $\bar{r}$. Valoarea absolută a vectorului $\bar{r}$ se notează prin simbolul $|\bar{r}|$.

Vom considera, în special, punctul U situat la o distanță egală cu unitatea, de O, în partea pozitivă a dreptei. Vom însemna vectorul de poziție al acestui punct cu $\bar{i}$; acest vector unitar se numește *versor*.

Versorul $\bar{i}$ va putea reprezenta și sensul axei Δ, încît se poate scrie

$$\bar{i} = \text{vers } \Delta.$$

Să notăm cu x distanța OP prevăzută cu semnul $+$ sau $-$ după cum vectorul de poziție $\bar{r}$ are sensul lui $\bar{i}$ sau nu. Mărimea x este, evident, o cantitate algebrică, o *mărime scalară*. Ea este identică de altfel cu *mărimea scalară* a vectorului $\bar{r}$ definit mai înainte. Vom conveni a scrie

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i},$$

indicînd prin aceasta că vectorul $\bar{r}$ este determinat de mărimea algebrică x și de versorul $\bar{i}$. Observăm astfel că mărimea vectorială este de fapt o mărime orientată, avînd un suport, o origine și o intensitate scalară.

Punctul O este caracterizat de $x=0$; vectorul corespunzător de poziție este *vectorul zero* pe care-l vom însemna tot cu 0, ca în aritmetică.

Dacă ne putem imagina o a doua axă similară Δ' avînd versorul respectiv $\bar{j}$, atunci vectorul $\bar{r}'$ de poziție al unui punct B de pe Δ' va fi dat de formula analogă

$$\bar{r}' = y\bar{j},$$

unde y este o mărime algebrică analogă lui x.

Spațiul euclidian E_2 cu două dimensiuni este planul. Un punct A al planului este determinat prin vectorul său de poziție $\bar{r}$ față de un punct O din plan,

$$\bar{r} = \overline{OA}.$$

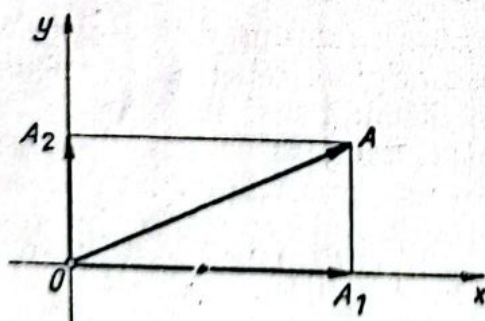


Fig. 1.2

Totodată, ne putem folosi de două axe pentru a caracteriza vectorul de poziție $\bar{r}$. Fie axele Ox și Oy perpendiculare în O una pe alta (fig. 1.2) și fie $\bar{i}$ și $\bar{j}$ versorii respectivi, adică

$$\bar{i} = \text{vers } Ox, \quad \bar{j} = \text{vers } Oy.$$

Dacă A_1 este proiecția punctului A pe Ox, OA_1 va fi vectorul de poziție al lui A_1 pe Ox, adică mărimea vectorială care determină în mod univoc poziția lui A_1 pe Ox. O vom însemna, după cum am convenit mai înainte prin $x\bar{i}$. În mod analog, A_2 fiind proiecția punctului A pe Oy, vectorul său de poziție va fi $y\bar{j}$. Așadar, dîndu-ni-se poziția punctului A în plan, obținem vectorii $x\bar{i}$ și $y\bar{j}$ în mod univoc, și reciproc, dîndu-ni-se $x\bar{i}$ și $y\bar{j}$

obţinem în mod univoc punctele A_1 şi A_2, şi, prin construcţia geometrică din fig. 1.2, punctul A. Vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului A are *componentele* $x\bar{i}$ şi $y\bar{j}$, iar punctul A, coordonatele x şi y faţă de sistemul xOy, ceea ce putem scrie sub forma

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}.$$

Această formă se numeşte *forma hipercomplexă a vectorului* $\bar{r}$ în baza $\bar{i}$, $\bar{j}$. Mărimile algebrice x, y sînt *valorile scalare* ale vectorilor $x\bar{i}$ şi respectiv $y\bar{j}$, adică ale componentelor lui $\bar{r}$ după axe.

Axele Ox, Oy din fig. 1.2 constituie un *sistem drept* pentru că, presupunînd că ele se află într-un plan orizontal, rotaţia axei Ox de $90°$ pentru a se suprapune peste Oy se face în sensul invers mersului acelor unui ceasornic (dimpotrivă, sistemul format de Ox şi de prelungirea axei Oy ar fi un sistem *stîng*).

Observăm că şi în acest caz coordonata x a vectorului $\bar{r}$ după Ox este un număr pozitiv sau negativ, după cum vectorul $x\bar{i}$ are acelaşi sens sau nu cu versorul $\bar{i}$ al axei Ox. Dacă însemnăm cu $(\bar{r}, \bar{i})$ unghiul ($\geqslant 0$, $\leqslant \pi$) pe care-l fac cei doi vectori $\bar{r}$ şi $\bar{i}$ între ei, vom avea

$$x=|\bar{r}|\cos(\widehat{\bar{r}, \bar{i}}),$$

unde am însemnat cu $|\bar{r}|$ lungimea pozitivă a vectorului $\overline{OA}$, valoarea absolută sau modulul vectorului $\bar{r}$. În mod analog vom scrie

$$y=|\bar{r}|\cos(\widehat{\bar{r}, \bar{j}}).$$

Aceste două formule ne dau relaţia evidentă

$$r^2=x^2+y^2.$$

Observăm că mai putem scrie:

$$\cos(\widehat{\bar{r}, \bar{i}})=\frac{x}{|\bar{r}|}, \quad \cos(\widehat{\bar{r}, \bar{j}})=\frac{y}{|\bar{r}|}.$$

Pentru cazul special în care lungimea r este egală cu unitatea, vectorul de poziţie $\bar{r}$ devine un versor, iar coordonatele sale după axe devin chiar cosinusurile directoare ale vectorului.

Alt caz special, $\bar{r}=0$, arată că vectorul zero poate avea orice direcţie.

Spaţiul euclidian E_3 cu trei dimensiuni are trei axe. A treia axă este perpendiculara Oz, în O, pe planul xOy şi fie $\bar{k}$ versorul ei

$$\bar{k}=\text{vers } Oz.$$

Un astfel de sistem se numeşte *drept*, întrucît sensul rotaţiei axei Ox, pentru a coincide cu Oy, corespunde cu sensul în care e rotit un şurub drept pentru

a avansa în sensul versorului $\bar{k}$. (Dacă în loc de Oz am fi luat drept a treia axă, prelungirea lui Oz dincolo de planul xOy, am fi avut un sistem stîng). Vom întrebuința de regulă sistemul drept.

Exemplu. Potrivit acestei definiții, rotația diurnă a Pămîntului în jurul axei polilor dirijată de la S la N este rotația unui triedru drept în jurul axei Oz. De asemenea, luînd drept axă Oz normala la planul eclipticii, și anume semidreapta care face un unghi ascuțit cu axa polilor SN, mișcarea Pămîntului pe ecliptică este determinată de rotația unui triedru drept în planul xOy.

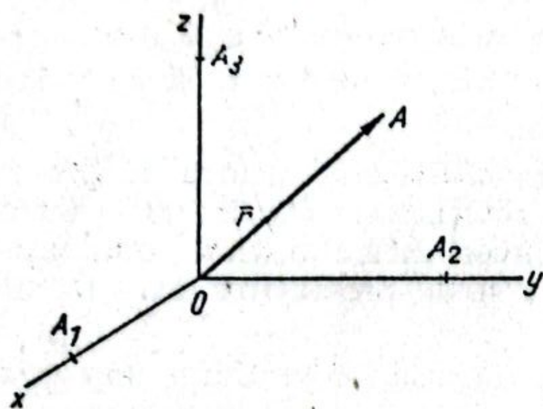


Fig. 1.3

Vectorul de poziție $\bar{r}$ al unui punct A din spațiu (fig. 1.3) se va determina cu ajutorul proiecțiilor sale pe axe.

Vom proiecta punctul A în A_1 pe Ox, în A_2 pe Oy, în A_3 pe Oz. Punctele A_1, A_2, A_3 sînt univoc determinate, deci și vectorii respectivi de poziție $x\bar{i}$, $y\bar{j}$, $z\bar{k}$. Reciproc, cunoscînd punctele A_1, A_2, A_3, se determină în mod univoc punctul A.

Vom conveni să scriem

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} \tag{1.1}$$

și vom spune că vectorul de poziție $\bar{r}$ are *componentele* $x\bar{i}$, $y\bar{j}$ $z\bar{k}$, iar punctul A, *coordonatele* x, y, z față de axele triedrului $Oxyz$ (acestea din urmă sînt valorile scalare ale vectorilor $x\bar{i}$, $y\bar{j}$, $z\bar{k}$).

De la vectorii de poziție se poate trece la un *vector* în general, păstrîndu-i însușirile următoare: o lungime AB afectată de o direcție și de un sens. Așadar, vectorul este asimilat unui segment dirijat AB,

$$\bar{v}=\overline{AB}.$$

Proiecțiile punctelor A și B pe axe vor determina trei vectori $v_x\bar{i}$, $v_y\bar{j}$, $v_z\bar{k}$, astfel încît putem scrie

$$\bar{v}=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k}. \tag{1.2}$$

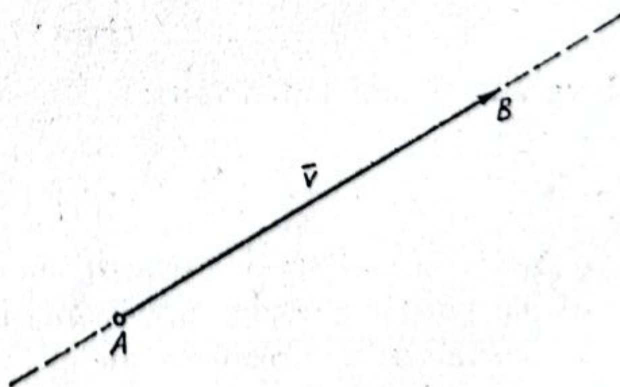


Fig. 1.4

Acești trei vectori sînt *componentele* vectorului $\bar{v}$ după axe, iar mărimile v_x, v_y, v_z sînt *coordonatele vectorului* $\bar{v}$ după aceleași axe. Așadar, coordonatele v_x, v_y, v_z sînt *valorile scalare* ale vectorilor $v_x\bar{i}$, $v_y\bar{j}$, $v_z\bar{k}$; ele sînt numite, uneori, și proiecțiile vectorului pe axele de coordonate. Punctul A (fig.1.4) este punctul de aplicație, iar punctul B este extremitatea vectorului $\bar{v}$; dreapta AB face parte din *suportul* sau *linia de acțiune* a vectorului. Cînd se face abstracție de punctul de aplicație al vectorului, avem

vectorul liber. În cazul cînd vectorul este legat de punctul său de aplicaţie, avem *vectorul legat* (sau fixat); în acest caz, va trebui să se dea şi vectorul de poziţie al punctului său de aplicaţie, pentru determinarea completă a vectorului. În fine, cînd punctul de aplicaţie se poate lua oriunde pe suportul vectorului, avem *vectorul alunecător* (glisant).

Vectorul $\bar{\rho}$ de lungime egală cu unitatea, situat pe suportul vectorului $\bar{v}$ şi avînd acelaşi sens cu $\bar{v}$, este *versorul* lui $\bar{v}$:

$$\bar{\rho} = \text{vers } \bar{v}.$$

Punctul de la infinit al suportului unui vector $\bar{v}$ îi determină *direcţia*. Doi vectori paraleli între ei au aceeaşi direcţie, sensul putînd fi însă diferit.

§ 2. Proiecţii. Proiecţia A' a unui punct A pe o dreaptă D (fig. 1.5) sau pe un plan P (fig. 1.6) se află la intersecţia proiectantei cu dreapta, respectiv cu planul considerat. De obicei, proiectanta va fi o perpendiculară prin A (pe dreaptă sau pe plan) afară de cazuri excepţionale în care se va menţiona caracterul special al proiectantei.

Proiecţia unui vector $\bar{v}$ $(=\overline{MN})$ pe o dreaptă D (fig. 1.7) sau pe un plan P (fig. 1.8) se va găsi proiectîndu-i extremităţile; se obţine astfel cîte un nou vector, al cărui sens va fi determinat prin sensul de deplasare

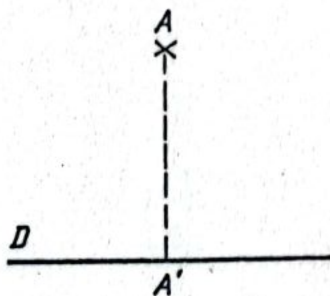


Fig. 1.5

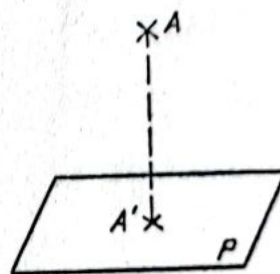


Fig. 1.6

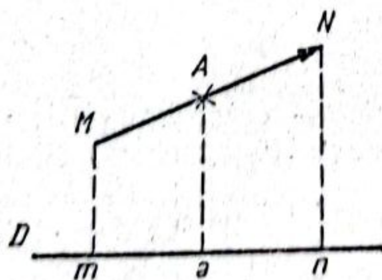


Fig. 1.7

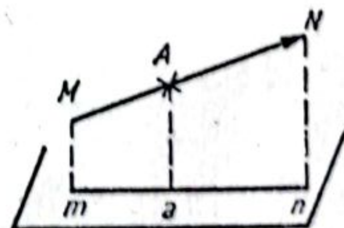


Fig. 1.8

a proiecţiei a a punctului A de pe vectorul $\bar{v}$, cînd A se deplasează de la M la N.

Proiecţia unui vector $\bar{v}$ pe o axă Δ (fig. 1.9), care se însemnă cu

$$\text{pr}_{\Delta}\, \bar{v},$$

este dată de relaţia

$$\mathrm{pr}_{\Delta}\overline{v} = |\overline{v}| \cos \alpha, \tag{1.3}$$

în care am notat cu α unghiul dintre versorul $\overline{\rho}$ al vectorului $\overline{v}$ şi versorul $\overline{\rho}_0$ al axei Δ, adică

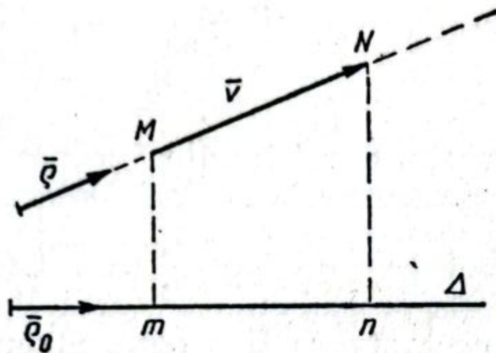


Fig. 1.9

$$\alpha = \widehat{(\overline{\rho}, \overline{\rho}_0)}.$$

Observăm că putem scrie

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \mathrm{pr}_x\, \overline{v} \\ v_y &= \mathrm{pr}_y\, \overline{v} \\ v_z &= \mathrm{pr}_z\, \overline{v}, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

dacă notăm cu pr_x proiecţia pe axa Ox etc; iar mărimile v_x, v_y, v_z vor fi *proiecţiile vectorului $\overline{v}$ pe axele reperului $Oxyz$.*

În cazul cînd vectorul $\overline{v}$ este un versor (vector unitate) relaţia (1.3) devine

$$\mathrm{pr}_{\Delta}\overline{v} = \cos \alpha, \tag{1.5}$$

iar relaţiile (1.4) vor da

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \cos \widehat{(\overline{v}, \overline{i})}, \\ v_y &= \cos \widehat{(\overline{v}, \overline{j})}, \\ v_z &= \cos \widehat{(\overline{v}, \overline{k})}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora vom scoate din (1.4)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{1.7}$$

Relaţiile (1.3), (1.4) ne dau posibilitatea să calculăm proiecţiile pe axe cînd ni se dă vectorul în lungime, direcţie şi sens. Invers, dîndu-ni-se proiecţiile v_x, v_y, v_z, putem calcula pe $|\overline{v}|$ din (1.7) şi pe $\cos \widehat{(\overline{v}, \overline{i})}$, $\cos \widehat{(\overline{v}, \overline{j})}$, $\cos \widehat{(\overline{v}, \overline{k})}$ din (1.3), (1.2). Excepţie face vectorul de proiecţii nule $v_x = v_y = v_z = 0$, adică vectorul *zero* (pe care-l vom însemna cu *0*); direcţia şi sensul acestuia rămîn nedeterminate, dar lungimea sa este nulă.

Schimbarea axelor de coordonate. În cazul cînd vectorul liber $\overline{v}$ este determinat prin proiecţiile sale, trebuie să observăm că aceste proiecţii pot fi luate în mod arbitrar, trei mărimi scalare oarecare. Trebuie totuşi să menţionăm că ele se deosebesc de scalarii obişnuiţi, întrucît valoarea lor se schimbă o dată cu axele de coordonate la care raportăm vectorul. Dacă

ne raportăm la vectorul de poziție al punctului P (fig. 1.10), ne putem da seama imediat de această proprietate. Într-adevăr, vectorul de poziție $\overline{OP}$ al punctului P are drept proiecții cele trei coordonate carteziene ale punctului față de axe; la o schimbare a axelor de coordonate (păstrînd, de pildă, originea O), coordonatele punctului P se schimbă și formulele de transformare sînt

$$\left.\begin{aligned} x'&=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z,\\ y'&=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z,\\ z'&=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z, \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

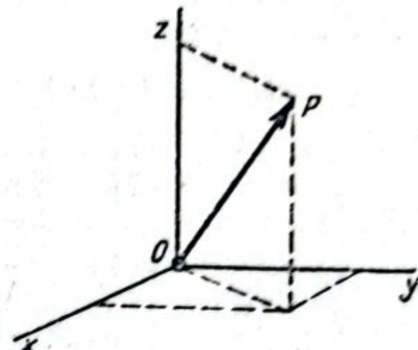


Fig. 1.10

dacă însemnăm cu x', y', z' coordonatele punctului P față de noile axe de coordonate și cu α_i, β_i, γ_i, $(i=1, 2, 3)$ cosinusurile directoare ale noilor axe față de cele vechi, conform tabelei

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α_1	β_1	γ_1
Oy'	α_2	β_2	γ_2
Oz'	α_3	β_3	γ_3

(1.9)

Vedem deci, că proiecțiile vectorului de poziție se transformă potrivit formulelor (1.8). Cum însă orice vector $\overline{v}$ poate fi considerat ca fiind vectorul de poziție al extremității sale față de un sistem de axe avînd originea în punctul său de aplicație, deducem că formulele (1.8), puse sub forma

$$\left.\begin{aligned} v_{x'}&=\alpha_1v_x+\beta_1v_y+\gamma_1v_z,\\ v_{y'}&=\alpha_2v_x+\beta_2v_y+\gamma_2v_z,\\ v_{z'}&=\alpha_3v_x+\beta_3v_y+\gamma_3v_z, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

vor da transformarea proiecțiilor v_x, v_y, v_z în v_x', v_y', v_z' la schimbarea axelor de coordonate, după tabela (1.9). Așadar, proiecțiile v_x, v_y, v_z sînt scalari de o natură deosebită întrucît ei nu sînt invarianți ai grupului de transformări (1.9); sînt mărimi *pseudo-scalare*, ceea ce însă nu ne va împiedica să îi tratăm ca pe adevărații scalari.

Relațiile (1.10) de transformare pot fi privite ca formule *caracteristice* pentru vectorul de proiecții v_x, v_y, v_z în sensul că, dacă mărimile v_x, v_y, v_z suferă transformarea (1.8), la o schimbare (1.9) a axelor de coordonate, putem spune că ele reprezintă realmente un vector prin proiecțiile sale. Într-adevăr, considerîndu-le drept coordonate carteziene, ele ne dau un punct a cărui poziție este independentă de axele de coordonate. Vectorul are, deci, o existență *intrinsecă*, adică independentă de sistemul de axe la care-l referim.

§ 3. **Invarianţi.** Potrivit celor de mai înainte, modulul unui vector $\bar{v}$ trebuie să rămînă neschimbat faţă de o transformare a axelor de coordonate, adică

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=v_{x'}^2+v_{y'}^2+v_{z'}^2.$$

Această condiţie este satisfăcută de formulele (1.10), cum se constată imediat dacă se ţine seama de relaţiile

$$\Sigma\alpha_i^2=\Sigma\beta_i^2=\Sigma\gamma_i^2=1,\ \Sigma\beta_i\gamma_i=\Sigma\gamma_i\alpha_i=\Sigma\alpha_i\beta_i=0,\ (i=1,\ 2,\ 3). \qquad (1.11)$$

Mărimea $v_x^2+v_y^2+v_z^2$ este deci un *invariant* al grupului de transformări (1.9).

Cum legile Mecanicii — în genere, legile fizice — trebuie să fie independente de axele de coordonate la care le raportăm, rezultă că, în acest caz, ele se vor exprima sub forma unor invarianţi ai grupului de transformări (1.10).

§ 4. **Expresia hipercomplexă a vectorului.** *Operaţii algebrice.* Dacă ne referim la formulele (1.1) şi (1.2), vectorul ne apare formal ca un *număr algebric hipercomplex* cu trei unităţi.

Expresia hipercomplexă a vectorilor ne uşurează în multe cazuri operaţiile cu ei. De aceea, analog cu ceea ce se face în algebra numerelor hipercomplexe, vom încerca să definim operaţiile dintre vectori folosindu-ne de expresia lor hipercomplexă.

Doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt egali

$$\bar{a}=\bar{b}, \qquad (1.12)$$

sau

$$a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k} \qquad (1.13)$$

prin definiţie, atunci cînd coordonatele lor sînt corespunzător egale

$$a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z. \qquad (1.14)$$

Aşadar, cele trei *relaţii scalare* (1.14) pot fi reprezentate vectorial printr-una singură (1.12) folosind notaţia vectorială, care permite o scriere concentrată a ecuaţiilor.

Relaţiile (1.14) arată că toţi vectorii paraleli cu o direcţie dată, avînd aceeaşi lungime şi acelaşi sens, sînt egali între ei. Această observaţie este de altfel în concordanţă cu faptul că în operaţiile analizei vectoriale apar aproape exclusiv vectori liberi. Cu această rezervă se poate spune că coordonatele a_x, a_y, a_z ale unui vector $\bar{a}$ *determină* acel vector $\bar{a}$.

B. ALGEBRA VECTORILOR

§ 5. **Adunarea.** Fie $\bar{a}(a_x,\ a_y,\ a_z)$ şi $\bar{b}(b_x,\ b_y,\ b_z)$ doi vectori oarecare Vectorul $\bar{c}$ ale cărui coordonate c_x, c_y, c_z sînt determinate prin relaţiile

$$c_x=a_x+b_x,\quad c_y=a_y+b_y,\quad c_z=a_z+b_z, \qquad (1.15)$$

se consideră că este suma vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, ceea ce se notează prin egalitatea

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}. \qquad (1.16)$$

Operaţia prin care $\bar{c}$ se deduce din $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se numeşte *adunare*. Este evident că numerele c_x, c_y, c_z date de (1.15) reprezintă un vector. Ele satisfac relaţiile (1.10).

Adunarea definită în acest mod cuprinde, ca pe un caz particular, şi adunarea dintre scalari. Într-adevăr, dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ degenerează în vectori pe o singură axă, de pildă pe Ox, cele trei relaţii de definiţie (1.15) ale vectorului $\bar{c}$ se reduc la una singură, de exemplu, la prima dacă luăm axa Ox ca direcţie comună a vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Sumele dintre scalarii (1.15) fiind comutative, rezultă că şi operaţia (1.16) este *comutativă*

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$$

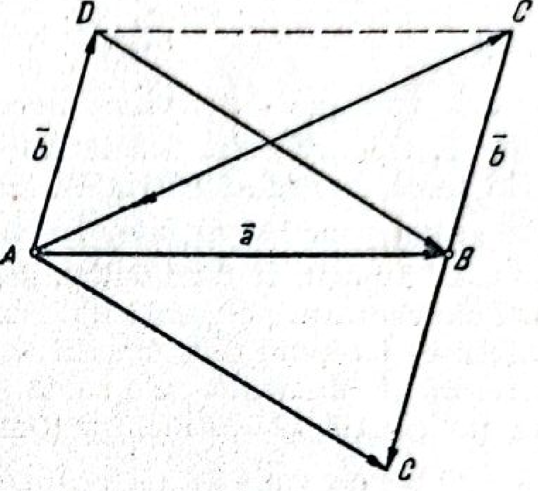


Fig. 1.11

Operaţia adunării este susceptibilă de a avea o reprezentare geometrică de o mare valoare practică. Vectorul $\bar{c}$ este segmentul dirijat $\overline{AC}$ (fig. 1.11) care închide linia poligonală obţinută punînd cap la cap cei doi vectori, $\bar{a}(=\overline{AB})$ şi $\bar{b}(=\overline{BC})$, sau este diagonala trecînd prin A a paralelogramului $ABCD$ construit pe segmentele dirijate $\overline{AB}$ şi $\overline{AD}$ ca laturi. Proprietatea aceasta rezultă imediat din relaţiile (1.15). Cum însă construcţia geometrică a sumei $\bar{c}$ este independentă de axele de coordonate la care raportăm vectorii, rezultă că operaţia adunării este un invariant faţă de grupul schimbărilor de axe sau, mai precis, că vectorul $\bar{c}$ definit prin relaţiile (1.15) va suferi aceleaşi transformări pe care le suferă şi vectorul de poziţie în cazul cînd se face o schimbare a axelor la care se referă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Construcţia din fig. 1.11 se numeşte *regula paralelogramului*.

În calcule vom ţine seama de identităţile

$$\bar{a}+0=0+\bar{a}=\bar{a}.$$

Dacă se întîmplă ca vectorul $\bar{c}$ să fie nul, adică

$$\bar{a}+\bar{b}=0,$$

atunci cei doi vectori, $\bar{a}$, $\bar{b}$, au aceeaşi direcţie, aceeaşi lungime, dar sensuri opuse. În acest caz

$$\bar{b}=-\bar{a},$$

sau

$$\bar{a}=-\bar{b},$$

ceea ce dă totodată şi regula pe baza căreia se poate trece un termen dintr-o parte în cealaltă a unei egalităţi.

Dacă avem n vectori $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ $(n>2)$, cu coordonatele a_{ix}, a_{iy}, a_{iz} $(i=1, 2, \ldots, n)$, atunci vom defini suma lor ca fiind vectorul

$$\bar{c}=\bar{a}_1+\bar{a}_2+ \ldots +\bar{a}_n \tag{1.17}$$

cu proiecţiile

$$c_x=\sum_{i=1}^{n} a_{ix}, \quad c_y=\sum_{i=1}^{n} a_{iy}, \quad c_z=\sum_{i=1}^{n} a_{iz} \tag{1.18}$$

pe cele trei axe. Se verifică imediat că:

1. Operaţia este asociativă, adică putem înlocui o parte din vectori prin suma lor (sumă parţială), fără ca suma totală să se schimbe, ori cum am grupa sumele parţiale. În particular, $(\bar{a}_1+\bar{a}_2)+\bar{a}_3=\bar{a}_1+(\bar{a}_2+\bar{a}_3)$.

2. $\bar{c}$ poate fi reprezentat geometric prin segmentul dirijat $\overline{OA}_n$ care închide conturul poligonal format din vectorii puşi cap la cap într-o ordine oarecare, începînd din punctul O şi sfîrşind în A_n. În particular, condiţia necesară şi suficientă ca o sumă (1.17) de vectori să fie nulă este ca linia lor poligonală să fie închisă $(O\equiv A_n)$.

O b s e r v a ţ i i. 1°. Adunarea vectorilor se mai numeşte şi *compunerea lor*, suma lor se mai numeşte şi *rezultantă*, $\bar{a}_i$ fiind consideraţi ca vectori şi purtînd numele de *componente*.

2°. Orice vector $\bar{a}$ poate fi considerat ca suma componentelor sale de pe axele de coordonate

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k} ,$$

expresia hipercomplexă a vectorului obţinînd astfel un sens operaţional cu ajutorul adunării.

3°. Dacă adăugăm vectorul $-\bar{b}$ de ambele părţi ale unei identităţi

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c},$$

obţinem

$$\bar{a}=\bar{c}-\bar{b},$$

deoarece $\bar{a}+\bar{b}-\bar{b}$, în virtutea asociativităţii, este egal cu $\bar{a}$. Această observaţie ne dă regula pe baza căreia se poate trece un termen dintr-un membru în celălalt.

4°. Proiecţia sumei unor vectori pe o dreaptă D sau pe un plan P este egală cu suma proiecţiilor acelor vectori pe D, respectiv pe P. Rezultă că dacă suma vectorilor este nulă, atunci şi suma proiecţiilor va fi nulă. Reciproca nu este întotdeauna adevărată.

5°. Din proprietăţile adunării deducem că vectorii alcătuiesc un *grup aditiv abelian* sau un *modul*, faţă de operaţia adunării, deoarece adunarea este comutativă, asociativă, vectorul zero lasă neschimbat orice vector şi oricărui vector $\bar{a}$ îi corespunde vectorul invers $-\bar{a}$.

§ 6. **Înmulțirea. Produse. Produsul unui scalar cu un vector.** Să considerăm un scalar m și un vector $\bar{a}$. Prin definiție, vectorul $\bar{c}$ avînd proiecțiile

$$c_x = ma_x, \quad c_y = ma_y, \quad c_z = ma_z \tag{1.19}$$

este produsul dintre m și $\bar{a}$ și-l vom însemna cu $m\bar{a}$. Operația corespunzătoare o vom numi *înmulțire, multiplicare* sau *amplificare*, m și $\bar{a}$ fiind *factorii înmulțirii*.

De altfel, se vede imediat că c_x, c_y, c_z reprezintă un vector, deoarece aceste mărimi satisfac relațiile (1.10).

Din felul cum se determină proiecțiile c_x, c_y, c_z se vede că vectorul $\bar{c}$ are aceeași direcție cu $\bar{a}$, are mărimea absolută $|m\bar{a}|$ și sensul același sau contrar cu al lui $\bar{a}$, după cum m este pozitiv sau negativ.

Așadar, vectorul $\bar{c}$ fiind susceptibil de a fi reprezentat printr-un segment dirijat, independent de axele de coordonate, operația care i-a dat naștere are o existență *intrinsecă*.

Vom defini produsul $\bar{a}m$ ca fiind egal cu $m\bar{a}$.

Ca urmare a acestei definiții, putem spune că produsul $m\bar{a}$ este comutativ.

Din definiția produsului se deduc identitățile

$$\left.\begin{aligned} (m+n)\bar{a} &= m\bar{a}+n\bar{a}, \\ m(\bar{a}+\bar{b}) &= m\bar{a}+m\bar{b}, \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

n fiind un scalar și $\bar{b}$ un vector. Aceste identități arată că produsul este *distributiv* relativ la ambii factori.

Deducem, de asemenea,

$$m(n\bar{a}) = n(m\bar{a}) = (nm)\bar{a},$$

adică produsul este și *asociativ*.

În fine, dacă unul dintre factorii produsului $m\bar{a}$ este nul sau dacă ambii factori sînt nuli, produsul este nul și invers, pentru ca produsul $m\bar{a}$ să fie nul trebuie ca cel puțin unul dintre factori să fie nul.

O b s e r v a ț i i. 1°. Vectorul $\bar{a}$ se mai poate scrie

$$\bar{a} = a\bar{\rho}$$

dacă însemnăm cu $\bar{\rho}$ versorul suportului lui $\bar{a}$ și cu a scalarul reprezentînd proiecția vectorului $\bar{a}$ pe axa $\bar{\rho}$, adică valoarea scalară a vectorului $\bar{a}$ pentru versorul $\bar{\rho}$.

Simbolul $a_x\bar{i}$ capătă astfel un înțeles operațional ca și expresia hipercomplexă

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

2°. Dacă vectorul $\bar{a}$ degenerează într-un scalar, atunci produsul $m\bar{a}$ devine un produs obișnuit dintre doi scalari. Din acest punct de vedere

se poate spune că produsul dintre un scalar şi un vector generalizează noţiunea obişnuită de produs din algebra scalarilor.

§ 7. Produsul scalar sau produsul interior a doi vectori. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ doi vectori. Vom numi *produs scalar al celor doi vectori* mărimea scalară $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, scriind

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.21}$$

Operaţia se cheamă *înmulţire* sau *multiplicare scalară*, iar vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt *factorii înmulţirii*.

Este uşor de verificat că expresia (1.21) a produsului $\bar{a}\bar{b}$ rămîne neschimbată faţă de transformarea (1.10) adică însemnînd cu $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, şi $b_{x'}$, $b_{y'}$, $b_{z'}$ proiecţiile vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ faţă de axele $Ox'y'z'$, avem

$$a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Produsul scalar este, aşadar, un *invariant* al grupului de transformări format prin schimbarea axelor de coordonate. Această proprietate era de altfel necesară, după cele ce am stabilit la § 1, pentru ca produsul scalar definit prin formula (1.21) să aibă un sens.

Din definiţia (1.21) a produsului scalar a doi vectori putem deduce următoarele proprietăţi:

1. Produsul scalar este o operaţie *comutativă*,

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}.$$

2. Produsul scalar este o operaţie *distributivă*,

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c},$$

ceea ce se vede imediat dacă se observă că $\bar{a}\bar{b}$ este o funcţie liniară şi omogenă, atît în raport cu proiecţiile vectorului $\bar{a}$ cît şi în raport cu acelea ale vectorului $\bar{b}$.

Expresia geometrică a produsului scalar. Notînd cu $(\widehat{\bar{v}, \bar{i}})$, $(\widehat{\bar{v}, \bar{j}})$, $(\widehat{\bar{v}, \bar{k}})$ unghiurile formate de vectorul $\bar{v}$ cu axele Ox, Oy, Oz şi observînd că

$$v_x = v \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{i}}), \quad v_y = v \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{j}}), \quad v_z = v \cos(\widehat{\bar{v}, \bar{k}}),$$

formula (1.21) se mai poate scrie

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}), \tag{1.22}$$

dacă ţinem seama de formula cunoscută

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{i}}) \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{i}}) + \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{j}}) \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{j}}) + \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{k}}) \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{k}}) = \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

şi deci notăm cu $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ unghiul format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Formula (1.22) ne dă pentru produsul scalar o expresie care este, evident, independentă

de axele de coordonate — încă o verificare a proprietății că produsul scalar este un *invariant* al grupului format de schimbările axelor de coordonate și că deci operația care-i dă naștere are o existență *intrinsecă*.

Din formula (1.22) mai deducem următoarele proprietăți ale produsului scalar:

3 a) *Produsul scalar dintre doi vectori diferiți de zero este nul cînd cei doi vectori sînt perpendiculari*. Se spune în algebră că factorii unui astfel de produs sînt *divizori ai lui zero*.

3 b) *De asemenea, avem următoarele identități, privind cazul în care unul dintre factori este zero sau ambii factori sînt zero*:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0, \quad \text{precum și } 0\cdot 0=0.$$

4. *Produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$ poate fi un scalar pozitiv sau negativ, după cum unghiul dintre cei doi vectori este mai mic sau mai mare decît $\pi/2$.*

5. *Produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$ a doi vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este egal cu valoarea absolută a unuia dintre ei înmulțită cu proiecția celuilalt pe acesta*

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,\text{pr}_{\bar{a}}\,\bar{b}=|\bar{b}|\,\text{pr}_{\bar{b}}\,\bar{a}.$$

De aici deducem că produsul scalar al unui vector $\bar{a}$ cu un versor este egal cu proiecția vectorului pe versor; de exemplu

$$a_x=\bar{a}\bar{i},\quad a_y=\bar{a}\bar{j},\quad a_z=\bar{a}\bar{k}.$$

Tot de aici se deduce că, înlocuind în produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$ unul dintre factori, de exemplu pe $\bar{a}$, prin proiecția sa pe un plan oarecare trecînd prin $\bar{b}$, valoarea produsului nu se schimbă.

6. *Produsul scalar al unui vector prin el însuși este egal cu pătratul valorii sale absolute*. Se poate scrie deci

$$\bar{a}\bar{a}=(\bar{a})^2=|\bar{a}|^2=a^2.$$

7. *Cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ se pot forma următoarele produse scalare*

$$\bar{i}\bar{i}=1,\quad \bar{j}\bar{j}=1,\quad \bar{k}\bar{k}=1,\quad \bar{j}\bar{k}=\bar{k}\bar{j}=0,\quad \bar{k}\bar{i}=\bar{i}\bar{k}=0,\quad \bar{i}\bar{j}=\bar{j}\bar{i}=0. \qquad (1.23)$$

Cu ajutorul acestor formule și bazîndu-ne pe proprietatea de distribuitivitate a produsului scalar, putem efectua produsul scalar dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$, aplicînd regulile alegebrei scalarilor asupra operației

$$\bar{a}\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}).$$

Obținem astfel,

$$\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

ceea ce constituie o verificare a proprietăților produsului scalar.

Observații. 1°. Produsul scalar al vectorului $a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$ prin $\bar{b}$ se obține înlocuind în expresia lui $\bar{a}$ pe $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ respectiv prin b_x, b_y, b_z.

2°. Dacă m este un scalar, atunci

$$(m\bar{a})\bar{b}=\bar{a}(m\bar{b})=m(\bar{a}\bar{b}).$$

În special, pentru $m=-1$ avem

$$(-\bar{a})\bar{b}=\bar{a}(-\bar{b})=-(\bar{a}\bar{b}).$$

3°. Dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ au ambii o aceeaşi direcţie, atunci ei pot fi priviţi ca nişte scalari, iar produsul lor scalar devine un produs obişnuit dintre scalari. Din acest punct de vedere, se poate spune că şi produsul scalar, ca şi produsul dintre un scalar şi un vector, poate fi privit ca o *generalizare a produsului din algebra scalarilor*.

4°. Relaţiile (1.23) ne arată că produsul scalar nu ne permite să privim vectorul $\bar{v}=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k}$ oarecare ca fiind un număr hipercomplex în *înţelesul obişnuit din Algebră*, deoarece produsul scalar a doi vectori nu mai este un vector.

A p l i c a ţ i i. 1°. Se dau vectorii $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=2\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$. Să se calculeze produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$.

Avem

$$\bar{a}\bar{b}=2+6-8=0.$$

Observăm că vectorii sînt perpendiculari.

2°. Să se simplifice expresia

$$E=(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{c})+(\bar{b}-\bar{c})(\bar{b}-\bar{a})+(\bar{c}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{b}).$$

Se desfac parantezele, se reduc termenii asemenea şi se obţine

$$E=a^2+b^2+c^2-(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}).$$

§ 8. Produsul vectorial sau produsul exterior a doi vectori. Se defineşte *produsul vectorial* al vectorului $\bar{a}$ prin vectorul $\bar{b}$ ca fiind un al treilea vector $\bar{c}$, ale cărui proiecţii sînt date de expresiile

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y,\ c_y=a_zb_x-a_xb_z,\ c_z=a_xb_y-a_yb_x. \tag{1.24}$$

Operaţia se numeşte *înmulţire* sau *multiplicare vectorială* şi se notează prin

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}. \tag{1.25}$$

Vectorul $\bar{c}$ se numeşte *produsul vectorial* sau *exterior* al vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, aceştia fiind *factorii produsului*.

Pentru ca definiţia produsului vectorial să aibă un sens, va trebui ca numerele c_x, c_y, c_z, date de formulele (1.24), să fie susceptibile de a reprezenta un vector. Proprietatea aceasta a lor se poate arăta cu ajutorul formulelor (1.10) aplicate expresiilor $a_yb_z-a_zb_y$, $a_zb_x-a_xb_z$, $a_xb_y-a_yb_x$. Servindu-ne de relaţiile (1.11) dintre α_i, β_i, γ_i şi făcînd un calcul simplu vom găsi că între expresiile

$$a_{y'}b_{z'}-a_{z'}b_{y'},\quad a_{z'}b_{x'}-a_{x'}b_{z'},\quad a_{x'}b_{y'}-a_{y'}b_{x'}$$

şi expresiile (1.24) există relaţiile de transformare (1.10). Am însemnat cu $a_{x'}, a_{y'}, \ldots, b_{z'}$ ceea ce devin cantităţile $a_x, a_y, \ldots, b_z$ prin transformările (1.10).

Se constată din formulele (1.10) că proiecţiile c_x, c_y, c_z ale vectorului $\bar{c}$ sînt determinanţii minori de ordinul al doilea ai matricii

$$\begin{Vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{Vmatrix}.$$

Punînd vectorul $\bar{c}$ sub forma

$$\bar{c}=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\bar{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x), \tag{1.26}$$

observăm că el poate fi considerat egal cu determinantul

$$\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{1.27}$$

dezvoltat după elementele primei linii.

Produsul vectorial a doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ fiind un vector $\bar{c}$, rezultă că la o schimbare (1.9) a axelor de coordonate, vectorul $\bar{c}$ nu-şi schimbă nici lungimea nici poziţia faţă de figura geometrică alcătuită de vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$. Această observaţie ne dă dreptul să luăm un sistem particular de axe, astfel ca expresia vectorului $\bar{c}$ prin proiecţiile sale să apară mai simplă şi, deci, calculul elementelor geometrice ale vectorului să fie sensibil uşurat. Vom lua suportul vectorului $\bar{a}$ drept axă Ox şi anume, astfel încît vectorul $\bar{b}$ să fie situat în planul xOy în partea $y>0$ a planului; axa Ox va fi astfel univoc determinată. Faţă de aceste axe vom avea

$$a_y=a_z=b_z=0, \quad a_x>0, \quad b_y>0.$$

Formulele (1.24) ne vor da

$$c_x=0, \quad c_y=0, \quad c_z=a_xb_y>0.$$

Rezultă că vectorul $\bar{c}$ este dirijat în sensul pozitiv al axei Oz. Observînd relaţiile evidente

$$a_x=|\bar{a}|, \quad b_y=|\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}),$$

pentru valoarea $|\bar{c}|=c_z$ a vectorului $\bar{c}$, vom obţine

$$|\bar{c}|=|\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}). \tag{1.28}$$

Deducem următoarea regulă *intrinsecă* pentru determinarea produsului vectorial $\bar{c}$ dintre vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$:

Produsul vectorial $\bar{c}$ dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este un vector de modul $|\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, normal pe ambii factori şi dirijat astfel, încît triedrul $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

să fie drept, adică rotația vectorului $\bar{a}$ în planul $(\bar{a}, \bar{b})$ cu un unghi egal cel mult cu π pentru a-l suprapune peste $\bar{b}$, să coincidă ca sens cu sensul pozitiv de rotație în jurul axei $\bar{c}$ (sensul drept).

Formula (1.28) este susceptibilă de o interpretare geometrică de care ne vom folosi adesea: *valoarea absolută a produsului vectorial $\bar{c}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, sau cu dublul ariei triunghiului construit cu cei doi vectori.*

P r o p r i e t ă ț i . Din relațiile (1.24) se deduc identitățile

$$\bar{a}\times(-\bar{b})=(-\bar{a})\times\bar{b}=-(\bar{a}\times\bar{b}),$$

sau, mai general,

$$\bar{a}\times(m\bar{b})=(m\bar{a})\times\bar{b}=m(\bar{a}\times\bar{b}),$$

m fiind un scalar oarecare.

Apoi

$$\bar{a}\times\bar{b}=-(\bar{b}\times\bar{a}).$$

Așadar, produsul vectorial nu este comutativ; el își schimbă semnul cînd schimbăm ordinea factorilor. Din cauza aceasta se zice că produsul vectorial este anticomutativ.

Dacă cei doi factori au aceeași direcție, atunci din (1.27) *deducem că produsul vectorial este nul.* De altfel, *condiția necesară ca un produs vectorial a doi vectori* ($\neq 0$) *să fie nul,* este *ca ei să aibă aceeași direcție.* În particular, avem

$$\bar{a}\times\bar{a}=0.$$

În limbaj algebric se spune că produsul vectorial permite existența *unor divizori ai lui zero.*

Vom observa și identitățile

$$\bar{a}\times 0=0\times\bar{a}=0, \quad 0\times 0=0.$$

Cu versorii axelor vom putea forma produsele

$$\begin{gathered}\bar{i}\times\bar{i}=0, \quad \bar{j}\times\bar{j}=0, \quad \bar{k}\times\bar{k}=0,\\ \bar{j}\times\bar{k}=-\bar{k}\times\bar{j}=\bar{i}, \quad \bar{k}\times\bar{i}=-\bar{i}\times\bar{k}=\bar{j}, \quad \bar{i}\times\bar{j}=-\bar{j}\times\bar{i}=\bar{k}.\end{gathered} \tag{1.29}$$

Deoarece proiecțiile produsului vectorial sînt funcții liniare, omogene față de proiecțiile factorilor, rezultă că operația este *distributivă*

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}.$$

Cu ajutorul acestei proprietăți și a relațiilor (1.24) putem dezvolta produsul vectorial dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$, pus sub forma

$$(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}),$$

pentru a obține expresia (1.26) ca o verificare a proprietăților găsite.

O b s e r v a ț i e . Relațiile (1.29) ne dau produsul versorilor între ei doi cîte doi, sub forma pe care o întîlnim la numerele hipercomplexe

din Algebră. Am văzut că vectorul nu poate fi privit ca un număr hipercomplex faţă de operaţia produsului scalar, deoarece acesta schimbă *tipul* factorilor: din doi *vectori* se obţine un *scalar*. Produsul vectorial menţine tipul factorilor, adică din doi vectori se obţine tot un vector prin produsul vectorial. Însă nici acest produs nu îngăduie identificarea vectorului cu un număr hipercomplex, aşa cum este el definit în Algebră, deoarece produsul vectorial nu este *asociativ*. Într-adevăr, avem de pildă

$$\bar{i}\times(\bar{i}\times\bar{j})=\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j},$$
$$(\bar{i}\times\bar{i})\times\bar{j}=0.$$

Această constatare nu ne va împiedica totuşi de a dezvolta consecvent o Algebră a vectorilor bazată atît pe produsul scalar a doi vectori cît şi pe produsul vectorial. Ea nu va fi, desigur, o Algebră de *numere hipercomplexe*, însă va putea întrebuinţa cu folos expresia hipercomplexă a vectorului.

Expresia unui vector $\bar{a}$ *cu ajutorul unui vector normal* $\bar{b}$. Ca aplicaţii ne propunem să arătăm că dacă doi vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$ sînt ortogonali, atunci se poate determina un al treilea vector, $\bar{c}$, astfel încît să avem

$$\bar{a}=\bar{b}\times\bar{c}.$$

Vom arăta mai întîi că dacă am determinat un astfel de vector $\bar{c}$ vom putea găsi o infinitate. Într-adevăr, fie $\bar{c}_0$ vectorul care satisface relaţia precedentă. Atunci soluţia generală $\bar{c}$ va fi dată de ecuaţia

$$\bar{b}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}_0$$

sau încă

$$\bar{b}\times(\bar{c}-\bar{c}_0)=0,$$

relaţie satisfăcută dacă vectorul $\bar{c}-\bar{c}_0$ are direcţia lui $\bar{b}$, adică dacă

$$\bar{c}=\bar{c}_0+\lambda\bar{b},$$

λ fiind un scalar arbitrar. Am demonstrat astfel că dacă putem determina un vector $\bar{c}_0$ putem determina o infinitate de vectori care să satisfacă relaţia $\bar{a}=\bar{b}\times\bar{c}$.

Pentru a găsi valoarea particulară c_0 nu avem decît să luăm un vector $\bar{c}_0$ normal atît pe $\bar{a}$ cît şi pe $\bar{b}$, aşa fel ca triedrul $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să fie drept, valoarea absolută a lui $\bar{c}_0$ fiind egală cu $\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$. Se verifică imediat că $\bar{c}_0$ corespunde condiţiei

$$\bar{a}=\bar{b}\times\bar{c}_0.$$

Aplicaţii. 3°. Se dau vectorii

$$\bar{a}=\bar{i}-5\bar{j}+9\bar{k},\quad \bar{b}=-15\,\bar{i}+25\,\bar{j}+30\,\bar{k},\quad \bar{c}=8\,\bar{i}-20\,\bar{j}+6\,\bar{k}.$$

Să se calculeze produsele vectoriale $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$ şi să se arate că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ se găsesc în acelaşi plan.

Avem

$$\bar{v}_1=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -5 & 9 \\ -15 & 25 & 30 \end{vmatrix}=-375\,\bar{i}-165\,\bar{j}-50\,\bar{k}.$$

Analog obţinem

$$\bar{v}_2=\bar{b}\times\bar{c}=750\,\bar{i}+330\,\bar{j}+100\,\bar{k},$$

$$\bar{v}_3=\bar{c}\times\bar{a}=-150\,\bar{i}-66\,\bar{j}-20\,\bar{k}.$$

Se observă că

$$\frac{\bar{v}_1}{5}=-\frac{\bar{v}_2}{10}=\frac{\bar{v}_3}{2}$$

şi deci vectorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ şi $\bar{v}_3$ sînt paraleli, iar $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari.

4°. Să se simplifice expresia

$$\bar{E}=(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+\bar{c})+(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{b}+\bar{a})+(\bar{c}+\bar{a})\times(\bar{c}+\bar{b}).$$

Se desfac parantezele şi se obţine

$$\bar{E}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}.$$

§ 9. **Produs mixt.** Expresia

$$\bar{a}\,(\bar{b}\times\bar{c})$$

reprezintă produsul scalar dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}\times\bar{c}$. Este evident un scalar şi se numeşrte *produs mixt* al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Dacă proiecţiile vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt respectiv

$$a_x,\ a_y,\ a_z,\ b_x,\ b_y,\ b_z,\ c_x,\ c_y,\ c_z,$$

atunci, potrivit formulei (1.26),

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

şi produsul scalar $\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$ se va putea scrie:

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$

Sub această formă se vede imediat că, ţinînd seama de proprietăţile elementare ale determinaţiilor, putem interverti ordinea operaţiilor de înmulţire scalară şi vectorială fără ca valoarea produsului mixt să se schimbe adică avem identitatea

$$(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c}). \tag{1.31}$$

Vom însemna produsul acesta mixt cu $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ sau simplu $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$. Este evident că prin această notaţie nu se produce nici o ambiguitate graţie identităţii (1.31). Mai mult, cele trei probleme mixte, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b})$, $(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$, obţinute prin permutări circulare, sînt egale între ele. Pe de altă parte, avem $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$, încît se vede că cele şase produse mixte ce se pot forma cu trei vectori $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ au toate aceeaşi valoare absolută, trei fiind de un semn şi celelalte trei de semn contrar.

Relaţia (1.30) conduce la o interpretare geometrică interesantă şi anume: *valoarea absolută a produsului mixt este egală cu de şase ori volumul tetraedrului construit pe cei trei vectori ca muchii, sau cu volumul paralelipipedului construit pe aceeaşi vectori* (fig. 1.12), de unde vine şi explicaţia egalităţii celor trei produse.

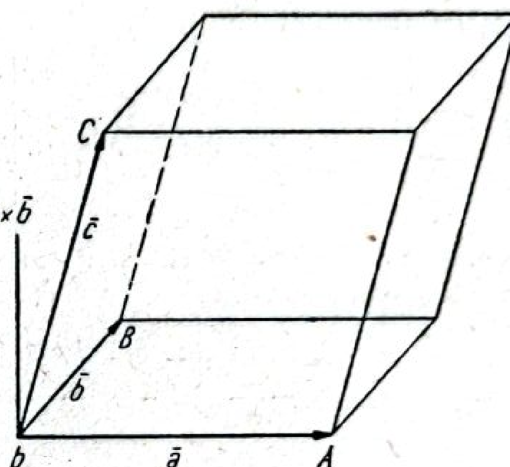


Fig. 1.12

O b s e r v a ţ i i. 1°. Dacă versorul vectorului $\bar{a}\times\bar{b}$ face un unghi ascuţit $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ cu $\bar{i}$, atunci produsul mixt $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este evident pozitiv. În acest caz, se zice că vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ formează, în această ordine, un sistem *drept*. În ordinea $\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$ ei vor forma un sistem *stîng*. Aşadar, cu vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ se pot forma trei sisteme drepte şi trei stîngi.

2°. Dacă cei trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}(\neq 0)$ sînt *coplanari, adică paraleli cu un plan, atunci produsul lor mixt este nul.*

Într-adevăr, se vede că produsul $\bar{b}\times\bar{c}$ fiind normal pe planul vectorilor $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, va fi normal şi pe vectorul $\bar{a}$. Dacă, în particular, doi dintre cei trei vectori sînt *coliniari* (adică au aceeaşi direcţie), *atunci produsul lor mixt este nul.* Reciproc, dacă produsul mixt $(\bar{a}, \bar{b}, c)$ este nul, vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt coplanari. Mai întîi cazul cînd unul din vectori este nul verifică, evident, proprietatea. Dacă nici unul nu este nul, însă dacă toţi trei sînt coliniari, adică au aceeaşi direcţie, proprietatea este iarăşi verificată. În fine, dacă $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ nu au aceeaşi direcţie, produsul $\bar{b}\times\bar{c}$ este diferit de zero. Pentru ca produsul său scalar prin $\bar{a}$ să fie nul, trebuie ca $\bar{a}$ să fie normal pe $\bar{b}\times\bar{c}$, adică să fie paralel cu planul $(\bar{b}, \bar{c})$.

Putem deci enunţa următoarea proprietate:

Condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ să fie coplanari este ca produsul lor mixt să fie nul.

Ţinînd seama de expresia (1.30) a produsului mixt, condiţia necesară şi suficientă ca trei vectori să fie coplanari se poate pune sub forma

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \tag{1.32}$$

3°. Folosind regula obişnuită de ridicare la pătrat a unui determinant, deducem din (1.30) formula

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})^2 = \begin{vmatrix} \bar{a}\bar{a} & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{b}\bar{a} & \bar{b}\bar{b} & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{c}\bar{a} & \bar{c}\bar{b} & \bar{c}\bar{c} \end{vmatrix}. \tag{1.33}$$

Determinantul din membrul al doilea este cunoscut sub numele de *determinantul lui Gramm.*

Aplicaţie. 5°. Să se calculeze produsul mixt $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ pentru

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}, \quad \bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Avem

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultatul se explică prin faptul că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari. Într-adevăr,

$$\bar{c} = -\bar{a} + 2\bar{b}.$$

§ 10. Produs dublu. Produsul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ format cu trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ trebuie înţeles în felul următor: se face mai întîi produsul vectorial $\bar{b} \times \bar{c}$ şi apoi produsul vectorial al acestuia prin $\bar{a}$. Operaţia se numeşte *produs dublu vectorial* sau numai *produs dublu*. Formula care se foloseşte de obicei pentru expresia acestui produs este

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}), \tag{1.34}$$

numită „formula produsului dublu". Ea arată că acest produs este *un vector situat în planul vectorilor* $\bar{b}$, $\bar{c}$, ceea ce era evident şi fără această formulă, deoarece vectorul $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ fiind normal pe vectorul $\bar{b} \times \bar{c}$, adică pe normala planului format de $\bar{b}$ şi $\bar{c}$, se va găsi în planul vectorilor $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Demonstraţia formulei se poate face efectuînd proiecţiile ei pe cele trei axe de coordonate şi constatînd că astfel se obţin trei identităţi. Pe axa Ox, expresia din stînga va avea proiecţia

$$a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z),$$

iar cea din dreapta

$$b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$

Cele două expresii sînt, evident, identice. Cum axa Ox nu are o poziție specială față de vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, rezultă că și proiecțiile pe celelalte două axe (pe Oy și Oz) conduc la identități. Formula este demonstrată.

O b s e r v a ț i i. 1°. Produsul $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ este egal cu $-\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})$, deci poate fi calculat după regula obișnuită

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=-\bar{a}(\bar{b}\bar{c})+\bar{b}(\bar{a}\bar{c}).$$

Este evident că, în genere, produsul $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ va fi diferit de $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$, adică produsul vectorial nu este *asociativ*.

2°. Formula (1.34) a produsului dublu ne dă identitatea

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=0. \tag{1.35}$$

3°. Cu ajutorul formulelor (1.31) și (1.34) se pot deduce, fără nici o dificultate, formulele

$$\left.\begin{aligned}(\bar{a}\times\bar{b})\,(\bar{c}\times\bar{d})&=\bar{a}[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})]=(\bar{a}\bar{c})\,(\bar{b}\bar{d})-(\bar{a}\bar{d})\,(\bar{b}\bar{c})\\(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})&=(\bar{d}\bar{a}\bar{c})\bar{b}-(\bar{d}\bar{b}\bar{c})\bar{a}=(\bar{d}\bar{a}\bar{b})\bar{c}-(\bar{c}\bar{a}\bar{b})\bar{d}.\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

Din ultima identitate se deduce

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d}=(\bar{d}\bar{b}\bar{c})\bar{a}+(\bar{d}\bar{c}\bar{a})\bar{b}+(\bar{d}\bar{a}\bar{b})\bar{c}. \tag{1.37}$$

A p l i c a ț i e . 6°. Se dau vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ orientați respectiv după muchiile VA, VB, VC ale unui tetraedru regulat $VABC$ avînd muchia egală cu l. Să se arate că dublul produs vectorial $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ este un vector paralel cu BC.

Să notăm $\bar{a}=\lambda_1\overline{VA}$, $\bar{b}=\lambda_2\overline{VB}$, $\bar{c}=\lambda_3\overline{VC}$. Avem

$$\bar{d}=\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\bar{b})\bar{c}=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2}\,l^2\,\overline{VB}-\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2}\,l^2\,\overline{VC},$$

deci

$$\bar{d}=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 l^3}{2}\,(\overline{VB}-\overline{VC})=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 l^3}{2}\,\overline{CB}.$$

Rezultă că vectorii $\bar{d}$ și $\overline{CB}$ sînt paraleli, iar

$$|\bar{d}\,|=\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3 l^3}{2}=\frac{abc}{2}.$$

§ 11. Descompunerea unui vector după direcții date. Adunarea vectorilor $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ este tot una cu compunerea lor într-o rezultantă. Operația compunerii a n vectori $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ într-o rezultantă $\bar{c}$ este totdeauna posibilă și numai într-un singur fel.

Să considerăm acum operația inversă. Ni se dă vectorul $\bar{c}$ și se cere să se determine vectorii $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ a căror sumă să fie $\bar{c}$. Această problemă prezintă, în general, un mare grad de nedeterminare. Pentru a limita nede-

terminarea, vom presupune că *direcţiile componentelor* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ *sînt date*. Se cere, deci, să se *descompună vectorul* $\bar{c}$ *în* n *componente după direcţiile date.*

Fie $\bar{u}_i$ versorul vectorului $\bar{a}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Însemnînd cu a_i valoarea scalară a vectorului $\bar{a}_i$, putem scrie

$$\bar{a}_i = a_i \bar{u}_i.$$

Problema descompunerii vectorului $\bar{c}$ în componente după direcţiile date $\bar{u}_i$ se reduce la rezolvarea ecuaţiei

$$\bar{c} = a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + \ldots + a_n\bar{u}_n,$$

în care scalarii a_i trebuie consideraţi necunoscuţi, iar vectorii $\bar{c}$, $\bar{u}_i$ cunoscuţi.

Proiectînd ecuaţia pe cele trei axe de coordonate, obţinem

$$c_x = a_1u_{1x} + a_2u_{2x} + \cdots + a_nu_{nx},$$
$$c_y = a_1u_{1y} + a_2u_{2y} + \cdots + a_nu_{ny},$$
$$c_z = a_1u_{1z} + a_2u_{2z} + \cdots + a_nu_{nz},$$

unde am însemnat cu u_{ix}, u_{iy}, u_{iz} proiecţiile vectorului $\bar{u}_i$ pe axe. Avem astfel un sistem de trei ecuaţii liniare cu n necunoscute scalare $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Cazul $n=1$. Ecuaţiile precedente se reduc la

$$c_x = a_1u_{1x}, \qquad c_y = a_1u_{1y}, \qquad c_z = a_1u_{1z},$$

de unde se vede că problema nu este posibilă decît cu condiţia ca

$$\frac{c_x}{u_{1x}} = \frac{c_y}{u_{1y}} = \frac{c_z}{u_{1z}},$$

care e tot una cu condiţia ca vectorii $\bar{c}$ şi $\bar{u}_1$ să fie coliniari. Dacă această condiţie este îndeplinită, atunci problema are o soluţie unică, anume

$$a_1 = \frac{c_x}{u_{1x}}.$$

Se vede geometric că vectorul $\bar{a}$ trebuie să fie egal cu $\bar{c}$.

Cazul $n=2$. Ecuaţiile în a_i devin

$$c_x = a_1u_{1x} + a_2u_{2x}, \quad c_y = a_1u_{1y} + a_2u_{2y}, \quad c_z = a_1u_{1z} + a_2u_{2z}.$$

Sistemul de trei ecuaţii cu două necunoscute nu are soluţie decît dacă

$$\begin{vmatrix} c_x & u_{1x} & u_{2x} \\ c_y & u_{1y} & u_{2y} \\ c_z & u_{1z} & u_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Presupunînd că cel puţin unul dintre cei trei determinanţi de ordinul al doilea formaţi cu coeficienţii necunoscutelor este diferit de zero, vom putea determina necunoscutele a_1, a_2, folosind cele două ecuaţii correspun-

zătoare determinantului diferit de zero. Dacă însă această a doua condiţie nu este îndeplinită, adică dacă toţi cei trei determinanţi de ordinul al doilea sînt nuli, atunci vectorii sînt coliniari, iar problema se reduce la cazul $n=1$ studiat anterior.

Geometric problema descompunerii vectorului $\bar{c}$ în două componente $\bar{a}_1$ şi $\bar{a}_2$ revine la a construi un paralelogram căruia i se cunosc diagonala şi direcţiile laturilor.

Cazul $n=3$. Pentru $n=3$ relaţiile în a_i vor fi

$$c_x=a_1u_{1x}+a_2u_{2x}+a_3u_{3x},$$

$$c_y=a_1u_{1y}+a_2u_{2y}+a_3u_{3y},$$

$$c_z=a_1u_{1z}+a_2u_{2z}+a_3u_{3z}.$$

Presupunînd că este îndeplinită condiţia

$$\begin{vmatrix} u_{1x} & u_{2x} & u_{3x} \\ u_{1y} & u_{2y} & u_{3y} \\ u_{1z} & u_{2z} & u_{3z} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ecuaţiile considerate vor admite un sistem unic de soluţii a_1, a_2, a_3; cu alte cuvinte, *dacă vectorii* $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ *nu sînt coplanari, problema descompunerii vectorului* $\bar{c}$ *în trei componente are o singură soluţie*. Geometric, problema revine la a construi un paralelipiped căruia i se cunosc diagonala şi direcţiile laturilor.

Dacă determinantul de mai înainte este nul, adică dacă cei trei vectori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ sînt coplanari, atunci problema nu este posibilă decît dacă şi $\bar{c}$ este coplanar cu $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$. În acest caz, dacă am considera numai vectorii $\bar{u}_1, \bar{u}_2$, făcînd abstracţie de cel de-al treilea, $\bar{u}_3$, am da peste cazul $n=2$; prin urmare, vectorul $\bar{c}$ ar putea fi descompus, în general, într-un singur fel după direcţiile $\bar{u}_1, \bar{u}_2$; adăugînd la această soluţie şi un vector arbitrar din lungul lui $\bar{u}_3$ şi înlocuindu-l apoi prin componentele sale după direcţiile $\bar{u}_1, \bar{u}_2$, problema capătă o infinitate de soluţii. Dacă doi sau toţi trei vectorii $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_2$ sînt coliniari, problema revine la cazurile $n=2$ sau $n=1$.

Cazul $n>3$. După cum se ştie din teoria ecuaţiilor liniare, acest caz conduce la nedeterminare sau incompatibilitate. Dacă există cel puţin trei vectori $\bar{u}_i$ care să nu fie coplanari, avem nedeterminare; problema comportă ∞^{n-3} soluţii. În cazul contrar, toţi vectorii $\bar{u}_i$ ar fi coplanari, astfel încît (ca şi în cazul $n=2$) problema nu-i posibilă decît dacă şi $\bar{c}$ este coplanar cu vectorii $\bar{u}_i$, cînd avem, evident, iarăşi nedeterminare (∞^{n-2} soluţii). Pentru cazul cu totul special cînd vectorii $\bar{u}_i$ ar fi coliniari, problema nu ar fi posibilă decît dacă $\bar{c}$ are direcţia comună cu $\bar{u}_i$; rezultă o nedeterminare de ordinul $n-1$ (∞^{n-1} soluţii).

C. MOMENTE

§ 12. Momentul unui vector în raport cu un punct. Să considerăm un vector *legat* $\bar{a}$ cu originea în A şi un punct oarecare O. (fig. 1.13).

Produsul vectorial $\overline{OA}\times\bar{a}$ se numeşte *momentul vectorului* în raport cu punctul O şi se notează cu

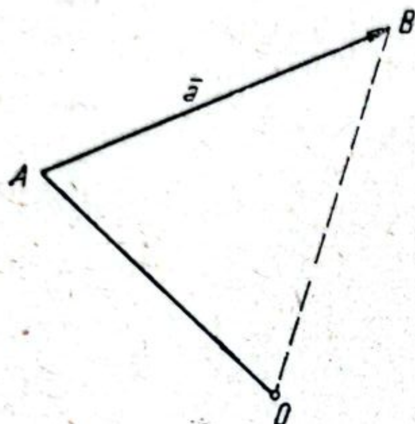


Fig. 1.13

$$\mathfrak{M}\bar{a}=\overline{OA}\times\bar{a}.$$

Vom privi simbolul $\mathfrak{M}$ ca un „operator" aplicat vectorului $\bar{a}$, aşa încît momentul vectorului $\bar{a}$ apare ca rezultatul operaţiei efectuate asupra lui $\bar{a}$.

Din formula care precede, se deduce că momentul vectorului $\bar{a}$ în raport cu O este un vector perpendicular pe planul OAB, dirijat astfel, încît rotaţia indicată de vectorul $\bar{a}$ faţă de O să se facă în sens pozitiv în jurul vectorului moment. Punctul O se numeşte *originea* sau *polul* momentului.

Din însăşi definiţia momentului deducem:

Condiţia necesară şi suficientă ca momentul unui vector în raport cu un punct să fie nul este ca polul momentului să se găsească pe suportul vectorului.

N o t a ţ i i. Vom nota în cele ce urmează cu $\mathfrak{M}$ „operatorul" moment. Cînd va fi necesar se va indica şi *polul* momentului printr-un indice; de exemplu $\mathfrak{M}_O$ înseamnă „momentul faţă de polul O". Vom folosi adeseori simbolul $\overline{\mathcal{M}}$ pentru a desemna „vectorul moment". De pildă $\overline{\mathcal{M}}=\mathfrak{M}\bar{a}$.

Reprezentarea geometrică a momentului. Momentul, fiind produsul vectorial dintre doi vectori, este egal în valoare absolută cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori sau cu dublul ariei triunghiului OAB construit cu ajutorul vectorului şi al originii O a momentului. Astfel, se deduce, pe altă cale, condiţia necesară şi suficientă enunţată mai înainte ca momentul să fie nul.

Ne vom ocupa acum de variaţia momentului:

a) cînd schimbăm punctul de aplicaţie al vectorului;

b) cînd schimbăm polul momentului.

a) *Schimbarea punctului de aplicaţie.* Dacă mutăm punctul de aplicaţie al vectorului $\bar{a}$, din A într-un punct oarecare A' (fig. 1.14) atunci momentul devine

$$\overline{OA'}\times\bar{a}=\overline{OA}\times\bar{a}+\overline{AA'}\times\bar{a}, \tag{1.38}$$

adică, însemnînd cu $\overline{\mathcal{M}}$ momentul vectorului $\bar{a}$ cu punctul de aplicaţie în A şi cu $\overline{\mathcal{M}}'$ momentul aceluiaşi vector avînd însă punctul de aplicaţie în A', vom avea

$$\overline{\mathcal{M}}'=\overline{\mathcal{M}}+\overline{AA'}\times\bar{a}. \tag{1.39}$$

Din această formulă deducem că prin mutarea punctului de aplicație al vectorului $\bar{a}$ din A în A', momentului $\overline{\mathcal{M}}$ față de O i se adaugă vectorul $\overline{AA'}\times\bar{a}$ care poate fi considerat ca momentul vectorului $\bar{a}$ cu punctul de aplicație în A' față de vechiul punct de aplicație A. Pentru ca momentul să nu se schimbe ($\overline{\mathcal{M}}'=\overline{\mathcal{M}}$,) trebuie să avem

$$\overline{AA'}\times\bar{a}=0,$$

adică trebuie ca A' să se afle pe suportul vectorului $\overline{AB}(=\bar{a})$. Deducem:

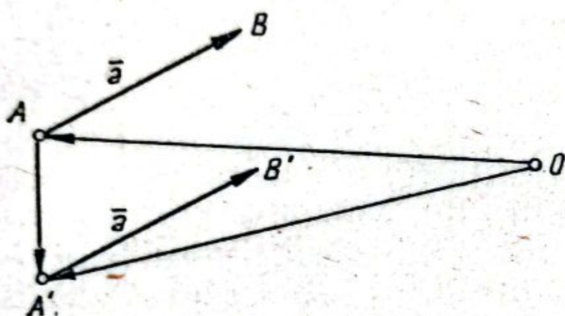


Fig. 1.14

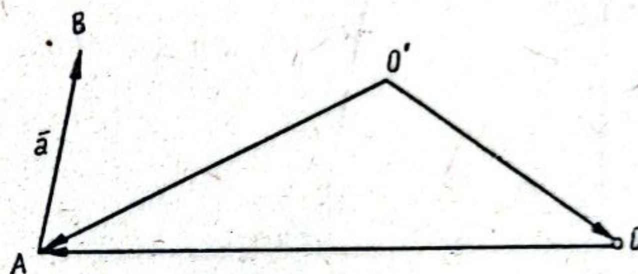


Fig. 1.15

Momentul unui vector $\overline{AB}$ $(=\bar{a})$ *se schimbă dacă-i mutăm punctul de aplicație din A în A', afară de cazul cînd A' s-ar afla pe suportul vectorului.*

În consecință, putem defini momentul unui vector alunecător ca fiind momentul vectorului luat într-o poziție oarecare a sa pe suport.

Așadar, operatorul „moment" are un înțeles bine determinat, atît pentru vectorul *legat* cît și pentru vectorul *alunecător*. Dimpotrivă, momentul unui vector liber nu are un înțeles determinat. De aceea nu vom considera decît momente de vectori legați și de vectori alunecători.

b) *Schimbarea originii momentului*. Dacă se mută acum polul momentului din O în O' (fig.1.15), avem

$$\mathfrak{M}_{O'}\bar{a}=\overline{O'A}\times\bar{a}=\overline{O'O}\times\bar{a}+\overline{OA}\times\bar{a}=\overline{O'O}\times\bar{a}+\mathfrak{M}_O\bar{a}, \tag{1.40}$$

adică momentul unui vector $\bar{a}$ *în raport cu un punct* O' *este egal cu momentul vectorului* $\bar{a}$ *în raport cu* O, *la care se adaugă momentul în raport cu* O' *al aceluiași vector* $\bar{a}$, *considerat însă cu originea în* O.

Pentru ca momentul să nu se schimbe, va trebui ca produsul $\overline{O'O}\times\bar{a}$ să fie nul. Lăsînd la o parte cazurile fără interes $\bar{a}=0$ și $\overline{O'O}=0$, deducem:

Pentru ca momentul să rămînă neschimbat, cînd se schimbă polul momentelor, este necesar și suficient ca polul O să se mute pe direcția vectorului $\bar{a}$.

A p l i c a ț i i . 7°. Expresia momentului în funcție de proiecțiile sale pe trei axe ortogonale se poate scrie imediat. Dacă O este originea axelor, $\bar{r}$ vectorul de poziție al punctului A de coordonate x, y, z și a_x, a_y, a_z proiecțiile vectorului $\bar{a}$, vom avea

$$\mathfrak{M}_O\bar{a}=\bar{r}\times\bar{a}=(ya_z-za_y)\bar{i}+(za_x-xa_z)\bar{j}+(xa_y-ya_x)\bar{k}. \tag{1.41}$$

8°. Dacă originea O a momentului nu coincide cu originea O_1 a axelor de coordonate (fig. 1.16), ci are coordonatele x_0, y_0, z_0, expresia momentului devine

$$\mathfrak{M}_O\bar{a}=\overline{OA}\times\bar{a}=[(y-y_0)a_z-(z-z_0)a_y]\bar{i}+[(z-z_0)a_x-(x-x_0)a_z]\bar{j}+$$
$$+[(x-x_0)a_y-(y-y_0)a_x]\bar{k}. \qquad (1.42)$$

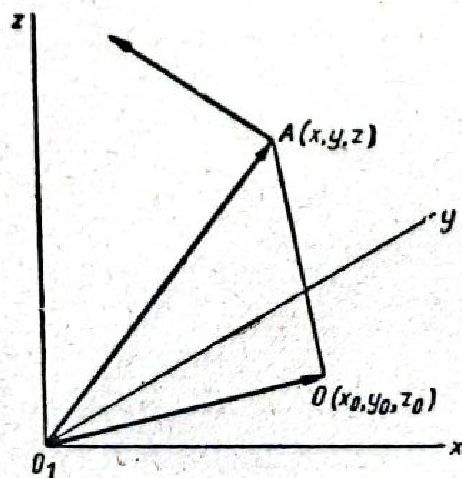


Fig. 1.16

Observaţii. 1°. *Momentele a doi vectori egali, de sens opus şi avînd acelaşi suport, sînt egale şi de sens opus.* Proprietatea rezultă imediat din definiţia momentului.

2°. *Momentul rezultantei mai multor vectori concurenţi este egal cu suma momentelor componentelor* (teorema lui *Varignon*). Proprietatea este o consecinţă a distributivităţii produsului vectorial.

§ 13. Momentul unui vector în raport cu o axă. Am văzut la § 12 că dacă se schimbă polul momentelor din O în O', avem relaţia (1.40)

$$\mathfrak{M}_{O'}\bar{a}=\mathfrak{M}_O\bar{a}+\overline{O'O}\times\bar{a}.$$

Să considerăm axa $\overline{O'O}(=\Delta)$ avînd sensul versorului $\bar{u}$ (fig. 1.17) şi să facem proiecţia egalităţii precedente pe această axă. Fiindcă produsul $\overline{O'O}\times\bar{a}$ este normal pe axă, vom avea

$$\text{pr}_\Delta\mathfrak{M}_{O'}\bar{a}=\text{pr}_\Delta\mathfrak{M}_O\bar{a}.$$

Proiecţia pe o axă a momentului unui vector $\bar{a}$ faţă de un punct O al axei, are o valoare independentă de poziţia lui O pe axă.

Însă, se va putea scrie

$$\text{pr}_\Delta\mathfrak{M}_O\bar{a}=\bar{u}(\mathfrak{M}_O\bar{a})=\bar{u}(\overline{OA}\times\bar{a})=(\bar{u},\overline{OA},\bar{a}).$$

Aşadar, produsul mixt $(\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a})$ nu depinde de poziţia punctului O pe axă. El poartă numele de *momentul vectorului $\bar{a}$ faţă de axa Δ*, notîndu-se

$$\mathfrak{M}_\Delta\bar{a}=(\bar{u}, \overline{OA}, \bar{a}). \qquad (1.43)$$

Mărimea $\mathfrak{M}_\Delta\bar{a}$ este pozitivă sau negativă, după cum sistemul de vectori

$$\bar{u},\ \overline{OA},\ \bar{a}$$

este drept sau stîng (Observaţia 1° de la § 9), adică după cum $\bar{a}$ are un sens de rotaţie de la dreapta la stînga în raport cu $\bar{u}$ sau invers, de la stînga la dreapta. De aici deducem că momentul lui $\bar{a}$ în raport cu Oz este pozitiv sau negativ, după cum vectorul $\bar{a}$ arată tendinţa unei rotaţii spre stînga sau spre dreapta faţă de axa Δ.

Observaţii 1°. Fie P un plan perpendicular pe axa Δ în punctul O' (fig. 1.18), $\bar{a}'$ proiecţia vectorului $\bar{a}$ pe planul P, A' şi B' proiecţiile punctelor A şi B, respectiv pe planul $P(\overline{AB}=\bar{a},\ \overline{A'B'}=\bar{a}')$. Vom avea evident

$$\overline{OA}=\overline{OO}'+\overline{O'A}'+\overline{A'A},\quad \bar{a}=\overline{AA}'+\bar{a}'+\overline{B'B}.$$

Fig. 1.17

Fig. 1.18

Înlocuind pe $\overline{OA}$ şi $\bar{a}$ din expresia $(\bar{u},\ \overline{OA},\ \bar{a})$ prin valorile de mai înainte şi observînd că vectorii $\overline{OO}'$, $\overline{AA}'$ şi $\overline{BB}'$ ne dau produse vectoriale nule cu $\bar{u}$, obţinem

$$(\bar{u},\ \overline{OA},\ \bar{a})=(\bar{u},\ \overline{O'A}',\ \bar{a}')=\bar{u}(\overline{O'A}'\times\bar{a}').$$

Însă produsul $\overline{O'A}'\times\bar{a}$ este momentul vectorului $\bar{a}'$ faţă de O'; el este dirijat normal pe planul P. Rezultă de aici următoarea proprietate:

Momentul vectorului $\bar{a}$ faţă de axa Δ este egal cu momentul proiecţiei vectorului $\bar{a}$ pe un plan perpendicular pe Δ, luat în raport cu punctul O' unde Δ înţeapă planul P.

2°. Fie O_1A_1 (fig. 1.18) perpendiculara comună dintre axa Δ şi suportul D al vectorului $\bar{a}$, şi fie Q planul format de Δ şi de dreapta D' dusă prin O_1, paralel la D. Se vede că dreapta O_1A_1 este normală la Q, încît $\mathfrak{M}_{O_1}\bar{a}$ este un vector conţinut în planul Q. Să însemnăm cu θ unghiul dintre D' şi Δ. Atunci $\frac{\pi}{2}-\theta$ va fi unghiul dintre vectorul $\mathfrak{M}_{O_1}\bar{a}$ şi axa Δ, deci proiecţia acestui moment pe axa Δ, în valoare absolută, va fi egală cu valoarea sa absolută înmulţită cu $\sin\theta$, adică cu $ad\sin\theta$, însemnînd cu d distanţa O_1A_1. Aşadar, *valoarea absolută a momentului unui vector*

faţă de o axă oarecare este egală cu lungimea vectorului înmulţită cu distanţa dintre vector şi axă şi cu sinusul unghiului dintre vector şi axă.

Acest moment va fi pozitiv sau negativ, după cum va avea tendinţa unei rotaţii spre dreapta sau spre stînga faţă de axa Δ, aşa cum s-a stabilit mai înainte.

Rezultă că, dacă momentul unui vector faţă de axa Δ este egal cu zero, atunci suportul vectorului sau întîlneşte axa Δ $(d=0)$ sau este paralel cu axa Δ $(\theta=0,\ \theta=\pi)$. Aceste două condiţii se pot concentra astfel:

Condiţia necesară şi suficientă ca momentul unui vector în raport cu o axă să fie egal cu zero este ca vectorul să se găsească în acelaşi plan cu axa.

3°. Am găsit mai înainte relaţiile (1.41) care dau proiecţiile momentului $\mathfrak{M}_O\bar{a}$ pe cele trei axe de coordonate Ox, Oy, Oz. Din cele ce preced rezultă că aceste expresii vor fi tocmai momentele vectorului $\bar{a}$ faţă de axe, adică vom avea

$$\mathfrak{M}_{Ox}\bar{a}=ya_z-za_y,\qquad \mathfrak{M}_{Oy}\bar{a}=za_x-xa_z,\qquad \mathfrak{M}_{Oz}\bar{a}=xa_y-ya_z. \tag{1.44}$$

§ 14. Coordonatele unui vector alunecător. Torsor. Fie $\bar{F}$ un vector alunecător pe dreapta D (fig. 1.19), proiecţiile sale pe cele trei axe de coordonate fiind X, Y, Z. Se înţelege că numerele X, Y, Z nu sînt în stare ele singure să determine vectorul alunecător $\bar{F}$.

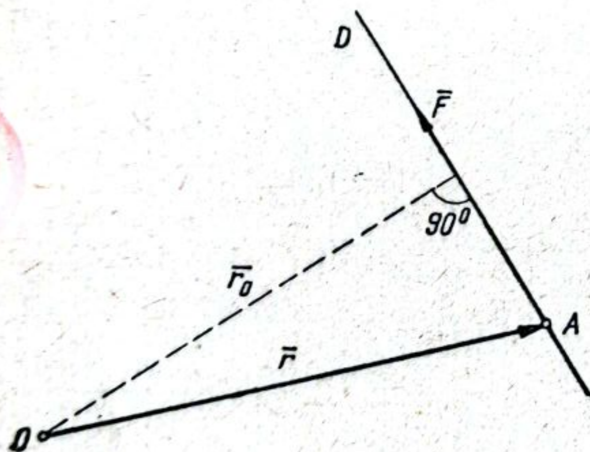


Fig. 1.19

Fie $\bar{r}\,(x,y,z)$ vectorul de poziţie al punctului A de aplicaţie al vectorului $\bar{F}$. Dacă însemnăm cu L, M, N proiecţiile pe axele de coordonate ale momentului $\overline{\mathcal{M}}$ al vectorului $\bar{F}$ faţă de originea O a axelor de coordonate, vom avea

$$\begin{aligned} L&=yZ-zY,\\ M&=zX-xZ,\\ N&=xY-yX. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Se vede că între X, Y, Z, L, M şi N există relaţia

$$LX+MY+NZ=0, \tag{1.46}$$

care arată că produsul scalar $\bar{F}\cdot\overline{\mathcal{M}}$ este nul, ceea ce de altfel este evident, fără nici un calcul, deoarece factorii $\bar{F}$ şi $\overline{\mathcal{M}}$ ai produsului $\bar{F}\cdot\overline{\mathcal{M}}$ sînt ortogonali.

Reciproc, dacă ni se dau doi vectori $\bar{R}(X,\ Y,\ Z)$ şi $\overline{\mathcal{M}}\ (L,\ M,\ N)$ perpendiculari între ei, $\bar{\mathcal{R}}$ fiind diferit de zero, atunci există un vector alunecător $\bar{F}$ şi numai unul, egal cu $\bar{\mathcal{R}}$ şi avînd momentul $\overline{\mathcal{M}}$ faţă de O,

$$\bar{F}=\bar{\mathcal{R}}.$$

Rămîne să-i determinăm vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului de aplicaţie; aşadar să determinăm pe $\bar{r}$ din ecuaţia

$$\overline{\mathcal{M}}=\bar{r}\times\bar{F}. \tag{1.47}$$

Multiplicînd vectorial această relaţie, cu $\bar{F}$ la stînga, obţinem

$$\bar{F}\times\overline{\mathcal{M}}=\bar{F}\times(\bar{r}\times\bar{F}),$$

sau încă

$$\bar{F}\times\overline{\mathcal{M}}=\bar{r}F^2-\bar{F}(\bar{F}\bar{r}), \tag{1.48}$$

conform formulei produsului dublu vectorial. Vom pune pentru $\bar{r}$ condiţia suplimentară de a fi normal pe $\bar{F}$, adică

$$\bar{F}\bar{r}=0. \tag{1.49}$$

În acest caz, relaţia (1.48) devine

$$\bar{F}\times\overline{\mathcal{M}}=\bar{r}_0F^2,$$

însemnînd cu $\bar{r}_0$ valoarea particulară a vectorului $\bar{r}$ corespunzătoare condiţiei suplimentare (1.49). Deducem

$$\bar{r}_0=\frac{\bar{F}\times\overline{\mathcal{M}}}{F^2}. \tag{1.50}$$

Vectorul $\bar{r}_0$ astfel obţinut este o soluţie particulară a ecuaţiei (1.47). Vom avea, deci,

$$\overline{\mathcal{M}}=\bar{r}_0\times\bar{F}. \tag{1.51}$$

Scăzînd membru cu membru relaţiile (1.47) şi (1.51) obţinem

$$0=(\bar{r}-\bar{r}_0)\times\bar{F},$$

de unde deducem

$$\bar{r}=\bar{r}_0+\lambda\bar{F}, \tag{1.52}$$

λ fiind o mărime scalară arbitrară.

Expresia (1.52) a lui $\bar{r}$ este cea mai generală soluţie a ecuaţiei (1.47), după cum se arată la § 8. Ea exprimă proprietatea că locul punctelor care au vectorul de poziţie $\bar{r}$ dat de relaţia (1.52) este dreapta D trecînd prin punctul determinat $\bar{r}_0$ şi fiind paralelă cu $\bar{F}$.

Dreapta D va fi suportul vectorului alunecător $\bar{F}$. Rezultă că vectorul alunecător $\bar{F}$ este determinat prin cele şase mărimi X, Y, Z, L, M, N, între care există relaţia (1.46) şi dintre care primele trei nu sînt toate nule. Ele mai poartă numele de *coordonatele Plücker* ale vectorului alunecător $\bar{F}$.

Din cele ce preced, deducem că perechea de vectori $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{\mathcal{M}}$ caracterizează un vector alunecător $\bar{F}$. Vom numi acest complex de doi vectori *torsorul în O al vectorului alunecător* şi-l vom însemna

$$\tau\bar{F} \text{ sau } T\bar{F},$$

privind simbolul τ sau T ca un operator aplicat vectorului $\bar{F}$. Se mai spune că am făcut „reducerea" vectorului $\bar{F}$ în O. Produsul scalar $\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}$ se numeşte

scalarul torsorului, încît putem spune că *scalarul torsorului unui vector alunecător este nul*.

O b s e r v a ţ i e. Din cele ce preced rezultă că torsorul defineşte perfect un *vector alunecător*, în sensul că, dacă se cunoaşte torsorul unui astfel de vector, se pot determina proiecţiile vectorului şi suportul său. Însă torsorul nu poate determina un *vector legat*. Într-adevăr, determinarea unui vector legat implică cunoaşterea a şase parametri scalari independenţi între ei, pe cînd torsorul unui vector alunecător nu implică decît cinci parametri scalari independenţi între ei.

Este evident că *torsorul unui vector liber* nu are nici un înţeles, deoarece momentul unui vector liber este nedeterminat.

§ 15. Momentul reciproc a doi vectori. Să considerăm doi vectori alunecători $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ determinaţi respectiv prin torsorii $\overline{\mathcal{R}}_1$, $\overline{\mathcal{M}}_1$ şi $\overline{\mathcal{R}}_2$, $\overline{\mathcal{M}}_2$ în O. Vom avea evident

$$\overline{\mathcal{R}}_1\overline{\mathcal{M}}_1=0, \quad \overline{\mathcal{R}}_2\overline{\mathcal{M}}_2=0. \tag{1.53}$$

Să presupunem că A_1 este punctul de aplicaţie al primului vector alunecător $\overline{F}_1$ şi A_2 al celui de-al doilea, $\overline{F}_2$ (fig. 1.20). Vom numi *momentul reciproc* al celor doi vectori alunecători, produsul mixt

$$(\overline{F}_1, \overline{A_1A_2}, \overline{F}_2). \tag{1.54}$$

Observăm că această expresie îşi păstrează valoarea dacă mutăm punctele de aplicaţie A_1 şi A_2 în lungul liniilor de acţiune ale vectorilor alunecători. Într-adevăr, înlocuind în expresia (1.54) a momentului reciproc, vectorul $\overline{A_1A_2}$ prin vectorul $\overline{A_1'A_2'}$,

$$\overline{A_1'A_2'}=\overline{A_1'A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_2'},$$

vom observa că aportul termenilor $\overline{A_1'A_1}$ şi $\overline{A_2A_2'}$ în această expresie este nul.

Mai observăm apoi că produsul mixt (1.54) îşi păstrează valoarea dacă schimbăm ordinea factorilor

$$(\overline{F}_1, \overline{A_1A_2}, \overline{F}_2)=(\overline{F}_2, \overline{A_2A_1}, \overline{F}_1).$$

Aceste două proprietăţi ale expresiei (1.54) erau necesare pentru ca definiţia momentului reciproc a doi vectori alunecători să aibă un înţeles determinat.

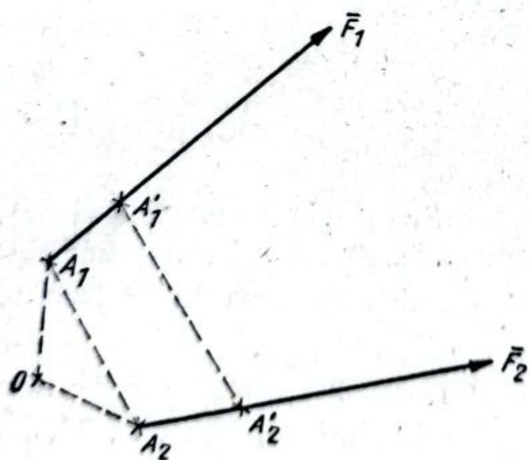


Fig. 1.20

În fine, mai observăm că valoarea acestui moment este egală cu volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori $\overline{F}_1$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{F}_2$ sau cu de şase ori volumul tetraedrului construit pe cei doi vectori alunecători $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$, luat cu plus sau minus după cum sistemul de vectori în ordinea precedentă constituie un sistem drept sau stîng. În special, dacă vectorul alunecător $\overline{F}_2$ este versorul axei Δ, atunci momentul

reciproc al vectorilor alunecători $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ este chiar momentul vectorului alunecător $\overline{F}_1$ faţă de axa Δ.

Să revenim la cazul general şi să scriem în (1.54)

$$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1O}+\overline{OA_2},$$

O fiind originea axelor de coordonate. Vom avea

$$(\overline{F}_1,\ \overline{A_1A_2},\ \overline{F}_2)=(\overline{F}_1,\ \overline{OA_2},\ \overline{F}_2)+(\overline{F}_1,\ \overline{A_1O},\ \overline{F}_2)=\overline{F}_1\overline{\mathcal{M}}_2+\overline{F}_2\overline{\mathcal{M}}_1 \quad (1.55)$$

sau încă, ţinînd seama de relaţiile (1.53),

$$(\overline{F}_1,\ \overline{A_1A_2},\ \overline{F}_2)=(\overline{F}_1+\overline{F}_2)\ (\overline{\mathcal{M}}_1+\overline{\mathcal{M}}_2). \quad (1.56)$$

Dacă întrebuinţăm notaţiile

$$\overline{\mathcal{R}}_1+\overline{\mathcal{R}}_2=\overline{\mathcal{R}},\quad \overline{\mathcal{M}}_1+\overline{\mathcal{M}}_2=\overline{\mathcal{M}}$$

şi dacă numim $(\overline{\mathcal{R}},\ \overline{\mathcal{M}})$ *torsorul rezultant al celor doi vectori*, proprietatea exprimată prin relaţia (1.56) se poate enunţa în felul următor:

Scalarul torsorului rezultant a doi vectori alunecători este egal cu momentul reciproc al celor doi vectori.

Această proprietate este susceptibilă de a fi generalizată. Fie $(\overline{\mathcal{R}}_i, \overline{\mathcal{M}}_i)$ torsorii a n vectori alunecători $(i=1,2, \ldots, n)$. Vom avea, evident,

$$\overline{\mathcal{R}}_i\overline{\mathcal{M}}_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (1.57)$$

Punînd

$$\overline{\mathcal{R}}=\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_i,\quad \overline{\mathcal{M}}=\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}_i, \quad (1.58)$$

vom spune că $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}})$ este *torsorul rezultant în O al vectorilor consideraţi*. Ţinînd seama de relaţiile (1.57) vom putea scrie

$$\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}=\sum_{i,k} \overline{\mathcal{R}}_i\overline{\mathcal{M}}_k=\sum (\overline{\mathcal{R}}_i\overline{\mathcal{M}}_k+\overline{\mathcal{R}}_k\overline{\mathcal{M}}_i) \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (1.59)$$

ceea ce înseamnă că:

Scalarul torsorului rezultant a n vectori alunecători este egal cu suma momentelor reciproce a tuturor vectorilor luaţi doi cîte doi.

D. SISTEME DE VECTORI

§. 16. **Definiţii.** Fie A_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, n puncte, fiecare fiind punctul de aplicaţie a n_i vectori v_{ij} $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_i)$. Mulţimea tuturor vectorilor $\overline{v}_{ij}$ laolaltă constituie un *sistem de vectori*. Se înţelege că este îngăduit a presupune că pentru vreunul dintre punctele A_k considerate nu există eventual nici un vector $\overline{v}_{kj}$ care să aibă punctul de aplicaţie în A_k.

Vom însemna prescurtat un asemenea sistem de vectori prin $(\bar{v})$. Vom nota cu $(-\bar{v})$ sistemul vectorilor $-\bar{v}_{ij}$ aplicați respectiv în aceleași puncte. Mai general, vom însemna cu $(\lambda\bar{v})$, λ fiind un scalar oarecare, sistemul vectorilor $\lambda\bar{v}_{ij}$ păstrînd punctele de aplicație. Vom conveni să întrebuințăm și notația $\lambda(\bar{v})$ pentru a reprezenta sistemul $(\lambda\bar{v})$.

Dacă sistemul $(\bar{v})$ este aplicat în punctele A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ și $(\bar{v}')$ în punctele B_k $(k=1, 2, \ldots, n')$ unele dintre punctele A_i putînd coincide cu unele dintre punctele B_k, atunci sistemul $(\bar{v}'')$ compus din toți vectorii sistemului $(\bar{v})$ aplicați în A_i și din toți vectorii sistemului $(\bar{v}')$ aplicați în B_k este, prin definiție, *suma celor două sisteme* $(\bar{v})$ și $(\bar{v}')$. Vom scrie

$$(\bar{v}')+(\bar{v})=(\bar{v}'') \tag{1.60}$$

Înțelesul pe care-l asumă semnul $=$ în această relație este acela al unei identități.

Operația este, evident, comutativă

$$(\bar{v})+(\bar{v}')=(\bar{v}'')$$

și omogenă, de gradul întîi

$$(\lambda\bar{v})+(\lambda\bar{v}')=(\lambda\bar{v}'').$$

Din definițiile ce preced, deducem înțelesul operației

$$(\bar{v})+(\lambda\bar{v}'),$$

ceea ce este tot una cu

$$(\bar{v})+\lambda(\bar{v}').$$

Pentru cazul special $\lambda=-1$, obținem operația

$$(\bar{v})+(-\bar{v}'),$$

pe care convenim a o reprezenta mai simplu

$$(\bar{v})-(\bar{v}').$$

Observăm că fiecare dintre vectorii $\bar{v}_{ij}$ poate fi considerat ca un sistem de vectori redus la unul singur, încît sistemul $(\bar{v})$ compus din toți vectorii $\bar{v}_{ij}$ apare ca fiind suma sistemelor $(\bar{v}_{ij})$ compuse din cîte un vector $\bar{v}_{ij}$

$$(\bar{v})=\sum_{i,j}(\bar{v}_{ij}).$$

§ 17. Operații elementare de echivalență. Sisteme echivalente. Dacă înlocuim vectorii $\bar{v}_{ij}$ $(j=1, 2, \ldots, n_i)$, avînd toți punctul de aplicație în A_i, prin vectorii $\bar{v}_{ij'}$ $(j'=1, 2, \ldots, n_i')$ avînd același punct de aplicație A_i și îndeplinind condiția

$$\sum_{j=1}^{n_i}\bar{v}_{ij}=\sum_{j'=1}^{n_i'}\bar{v}_{ij'}, \tag{1.61}$$

vom spune că sistemul $(\bar{v})$ a fost supus la o *operaţie elementară de echivalenţă*. Semnul = nu mai reprezintă o identitate ca în relaţia (1.60), ci numai o „echivalenţă".

Definiţia operaţiei elementare de echivalenţă cuprinde şi cazul în care punctul A_i nu ar fi punctul de aplicaţie al vreunui vector din sistemul $(\bar{v})$, în care caz condiţia (1.61) devine

$$0=\sum_{j'=1}^{n_i}\bar{v}_{ij'}. \tag{1.62}$$

Vom însemna cu ω o operaţie oarecare elementară de echivalenţă.

Operaţiile elementare de echivalenţă constituie un *grup*, deoarece suma a două operaţii $\omega_1+\omega_2$ este echivalentă cu o operaţie analogă ω_3, operaţia inversă $-\omega_1$ este de aceeaşi natură şi, în fine, operaţia identică $\omega=1$ face parte din grup. Îl vom numi *grupul operaţiilor elementare* şi-l vom însemna cu G.

Sistem de vectori legaţi. Dacă toţi vectorii $\bar{v}_{ij}$ alcătuind sistemul $(\bar{v})$ sînt vectori *legaţi*, atunci sistemul $(\bar{v})$ se numeşte *sistem de vectori legaţi*.

Fie $(\bar{v}')$ un sistem de vectori legaţi care se poate deduce din sistemul $(\bar{v})$ de vectori legaţi supunîndu-l pe acesta la un număr de operaţii elementare de echivalenţă. *Vom spune că sistemul* $(\bar{v}')$ *este echivalent* cu sistemul $(\bar{v})$ şi vom scrie

$$(\bar{v}')=(\bar{v}), \tag{1.63}$$

ceea ce este de altfel tot una cu

$$(\bar{v})=(\bar{v}').$$

Dacă, în particular, avem

$$\sum_{j=1}^{n_i}\bar{v}_{ij}=0, \quad \text{pentru } i=1, 2, \ldots, n$$

sistemul $(\bar{v})$ va fi *echivalent cu zero*.

Sistem de vectori alunecători. Dacă toţi vectorii $\bar{v}_{ij}$ alcătuind sistemul $(\bar{v})$ sînt vectori alunecători, atunci sistemul $(\bar{v})$ se numeşte *sistem de vectori alunecători*.

Pentru sistemele de vectori alunecători noţiunea de *echivalenţă* este lărgită cu o nouă *operaţie elementară de echivalenţă*, anume mutarea punctului de aplicaţie al unui vector oriunde în lungul *suportului respectiv* (alunecarea vectorului pe suport). Grupul G astfel lărgit (cu alunecarea vectorului pe suport) se numeşte *grupul lărgit al operaţiilor elementare*. Îl vom însemna cu G', iar operaţiile care îl alcătuiesc cu ω'.

În cele ce urmează nu vom considera decît aceste două categorii de sisteme de vectori: sisteme de *vectori legaţi* şi sisteme de *vectori alunecători*.

Aşadar, cînd vom spune sistem de vectori, vom înţelege un sistem de vectori legaţi sau un sistem de vectori alunecători.

Proprietăţile sistemelor echivalente. 1°. Dacă $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ sînt două sisteme echivalente de vectori legaţi sau alunecători,

$$(\bar{v})=(\bar{v}')$$

şi $(\bar{w})$ un al treilea sistem, vom avea

$$(\bar{v})+(\bar{w})=(\bar{v}')+(\bar{w}).$$

2°. Dacă $(\bar{v})$ este un sistem echivalent cu zero, vom avea

$$(\bar{v}')+\lambda(\bar{v})=(\bar{v}'),$$

λ fiind un scalar oarecare.

3°. În cazul foarte frecvent cînd nu se cere discriminarea sistemelor echivalente între ele, toţi vectorii $\bar{v}_{ij}$ aplicaţi aceluiaşi punct A_i, se pot înlocui prin unul singur, $\bar{v}_i$, astfel încît să avem

$$\bar{v}_i=\sum_{j=1}^{n_i}\bar{v}_{ij}.$$

În consecinţă, vom putea reprezenta totdeauna un sistem de vectori $(\bar{v})$ printr-un sistem de n vectori $\bar{v}_i$ aplicaţi respectiv în punctele A_i $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$; se obţine astfel o formă mai simplă a sistemului $(\bar{v})$.

E. TRANSFORMAREA PRIN ECHIVALENŢĂ A SISTEMELOR DE VECTORI ALUNECĂTORI

§ 18. **Reducerea la un sistem de trei vectori.** Fie $(\bar{v})$ un sistem de n vectori alunecători $\bar{v}_i$ aplicaţi respectiv în punctele A_i $(i=1, 2, \ldots, n; n>3)$. Grupul de operaţii care i se aplică este G'. Sistemul $(\bar{v})$ este un invariant al acestui grup.

Ne propunem a arăta că sistemul $(\bar{v})$ este echivalent cu un sistem compus din trei vectori $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ aplicaţi respectiv în trei puncte O_1, O_2, O_3 arbitrar luate în spaţiu, îndeplinind numai condiţia de a nu fi coliniare. Va trebui să arătăm deci că, prin mijlocirea unor operaţii ω' aparţinînd grupului G', sistemul $(\bar{v})$ se transformă în sistemul alcătuit de vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Să ne fixăm atenţia asupra unui anumit punct A_i şi să-l unim prin trei drepte cu punctele O_1, O_2, O_3. Presupunînd că nu se află în planul determinat de punctele O_1, O_2, O_3, cele trei drepte A_iO_1, A_iO_2, A_iO_3 vor determina un unghi solid. Vectorul $\bar{v}_i$ aplicat în A_i va putea fi înlocuit prin cele trei componente ale sale din lungul muchiilor unghiului solid — cu o primă operaţie ω'. Însă aceste componente pot aluneca în lungul muchiilor-suport, astfel încît punctele lor de aplicaţie să fie respectiv

O_1, O_2, O_3 — a doua operaţie ω'. Procedînd la fel cu toate punctele A_i, vom obţine în fiecare din punctele O_1, O_2, O_3 cîte n componente. Însă, componentele din O_1 pot fi înlocuite prin suma lor, datorită unei operaţii ω', tot aşa cele din O_2, precum şi cele din O_3. Rezultă că sistemul $(\bar{v})$ a fost transformat în altul compus din trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ aplicaţi respectiv în O_1, O_2, O_3.

Pentru demonstraţia aceasta am presupus că A_i nu se află în planul $O_1O_2O_3$. Dacă s-ar întîmpla ca A_i să se afle în planul $O_1O_2O_3$, atunci am muta punctul de aplicaţie al vectorului $\bar{v}_i$ pe suportul său în A_i'; deci vom putea folosi demonstraţia noastră dacă A_i' nu se află în planul $O_1O_2O_3$.

În cazul cînd şi A_i' s-ar afla în acest plan, atunci vectorul $\bar{v}'$ se va afla în planul $O_1O_2O_3$, aşa că el va putea fi descompus după două oarecare din cele trei drepte A_iO_1, A_iO_2, A_iO_3.

§ 19. **Reducerea la un sistem de doi vectori.** Vom arăta acum că sistemul de trei vectori alunecători $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ aplicaţi respectiv în O_1, O_2, O_3 este echivalent cu un altul compus din doi vectori. Într-adevăr, fie D intersecţia planului P determinat de vectorul $\bar{b}$ şi de punctul O_1, cu planul Q determinat de vectorul $\bar{c}$ şi de punctul O_1. Dreapta D va trece, evident, prin O_1. Fie O' un al doilea punct al dreptei D. Dreptele O_2O_1 şi O_2O' se vor afla în planul P în care se află şi vectorul $\bar{b}$, deci acest vector va putea fi înlocuit prin componentele sale în lungul dreptelor O_2O_1 şi O_2O'. Aceste două componente pot însă aluneca pe suport pentru ca punctele lor de aplicaţie să ajungă în O_1 şi respectiv O'. Procedînd la fel cu vectorul $\bar{c}$ din planul Q, ajungem să înlocuim sistemul vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ printr-un alt sistem: trei vectori concurenţi în O_1 şi doi în O'. Înlocuind vectorii concurenţi prin sumele lor, se obţin în definitiv doi vectori, unul avînd punctul de aplicaţie în O_1, celălalt în O'.

F. TORSORUL UNUI SISTEM DE VECTORI (LEGAŢI SAU ALUNECĂTORI). AXĂ CENTRALĂ

§ 20. **Definiţie.** Fie $(\bar{v})$ un sistem de vectori (legaţi sau alunecători) $\bar{v}_{ij}$ $(j=1, 2, \ldots, n_i)$ aplicaţi în punctele A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Vom construi doi vectori $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{M}}$ cu ajutorul operaţiilor următoare:

$$\bar{\mathcal{R}}=\sum_{i,j}\bar{v}_{ij}, \qquad \bar{\mathcal{M}}=\sum_{i,j}\bar{r}_i\times\bar{v}_{ij}, \tag{1.64}$$

însemnînd cu $\bar{r}_i$ vectorul de poziţie al punctului A_i faţă de sistemul de axe de coordonate cu originea în O.

$\bar{\mathcal{R}}$ este *vectorul rezultant* al sistemului,

$\bar{\mathcal{M}}$ este *momentul rezultant* al sistemului.

Operaţia prin care am obţinut aceşti doi vectori o numim *torsor*, punctul O fiind *originea sau polul torsorului*. Vom zice că am efectuat *torsorul în* O al sistemului $(\bar{v})$.

Aşadar, torsorul în O al sistemului $(\bar{v})$ este vectorul dublu $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}})$. Vom scrie

$$\tau(\bar{v})=(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}).$$

Uneori — cînd este necesar — vom indica, printr-un indice ataşat simbolului τ, polul torsorului, scriind

$$\tau_o(\bar{v})=(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}).$$

Însemnînd cu $\tau\bar{v}_{ij}$ torsorul în O al vectorului $\bar{v}_{ij}$, vom putea scrie

$$\tau(\bar{v})=\sum_{i,j}\tau\bar{v}_{ij}, \tag{1.65}$$

adică *torsorul sistemului* $(\bar{v})$ *este egal cu suma torsorilor vectorilor* $(\bar{v}_{ij})$ *alcătuind sistemul* $(\bar{v})$.

Dacă cei doi vectori $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}$ sînt nuli, se spune că *torsorul în* O *al sistemului* $(\bar{v})$ *este nul*, ceea ce se ntîmplă, de pildă, cînd toţi vectorii $\bar{v}_{ij}$ sînt nuli.

§ 21. **Schimbarea originii torsorului.** Dacă aplicăm torsorul în O' aceluiaşi sistem $(\bar{v})$, vectorul $\overline{\mathcal{R}}$ nu se va schimba, pe cînd vectorul $\overline{\mathcal{M}}$ va deveni $\overline{\mathcal{M}}'$ dat de relaţia.

$$\overline{\mathcal{M}}'=\sum\bar{r}'_i\times\bar{v}_{ij},$$

unde $\bar{r}'_i$ este vectorul de poziţie al punctului A_i faţă de O'. Dar deoarece

$$\bar{r}'_i=\bar{r}_i+\overline{O'O}$$

relaţia precedentă devine

$$\overline{\mathcal{M}}'=\overline{\mathcal{M}}+\overline{O'O}\times\overline{\mathcal{R}}. \tag{1.66}$$

Formula (1.66) exprimă faptul că *schimbînd originea din* O *în* O' *momentul rezultant se măreşte cu momentul faţă de* O' *al vectorului* $\overline{\mathcal{R}}$ *avînd punctul de aplicaţie în* O.

Observînd că produsul vectorial $\overline{O'O}\times\overline{\mathcal{R}}$ este normal pe $\overline{\mathcal{R}}$ deducem din formula (1.66):

Proiecţia vectorului $\overline{\mathcal{M}}'$ *pe* $\overline{\mathcal{R}}$ *este egală cu proiecţia vectorului* $\overline{\mathcal{M}}$ *pe* $\overline{\mathcal{R}}$ sau, ţinînd seama de invarianţa vectorului $\overline{\mathcal{R}}$:

Produsul scalar $\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}$ *este acelaşi oriunde am lua originea torsorului.*

Produsul scalar $\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}$ se mai numeşte şi *scalarul torsorului*; el este deci un invariant al grupului de transformări care ne dau schimbarea originii.

Să notăm cu X, Y, Z proiecțiile vectorului $\overline{\mathcal{R}}$ pe axe și cu L, M, N acelea ale vectorului $\overline{\mathcal{M}}_0$. Scalarul $\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}_0$ al torsorului va lua forma unui trinom

$$\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}_0 = LX + MY + NZ, \tag{1.67}$$

din care cauză el mai este denumit „trinomul invariant".

Tot din (1.66) deducem că, mutînd originea din O în O' torsorul nu se schimbă dacă

a) vectorul rezultant $\overline{\mathcal{R}}$ este nul;

b) originea se mută pe direcția vectorului rezultant $\overline{\mathcal{R}}$.

În special, dacă torsorul în O este nul, el va fi nul în oricare alt punct O'.

§ 22. **Forma minimă a torsorului. Axa centrală.** Să reluăm sistemul $(\bar{v})$ de vectori (legați sau alunecători) avînd torsorul în O,

$$\tau(\bar{v}) = (\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}).$$

Vom presupune $\overline{\mathcal{R}} \neq 0$.

Descompunînd vectorul $\overline{\mathcal{M}}$ în două componente (fig. 1.21), una $\overline{P}$ după $\overline{\mathcal{R}}$ și alta $\overline{Q}$ normală la $\overline{\mathcal{R}}$ avem

$$\overline{\mathcal{M}} = \overline{P} + \overline{Q}.$$

Valoarea absolută a lui $\overline{\mathcal{M}}$ este evident, $(P^2+Q^2)^{1/2}$.

Am văzut la § 20 că, mutînd originea torsorului din O în O', componenta $\overline{P}$ nu se schimbă, astfel încît, dacă s-ar întîmpla ca în O' valoarea componentei $\overline{Q}$ să se anuleze, vectorul $\overline{\mathcal{M}}$ ar deveni egal cu $\overline{P}$; el ar lua, evident, valoarea sa *minimă*. Cum $\overline{\mathcal{R}}$ este un invariant al grupului de transformări de origine (O,O') vom putea spune că însuși torsorul $\tau(\bar{v})$ își ia *forma minimă* în O'. Valoarea scalară a momentului $\overline{\mathcal{M}}_{0'}$ corespunzătoare acestei poziții de minimum a torsorului, va fi evident egală cu scalarul $\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}_0$ divizat prin valoarea absolută a vectorului rezultant $\overline{\mathcal{R}}$

$$|\overline{\mathcal{M}}_0| = \frac{\overline{\mathcal{R}}\,\overline{\mathcal{M}}_0}{|\overline{\mathcal{R}}|} = \frac{LX+MY+NZ}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{1.68}$$

Dacă O' dă torsorului forma minimă, atunci, în virtutea proprietății b) de la § 19, se vede, că orice punct de pe dreapta D, paralelă la $\overline{\mathcal{R}}$ și trecînd prin O' luat ca origine, îi procură torsorului forma minimă. Se vede, de altfel, că dreapta D este locul geometric al tuturor punctelor O', avînd această proprietate. Dreapta D se numește *axă centrală a sistemului* $(\bar{v})$.

Din cele ce preced, rezultă că este suficient să găsim un singur punct O' al axei centrale pentru a o avea determinată în întregime. Acel punct O' îl vom afla în modul indicat la § 18. Anume, pe perpendiculara $\overline{OO'}$ (fig. 1.21) pe planul $(\overline{P}, \overline{Q})$ — identic cu planul $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_0)$ — vom lua

punctul O' astfel ca distanţa $\overline{O'O}$ să fie egală cu cîtul dintre valorile absolute ale vectorilor $\overline{Q}$ şi $\overline{\mathcal{R}}$

$$\overline{O'O}=\frac{|\overline{Q}|}{|\overline{\mathcal{R}}|}.$$

Vom lua pe O' de partea care realizează un sistem drept din vectorii $\overline{\mathcal{R}}$, $\overline{Q}$, $\overline{OO'}$, în această ordine. Punctul O' astfel determinat, îndeplineşte condiţia cerută, iar paralela dusă prin O' la $\overline{\mathcal{R}}$ va fi, evident, axa centrală a sistemului. Dacă O este originea axelor de coordonate, atunci se verifică uşor că vectorul de poziţie al punctului O' este dat de expresia

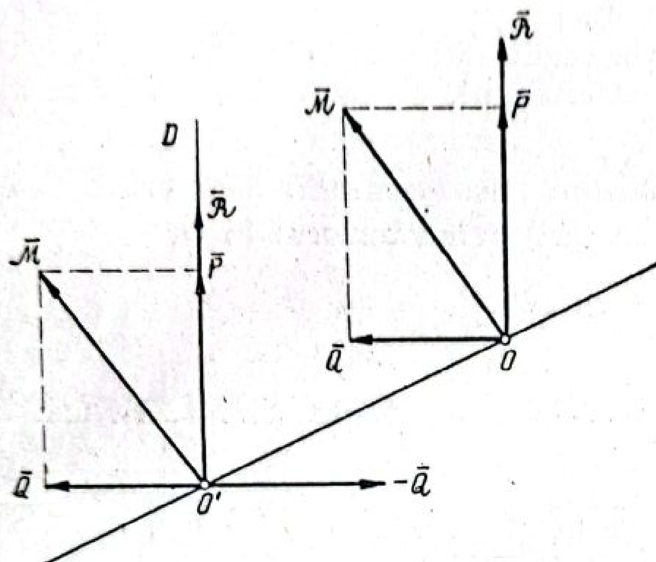


Fig. 1.21

$$\overline{r}'=\frac{\overline{\mathcal{R}}\times\overline{\mathcal{M}}}{\mathcal{R}^2}, \qquad (1.69)$$

încît ecuaţia vectorială a axei centrale va fi

$$\overline{r}=\overline{r}'+\lambda\overline{\mathcal{R}}, \qquad (1.70)$$

λ fiind un parametru variabil.

De altfel, ecuaţia precedentă poate fi pusă şi sub altă formă, în care să nu mai apară λ. Într-adevăr, multiplicînd vectorial cu $\overline{\mathcal{R}}$ ambii membri, obţinem

$$\overline{r}\times\overline{\mathcal{R}}=\overline{r}'\times\overline{\mathcal{R}}. \qquad (1.71)$$

Partea dreaptă a acestei relaţii se poate pune sub forma

$$\overline{\mathcal{M}}-\overline{\mathcal{R}}\,\frac{\overline{\mathcal{M}}\,\overline{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2},$$

ţinînd seama de expresia (1.70) a vectorului $\overline{r}$ precum şi de expresia cunoscută a produsului dublu. Ecuaţia (1.71) devine

$$\overline{r}\times\overline{\mathcal{R}}=\overline{\mathcal{M}}-\overline{\mathcal{R}}\,\frac{\overline{\mathcal{R}}\cdot\overline{\mathcal{M}}}{\mathcal{R}^2}, \qquad (1.72)$$

care este o altă formă a ecuaţiei axei centrale.

§ 23. **Ecuaţiile carteziene ale axei centrale.** Fie X, Y, Z proiecţiile vectorului $\overline{\mathcal{R}}$ pe trei axe de coordonate şi L, M, N acelea ale vectorului $\overline{\mathcal{M}}$. Se înţelege că, dîndu-ni-se sistemul $(\overline{v})$ de vectori (legaţi, respectiv alunecători), mărimile X, Y, Z, L, M, N pot fi presupuse cunoscute. Însem-

nînd cu x, y, z coordonatele unui punct curent de pe axa centrală — adică proiecţiile lui $\bar{r}$ — ecuaţia (1.72) proiectată pe axele de coordonate ne dă

$$\left.\begin{aligned} zY-yZ+L&=kX,\\ xZ-zX+M&=kY,\\ yX-xY+N&=kZ,\end{aligned}\right\} \tag{1.73}$$

unde

$$k=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{1.74}$$

Ecuaţiile (1.73) nu sînt independente între ele, ceea ce se vede imediat multiplicîndu-le respectiv cu X, Y, Z şi adunîndu-le. Ele se reduc la două ecuaţii, care se pot pune sub forma

$$\frac{zY-yZ+L}{X}=\frac{xZ-zX+M}{Y}=\frac{yX-xY+N}{Z}. \tag{1.75}$$

Acestea sînt *ecuaţiile axei centrale* în coordonate carteziene. Valoarea comună a raporturilor este k.

§ 24. **Torsorul este un invariant.** Să observăm că o operaţie ω' lasă neschimbaţi vectorii $\bar{\mathcal{R}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}$. Deducem:

Torsorul este un invariant al grupului lărgit G'.

Proprietăţi funcţionale ale torsorului. Torsorul este un operator liniar. Aceasta înseamnă că el satisface relaţiile funcţionale următoare:

$$\tau[(\bar{v})+(\bar{v}')]=\tau(\bar{v})\,\bar{+}\,\tau(\bar{v}'), \tag{1.76}$$

$$\tau(\lambda\bar{v})=\lambda\tau(\bar{v}), \tag{1.77}$$

$(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ fiind două sisteme oarecare de vectori (legaţi sau alunecători), iar λ un scalar.

C o n s e c i n ţ e. Din (1.76) rezultă

$$\tau(\bar{v})=\sum_{i,j}\tau\bar{v}_{ij}$$

în conformitate cu relaţia (1.65) de definiţie, iar din (1.77)

$$\tau(-\bar{v})=-\tau(\bar{v}).$$

Din proprietatea de invarianţă şi din ipoteza

$$(\bar{v})=(\bar{v}'),$$

deducem

$$\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}'),$$

adică *torsorul a două sisteme echivalente este acelaşi*. În particular, dacă $(\bar{v}')=0$, adică dacă $(\bar{v})$ este un sistem echivalent cu zero, avem

$$\tau(\bar{v})=0,$$

adică

$$\mathcal{R}=0, \quad \mathcal{M}=0.$$

§ 25. **Proprietăţi caracteristice sistemelor de vectori alunecători.** Ultima proprietate, anume aceea că relaţia $(\bar{v})=(\bar{v}')$ implică relaţia $\tau(\bar{v})=$ $=\tau(\bar{v}')$, are o reciprocă în cazul sistemelor de vectori alunecători, adică relaţia $\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}')$ implică relaţia $(\bar{v})=(\bar{v}')$.

O vom demonstra mai întîi pentru cazul particular $\tau(\bar{v})=0$.

Dacă torsorul unui sistem de vectori alunecători $(\bar{v})$ este nul într-un punct O al spaţiului, atunci sistemul $(\bar{v})$ este echivalent cu zero.

În acest scop, vom transforma sistemul $(\bar{v})$ prin operaţii ω' într-un sistem de doi vectori, $\bar{w}_1$ aplicat în B_1 şi $\bar{w}_2$ aplicat în B_2. Torsorul fiind un invariant al grupului G', el va fi nul şi pentru sistemul compus din vectorii $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, adică vom avea în special $\bar{w}_1+\bar{w}_2=0$, adică $\bar{w}_2=-\bar{w}_1$. Momentul rezultant fiind de asemenea nul, vom avea

$$\mathfrak{M}_{B_1}\bar{w}_1+\mathfrak{M}_{B_1}\bar{w}_2=0,$$

adică $\mathcal{M}_{B_1}w_2=0$, deci $\bar{w}_2$ va trece prin B_1. Aşadar, cei doi vectori vor fi egali, de sens contrar şi situaţi pe acelaşi suport, adică sistemul lor este echivalent cu zero. Teorema este demonstrată.

Se poate trece acum la cazul general: Dacă $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ sînt două sisteme de vectori alunecători, astfel încît torsorul lor este acelaşi (într-un punct oarecare), ele sînt echivalente.

Într-adevăr, din relaţia

$$\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}'),$$

vom deduce

$$\tau(\bar{v})-\tau(\bar{v}')=0,$$

sau încă

$$\tau(\bar{v})+\tau(-\bar{v}')=0,$$

deoarece avem

$$\tau(\bar{v}')=-\tau(\bar{v}')$$

în virtutea relaţiei (1.77). Însă relaţia precedentă se poate pune sub forma

$$\tau[(\bar{v})+(-\bar{v}')]=0,$$

aplicînd identitatea (1.76). Rezultă că sistemul $(\bar{v})+(-\bar{v}')$, este echivalent cu zero avînd torsorul nul. Conchidem că sistemele $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ sînt echivalente: $(\bar{v})=(\bar{v}')$.

Din aceste proprietăţi deducem:

1. *Condiţia necesară şi suficientă ca două sisteme $(\bar{v})$ şi $(\bar{v}')$ de vectori alunecători să fie echivalente între ele este*

$$\tau(\bar{v})=\tau(\bar{v}') \tag{1.78}$$

pentru un punct din spaţiu.

În particular

2. *Condiția necesară și suficientă ca un sistem* $(\overline{v})$ *de vectori alunecători să fie echivalent cu zero este*

$$\tau(\overline{v})=0$$

pentru un punct oarecare.

G. VECTORI VARIABILI. ANALIZA VECTORIALĂ

§ 26. **Derivate.** Un vector care își schimbă valoarea o dată cu un parametru oarecare, se spune că este o funcție de acel parametru. Vom considera în Mecanică, în general, vectori care își schimbă valoarea în mod continuu, adică vectori care încearcă o variație ori cît de mică pentru o variație îndeajuns de mică a parametrului, ambele variații tinzînd simultan la zero.

Fie $\overline{a}$ un astfel de vector și t parametrul scalar de care depinde. Pentru valoarea $t+\Delta t$ a parametrului, Δt fiind o mică variație a lui t, vectorul $\overline{a}$ devine $\overline{a}'=\overline{a}+\Delta\overline{a}$, unde $\Delta\overline{a}$ înseamnă un vector care adăugat lui $\overline{a}$ să ne dea pe $\overline{a}+\Delta\overline{a}$ (fig. 1.22), deci variația lui $\overline{a}$ în intervalul Δt.

Proiecțiile sale pe axele de coordonate, considerate fixe, sînt Δa_x, Δa_y, Δa_z, adică variațiile în intervalul Δt pe care le încearcă proiecțiile a_x, a_y, a_z ale vectorului $\overline{a}$. Printr-un proces de trecere la limită, analog celui din Analiza scalară, vom zice că limita raportului $\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t}$ cînd această limită există, *este derivata vectorului* $\overline{a}$ *în raport cu parametrul* t și o vom însemna cu

$$\frac{d\overline{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{a}}{\Delta t}.$$

În cazul cînd parametrul t este chiar timpul, această derivată se poate nota și prin $\dot{\overline{a}}$.

Cum proiecțiile vectorului $\Delta\overline{a}$ pe cele trei axe sînt respectiv Δa_x, Δa_y, Δa_z rezultă că proiecțiile vectorului $\frac{d\overline{a}}{dt}$ vor fi

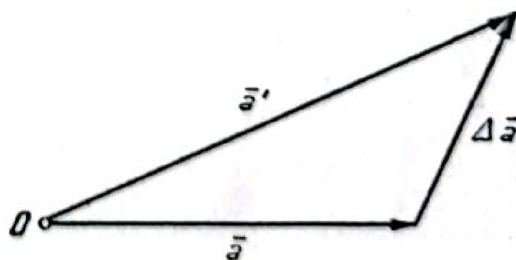


Fig. 1.22

$$\frac{da_x}{dt},\ \frac{da_y}{dt},\ \frac{da_z}{dt},$$

sau, în cazul în care parametrul t este timpul,

$$\dot{a}_x,\ \dot{a}_y,\ \dot{a}_z,$$

adică: *proiecțiile vectorului derivat pe cele trei axe sînt tocmai derivatele proiecțiilor vectorului* $\overline{a}$.

Din felul cum am introdus noțiunea de derivată (independentă de axe) deducem că mărimile $\dot{a}_x$, $\dot{a}_y$, $\dot{a}_z$ satisfac relațiile (1.10) la o transformare a axelor de coordonate, dacă mărimile a_x, a_y, a_z satisfac acele relații.

În expresia hipercomplexă a vectorului variabil,

$$\overline{a}=\overline{i}a_x+\overline{j}a_y+\overline{k}a_z,$$

vom presupune că versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ sînt constanți, pe cînd proiecțiile a_x, a_y, a_z variabile. Conform celor de mai înainte, vom avea

$$\dot{\overline{a}}=\overline{i}\dot{a}_x+\overline{j}\dot{a}_y+\overline{k}\dot{a}_z, \tag{1.79}$$

adică vom deriva după regulile obișnuite din analiza scalară.

§ 27. **Derivata funcțiilor de vectori.** Se verifică imediat că derivata unei sume este egală cu suma derivatelor

$$\frac{d}{dt}(\overline{a}+\overline{b})=\dot{\overline{a}}+\dot{\overline{b}}. \tag{1.80}$$

De asemenea, din cauza distributivității produselor cu vectori, vom avea

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m\overline{a})=m\dot{\overline{a}}+\dot{m}\overline{a}\\
&\frac{d}{dt}(\overline{a}\overline{b})=\dot{\overline{a}}\overline{b}+\overline{a}\dot{\overline{b}}\\
&\frac{d}{dt}(\overline{a}\times\overline{b})=\dot{\overline{a}}\times\overline{b}+\overline{a}\times\dot{\overline{b}}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.81}$$

Prin urmare, regulile de derivare pentru sumă și produs din analiza scalară se mențin și în analiza vectorială pentru sumă și pentru cele trei feluri de produse.

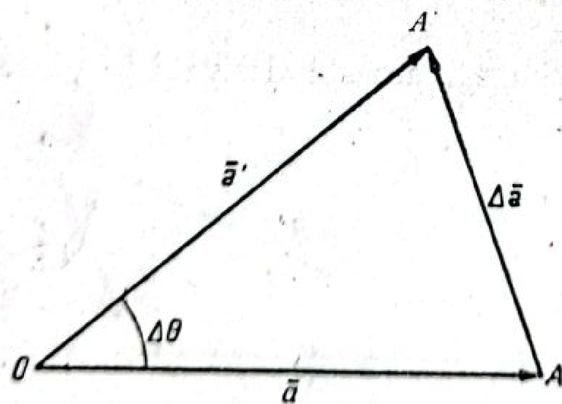


Fig. 1.23

§ 28. **Derivata unui vector de modul constant.** Ne propunem a deduce expresia derivatei unui vector de modul constant.

Să presupunem că vectorul $\overline{OA}=\overline{a}$ (fig. 1.23) rămîne constant în modul. Rezultă că dacă O este fix, locul geometric (A) al vîrfului A al vectorului se va găsi pe sfera cu centrul în O și cu raza OA. Așadar, $\dot{\overline{a}}$ care este dirijat pe tangenta la (A), în A, va fi perpendicular pe $\overline{a}$, ceea ce se vede și din relația

$$\overline{a}\overline{a}=\text{const},$$

derivată în raport cu timpul

$$\overline{a}\dot{\overline{a}}=0.$$

Fie $\overline{OA}'(=\bar{a}')$ o poziție a vectorului vecină cu OA (fig. 1.23) și fie $\Delta\theta$ unghiul $(\widehat{OA, OA'})$ dintre cele două poziții vecine. Vom avea

$$\bar{a}'-\bar{a}=\Delta\bar{a}, \quad |\Delta\bar{a}|=\bar{a}\Delta\theta,$$

dacă unghiul $\Delta\theta$ este foarte mic; am notat cu a valoarea absolută $|\bar{a}|$ a vectorului $\bar{a}$. Deducem

$$\dot{\bar{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a\Delta\theta}{\Delta t}\bar{\varepsilon}=\frac{a\,d\theta}{dt}\bar{\varepsilon},$$

însemnînd cu $\bar{\varepsilon}$ versorul vectorului $\overline{AA'}$ la limită.

Vom putea scrie, deci

$$\dot{\bar{a}}=a\dot{\theta}\bar{\varepsilon} \tag{1.82}$$

unde $\dot{\theta}$ înseamnă derivata în raport cu timpul a unghiului θ format de vectorul $\bar{a}$ cu o dreaptă fixă din plan. Deducem că *derivata unui vector $\bar{a}$, constant în modul, este un vector normal pe $\bar{a}$ avînd valoarea scalară egală cu modulul a multiplicat cu* $\dot{\theta}$.

Însemnînd cu $\bar{\rho}$ versorul lui $\bar{a}$, vom avea

$$\dot{\bar{a}}=a\dot{\bar{\rho}} \tag{1.83}$$

și deci, în virtutea relației (1.82),

$$\dot{\bar{\rho}}=\dot{\theta}\bar{\varepsilon}, \tag{1.84}$$

formulă care dă derivata unui versor și care de altfel poate fi privită ca un caz particular al formulei (1.82).

A p l i c a ț i i. 9°. Se consideră în planul xOy vectorul de poziție $\overline{OM}=\bar{r}=(A\sin\omega t+B\cos\omega t)\bar{i}+(A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t)\bar{j}$, ($A$, B, A_1, B_1, ω, sînt constante, iar t este timpul).

Se cere viteza $\dot{\bar{r}}$, accelerația $\ddot{\bar{r}}$ și traiectoria mobilului M.

Viteza $\dot{\bar{r}}$ a lui M este

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=\omega\,(A\cos\omega t-B\sin\omega t)\bar{i}+\omega(A_1\cos\omega t-B_1\sin\omega t)\,\bar{j},$$

iar accelerația $\ddot{\bar{r}}$ este

$$\bar{a}=\dot{\bar{v}}=-\omega^2\,(A\sin\omega t+B\cos\omega t)\,\bar{i}-\omega^2\,(A_1\sin\omega t+B_1\cos\omega t)\,\bar{j}.$$

Rezultă:

$$\bar{a}=-\omega^2\bar{r}.$$

Deci direcția accelerației trece necontenit prin originea O, iar mărimea ei este proporțională cu distanța OM.

Traiectoria se obține eliminînd timpul între coordonatele x și y ale punctului M

$$\left(\frac{A_1x-Ay}{A_1B-AB_1}\right)^2+\left(\frac{B_1x-By}{A_1B-AB_1}\right)^2=1,$$

adică o elipsă cu centrul în O.

10°. Se dau vectorii

$$\bar{v}_1 = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{v}_2 = yz\bar{i} + zx\bar{j} + xy\bar{k},$$

în care x, y, z sînt funcții de timp. Să se verifice relațiile

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt}\bar{v}_2 = \frac{d(xyz)}{dt}, \quad \bar{v}_1\frac{d\bar{v}_2}{dt} = 2\frac{d(xyz)}{dt}, \quad \frac{d(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)}{dt} = 3\frac{d(xyz)}{dt}.$$

În adevăr,

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k},$$

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt}\bar{v}_2 = yz\frac{dx}{dt} + zx\frac{dy}{dt} + xy\frac{dz}{dt} = \frac{d(xyz)}{dt} \text{ etc.}$$

Se observă că ultima relație cerută se poate obține prin adunarea primelor două.

§ 29. **Formulele lui Frenet.** Fie (Γ) (fig. 1.24) o curbă ale cărei puncte P sînt determinate de lungimea arcului corespunzător s socotit de la o origine P_0. Vom numi *unghi de contingență* unghiul $\varepsilon \neq 0$ format de versorii $\bar{\tau}$ și $\bar{\tau}_1 (=\bar{\tau}_2)$ în două puncte P, P_1 vecine (arc $PP_1 = \Delta s$). Limita C a raportului $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ cînd Δs tinde către zero,

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta s},$$

se numește *curbura curbei* (Γ) *în punctul* P. O vom presupune totdeauna pozitivă, adică vom presupune că traiectoria nu este rectilinie, ci o curbă avînd un număr finit de puncte de inflexiune (pe care le vom excepta) și că arcele s cresc în sensul indicat de $\bar{\tau}$.

Inversul ρ al mărimii C se numește *raza de curbură* a *curbei* (Γ) *în punctul* P

$$\rho = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\varepsilon}.$$

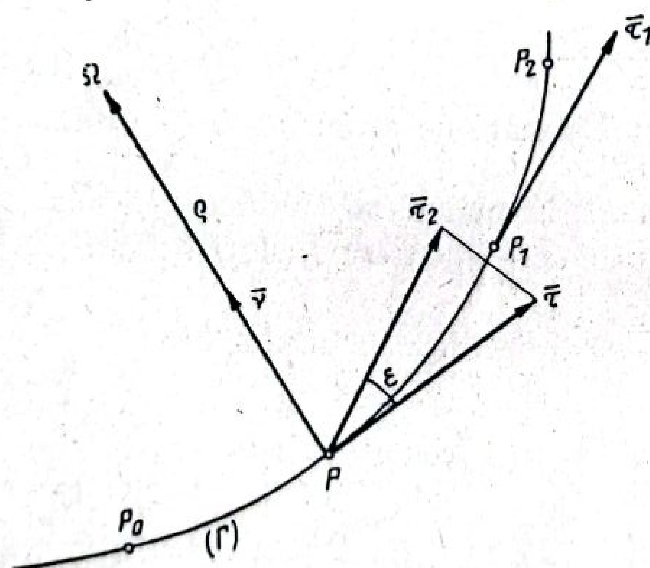


Fig. 1.24

Planul determinat de versorul $\bar{\tau}$ (în P) și de versorul $\bar{\tau}_2$ paralel prin P la $\bar{\tau}_1$ din P_1 tinde către *planul osculator al curbei în* P cînd Δs tinde către zero. Este evident că tot către acest plan tinde și planul ce trece prin $\bar{\tau}$ și P_1, sau, în fine, planul ce trece prin trei puncte P, P_1, P_2, vecine pe curbă, cînd punctele tind să se confunde. În cazul cînd curba (Γ) este plană, planul osculator este chiar planul curbei.

Variația vectorului $\bar{\tau}$ cînd se trece din P în P_1 este vectorul care unește capetele vectorilor $\bar{\tau}$ și $\bar{\tau}_2$, adică un vector așezat în planul $(\bar{\tau}, \bar{\tau}_2)$, avînd valoarea absolută ε. La limită, pentru $\Delta s \to 0$, vom avea

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{\nu} \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s} = C\bar{\nu}, \tag{1.85}$$

unde am însemnat cu $\bar{\nu}$ versorul normalei pe $\bar{\tau}$ așezat în planul osculator al curbei și dirijat înspre concavitatea ei. Axa care trece prin P și care are versorul $\bar{\nu}$ se numește *normala principală a curbei* în punctul P. Relația (1.85), care se mai poate scrie și

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{\nu}, \tag{1.86}$$

este prima formulă a lui *Frenet*. Punctul Ω situat pe normala principală, în sensul lui $\bar{\nu}$, la distanța ρ de P se numește *centru de curbură*.

Fie $\bar{\beta}$ versorul normal pe planul osculator în P, așa fel ca triedrul $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta})$ să fie drept. Vom avea

$$\bar{\beta}\bar{\tau} = 0$$

și deci, prin derivare în raport cu s,

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\beta}}{ds} + \bar{\beta}\frac{d\bar{\tau}}{ds} = 0.$$

Să înlocuim aici pe $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ prin valoarea sa din (1.85). Vom obține

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\beta}}{ds} + C\bar{\beta}\bar{\nu} = 0$$

sau, ținînd seama că $\bar{\beta}\bar{\nu}$ este nul,

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0. \tag{1.87}$$

Pe de altă parte, din relația $\bar{\beta}\bar{\beta} = 1$, deducem, prin derivare în raport cu s,

$$\bar{\beta}\frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0. \tag{1.88}$$

Vectorul $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ este deci normal versorilor $\bar{\tau}$ și $\bar{\beta}$, potrivit relațiilor (1.87) și (1.88); el trebuie, deci, să aibă direcția lui $\bar{\nu}$, adică

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -T\bar{\nu}, \tag{1.89}$$

unde T este un scalar. Semnul lui T este astfel luat, încît T să fie pozitiv pentru o rotație pozitivă a triedrului natural în jurul lui $\bar{\tau}$.

Pentru curbe plane ($d\bar{\beta}=0$) el va fi nul. Făcînd abstracţie de acest caz particular, vom presupune că T este un număr pozitiv sau negativ ($\neq 0$) care se cheamă *torsiunea curbei*. Inversul torsiunii,

$$\rho_1=\frac{1}{T},$$

se numeşte *raza de torsiune a curbei*. Formula (1.89) este a doua formulă a lui *Frenet*.

A treia formulă se deduce din relaţia

$$\bar{\nu}=-\bar{\tau}\times\bar{\beta},$$

prin derivare în raport cu s,

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}=-\frac{d\bar{\tau}}{ds}\times\bar{\beta}-\bar{\tau}\times\frac{d\bar{\beta}}{ds}.$$

Folosind relaţiile (1.85) şi (1.89), egalitatea precedentă devine

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}=-C\bar{\tau}+T\bar{\beta}, \tag{1.90}$$

care este a treia formulă a lui *Frenet*. Scrise laolaltă, ele prezintă o simetrie evidentă

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\bar{\tau}}{ds}=C\bar{\nu}, && C=1/\rho,\\ &\frac{d\bar{\beta}}{ds}=-T\bar{\nu}, && T=1/\rho_1,\\ &\frac{d\bar{\nu}}{ds}=-C\bar{\tau}+T\bar{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{1.91}$$

Axele determinate în punctul P de versorii $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ formează un triedru ortogonal — *triedrul axelor intrinseci ale curbei* (Γ) numit şi *reper natural*. El este un *triedru variabil* de la punct la punct pe curba (Γ), adică un *reper mobil*.

§ 30. **Expresiile scalarilor C şi T.** Din relaţia (1.85) se deduce

$$C\bar{\nu}=\frac{d\bar{\tau}}{ds}.$$

Însă $\bar{\tau}\left(=\frac{d\bar{r}}{ds}=\dot{\bar{r}}\right)$ are proiecţiile x', y', z' pe axele de coordonate, notînd prin accente derivatele în raport cu s. Vom avea, deci,

$$C=(x''^2+y''^2+z''^2)^{1/2}. \tag{1.92}$$

Scalarul T se poate scoate din relaţia (1.90) multiplicînd-o scalar cu $\bar{\beta}$. Vom obţine, astfel

$$T=\bar{\beta}\frac{d\bar{\nu}}{ds},$$

sau, cu (1.86),

$$T=\bar{\beta}(\rho\bar{\tau}''+\rho'\bar{\tau}'), \qquad \rho=1/C.$$

Înlocuind pe $\bar{\beta}$ prin $\bar{\tau}\times\bar{\nu}$, vom avea

$$T=\rho\left(\bar{\tau},\ \bar{\nu},\ \frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}\right)+\rho'\left(\bar{\tau},\ \bar{\nu},\ \frac{d\bar{\tau}}{ds}\right).$$

Dar vectorii $\bar{\nu}$ şi $\bar{\tau}'$ au aceeaşi direcţie în virtutea relaţiei (1.86) şi deci produsul mixt $(\bar{\tau},\ \bar{\nu},\ \bar{\tau}')$ va fi nul. Rezultă

$$T=\rho(\bar{\tau},\ \bar{\nu},\ \bar{\tau}'')$$

sau, cu (1.86) şi cu $\bar{\tau}=\bar{r}'$,

$$T=\rho^2(\bar{r}',\ \bar{r}'',\ \bar{r}'''). \tag{1.93}$$

§ 31. **Diferenţiale.** Cantitatea simbolică

$$d\bar{a}=\frac{d\bar{a}}{dt}\,dt=\dot{\bar{a}}\,dt \tag{1.94}$$

se numeşte *diferenţiala vectorului* $\bar{a}$. Din regulile de derivare date la § 26 se deduc imediat regulile de diferenţiere.

Ca aplicaţie vom stabili o formulă utilă. Produsul scalar $\bar{a}\,d\bar{b}$ se poate scrie

$$\bar{a}\,d\bar{b}=\bar{a}\text{ vers }\bar{a}\,d\,(b\text{ vers }\bar{b}),$$

sau încă

$$\bar{a}\,d\bar{b}=\bar{a}\,db\text{ vers }\bar{a}\text{ vers }\bar{b}+\bar{a}\,\bar{b}\text{ vers }\bar{a}\,d\,(\text{vers }\bar{b}).$$

Dacă cei doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ au aceeaşi direcţie, ultimul termen din dreapta va fi nul, aşa încît vom obţine

$$\bar{a}\,d\bar{b}=\pm a\,db. \tag{1.95}$$

Vom lua în dreapta semnul + sau − după cum vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ au sau nu acelaşi sens.

§ 32. **Integrale.** Analog integralelor din Analiza cantităţilor scalare, se pot introduce integrale şi în calculul vectorial.

Fie $\bar{a}$ un vector, funcţie dată de parametrul t în intervalul închis $(t_0,\ t)$. Divizăm intervalul de la t_0 la t în n intervale parţiale $(t_{i-1},\ t_i)$, $(i=1,\ 2,\ldots,\ \ldots,\ n,\ t_n=t)$ şi facem suma

$$\sum_{i=2}^{i=n}\bar{a}_i(t_i-t_{i-1}),$$

presupunînd că $\bar{a}_i$ este valoarea medie a vectorului $\bar{a}$ în intervalul $(t_{i-1},\ t_i)$. Această sumă poate tinde către o limită cînd n tinde către infinit, astfel

ca fiecare dintre cele n intervale să tindă către zero, oricare ar fi modul de diviziune a intervalului (t_0, t). Cînd limita există, ea se înseamnă cu

$$\int_{t_0}^{t} \bar{a}\, dt$$

şi se citeşte *integrala din* $\bar{a}$ dt *de la* t_0 *la* t.

Integrala aceasta este, evident, un vector. Să-l notăm cu $\bar{A}$.

Dacă dăm, acum, limitei superioare t o creştere dt şi socotim creşterea lui $\bar{A}$ corespunzătoare acestei creşteri dt, obţinem

$$d\bar{A} = \bar{a}\, dt,$$

de unde deducem că integrarea şi diferenţierea sînt două operaţii inverse una alteia. Regăsim astfel regula de integrare din analiza scalară.

Este evident că proiecţiile vectorului $\bar{A}$ pe cele trei axe de coordonate sînt respectiv

$$\int_{t_0}^{t} a_x\, dt, \quad \int_{t_0}^{t} a_y\, dt, \quad \int_{t_0}^{t} a_z\, dt,$$

dacă însemnăm cu a_x, a_y, a_z proiecţiile vectorului $\bar{a}$ pe axe. Deci vom putea scrie

$$\bar{A} = \bar{i} \int_{t_0}^{t} a_x\, dt + \bar{j} \int_{t_0}^{t} a_y\, dt + \bar{k} \int_{t_0}^{t} a_z\, dt.$$

§ 33. **Lucrul mecanic.** O altă formă de integrală ce se întîlneşte adesea este dată de noţiunea de *lucru mecanic*.

Pentru a introduce noţiunea foarte importantă de lucru mecanic, vom considera drumul rectiliniu PP' (fig. 1.25, *a*) descris de mobil în sensul de la P la P', şi-i vom asocia un vector *constant* $\bar{F}$, de exemplu o forţă. Vom numi *lucru mecanic al vectorului* $\bar{F}$ pe drumul PP' produsul scalar dintre vectorii $\bar{F}$ şi PP',

$$L_{PP'} = \bar{F} \cdot \overline{PP'}.$$

În cazul general cînd mobilul descrie un arc de curbă AB (fig. 1.25, *b*) căreia îi este asociat în fiecare punct al ei un vector (constant sau variabil) $\bar{F}$, vom înscrie în arcul AB de curbă o linie poligonală $AA_1A_2 \ldots A_nB$ şi vom face suma produselor scalare

$$\bar{F}_i \overline{A_i A_{i+1}}, \ (A_0 \equiv A, \ A_{n+1} \equiv B),$$

însemnînd cu $\bar{F}_i$ valoarea forţei în punctul A_i. Făcînd acum pe n să tindă către infinit şi în acelaşi timp fiecare latură A_iA_{i+1} către zero, suma poate tinde către o limită. Această limită, cînd există, se numeşte *lucrul mecanic al vectorului* $\bar{F}$ *pe drumul* AB şi se înseamnă

$$L_{AB} = \int_{(AB)} \bar{F}\, d\bar{r}. \qquad (1.96)$$

Expresia din dreapta este o integrală *curbilinie* de-a lungul liniei AB. Elementul de integrare $\bar{F}\,d\bar{r}$ se numeşte *lucrul mecanic elementar al vectorului* $\bar{F}$ şi se notează

$$dL=\bar{F}\cdot d\bar{r}. \tag{1.97}$$

Dacă F_x, F_y, F_z sînt proiecţiile vectorului $\bar{F}$, iar dx, dy, dz ale vectorului $d\bar{r}$ pe cele trei axe de coordonate, lucrul mecanic elementar se mai poate scrie

$$dL=\bar{F}\,d\bar{r}=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz. \tag{1.98}$$

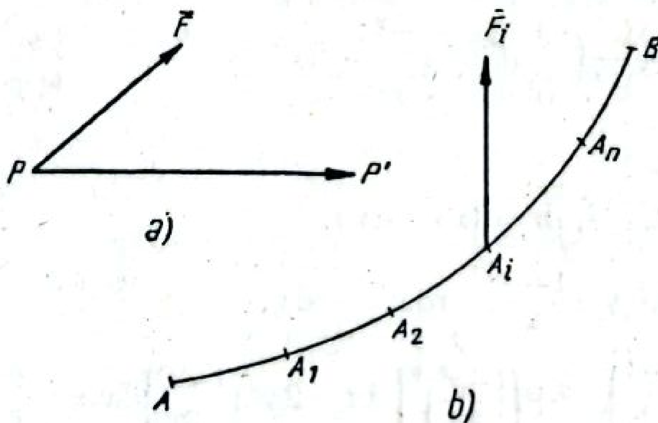


Fig. 1.25

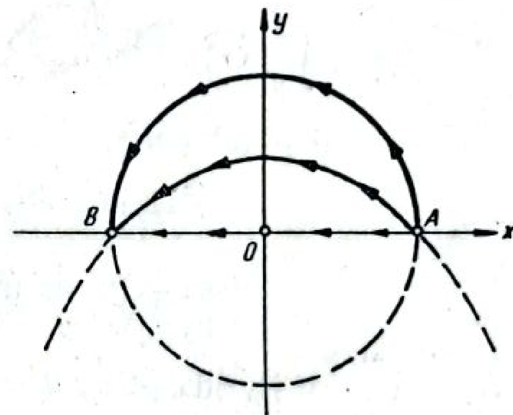


Fig. 1.26

El este o mărime scalară, aşadar un invariant al grupului de transformări ale axelor de coordonate.

Ţinînd seama de relaţia

$$d\bar{r}=\bar{v}\,dt,$$

unde $\bar{v}$ este viteza mobilului pe traiectorie, expresia lucrului mecanic devine

$$dL=\bar{F}\cdot\bar{v}\,dt. \tag{1.99}$$

În cazul cînd vectorul $\bar{F}$ este suma mai multor vectori $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$, putem enunţa următoarea proprietate:

Lucrul mecanic al sumei a n vectori este egal cu suma lucrurilor mecanice ale componentelor pe drumul considerat. Justificarea ei apare evidentă dacă ţinem seama de proprietatea de distributivitate a produsului scalar.

De cele mai multe ori vectorii $\bar{F}_i$ sînt forţe. Vom da mai departe (§ 36) exemple de lucru mecanic de forţe.

A p l i c a ţ i e. 11°. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei plane

$$\bar{F}=(x^2+y^2)\bar{i}+2xy\bar{j}$$

(axele de coordonate fiind ortogonale), cînd punctul său de aplicaţie se deplasează:

a) pe axa Ox de la $A(x=+1)$ pînă la $B(x=-1)$;
b) pe semicercul $x^2+y^2=1$ între aceleaşi puncte;
c) pe parabola $x^2=1-2y$ între aceleaşi puncte şi să se explice rezultatul.

Se utilizează formula (1.96).

În cazul dreptei AB:

$$\overline{F}=x^2\overline{i}, \quad d\overline{r}=dx\,\overline{i},$$

$$L_{AB}=\int_{+1}^{-1}\overline{F}\,d\overline{r}=\int_{+1}^{-1}x^2\,dx=-\frac{2}{3}.$$

În cazul semicercului:

$$\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}+2xy\overline{j}, \quad d\overline{r}=dx\,\overline{i}+dy\,\overline{j}, \quad x^2+y^2=1, \quad x\,dx+y\,dy=0,$$

$$L_{AB}=\int_{+1}^{-1}(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=\int_{+1}^{-1}dx+\int_{+1}^{-1}-2x^2\,dx=-\frac{2}{3}.$$

În cazul parabolei:

$$\overline{F}=(x^2+y^2)\overline{i}+2xy\overline{j}, \quad d\overline{r}=dx\,\overline{i}+dy\,\overline{j},$$

$$x^2=1-2y, \text{ de unde } y=\frac{1-x^2}{2}, \quad x\,dx=-dy,$$

$$L_{AB}=\int_{+1}^{-1}(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=\int_{+1}^{-1}\left[x^2+\left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2\right]dx-2x^2\left(\frac{1-x^2}{2}\right)dx=-\frac{2}{3}.$$

Rezultatul se explică prin faptul că expresia (1.98)

$$dL=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz=(x^2+y^2)dx+2xy\,dy$$

este diferențiala exactă a funcției

$$U(x,\ y)=\frac{x^3}{3}+xy^2$$

și deci

$$L_{AB}=U(-1,0)-U(+1,0)=-\frac{2}{3}.$$

§ 34. **Cîmp de vectori.** Dacă un vector poate fi determinat pentru orice punct din spațiu ca funcție de poziția punctului, totalitatea valorilor pe care le ia vectorul în tot spațiul constituie *cîmpul vectorului*. De pildă, vectorul de poziție $\overline{r}$, care unește originea O cu un punct A din spațiu, are un cîmp ușor de determinat. Cele trei proiecții ale lui $\overline{r}$ pe axele de coordonate sînt coordonatele x, y, z ale punctului A.

Forțele din Mecanică ne dau prilejul definiției unor atare cîmpuri de vectori, adică a *cîmpurilor de forțe*. De exemplu *greutatea corpurilor* care, după cum se știe, este dirijată pe verticală în jos, va avea într-un spațiu finit, redus, cîmpul — pentru un corp de greutate G — format de un vector $\overline{G}$ constant în mărime, direcție și sens pentru tot spațiul. El este un cîmp constant sau un cîmp uniform.

Alt exemplu ni-l oferă *atracția proporțională cu distanța* pe care ar exercita-o originea O a axelor de coordonate asupra unui punct material

de vector de poziţie $\bar{r}(x, y, z)$, adică o *forţă elastică*, întrebuinţînd un nume consacrat în Mecanică. Cîmpul de vectori corespunzători va fi reprezentat prin funcţia vectorială

$$\bar{F} = -k\bar{r},$$

unde k este o constantă scalară pozitivă. Proiecţiile cîmpului pe cele trei axe de coordonate sînt respectiv

$$-kx, \quad -ky, \quad -kz.$$

Dacă în originea O a axelor de coordonate ar fi plasat un punct de masă M acesta ar exercita o *atracţie newtoniană* $\bar{F}$ asupra punctului material P de masă m, situat la distanţa r de O $(OP=r)$, forţa $\bar{F}$ avînd expresia

$$\bar{F} = -f\frac{Mm}{r^2}\bar{\rho}, \qquad \bar{\rho} = \text{vers } \bar{r} = \text{vers } \overline{OP},$$

unde am însemnat cu f o constantă pozitivă. Cîmpul acestui vector $\bar{F}$ are proiecţiile

$$-f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r}, \qquad -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{y}{r}, \qquad -f\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{z}{r},$$

respectiv pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz.

În *electrodinamică, vectorul cîmp electric* $\bar{E}$ şi *vectorul cîmp magnetic* $\bar{H}$ dau naştere în mod analog *cîmpului electromagnetic* care joacă un rol fundamental în *teoria electricităţii*.

Linii de vectori. Linii de forţă. Curbele care au tangentele dirijate după vectorii cîmpului formează o *congruenţă*; ele poartă numele de *linii de vectori*.

Determinarea lor analitică se obţine prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Dacă v_x, v_y, v_z reprezintă proiecţiile vectorului $\bar{v}$ pe axe, atunci *liniile* corespunzătoare cîmpului $\bar{v}$ vor fi date de ecuaţiile

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \tag{1.100}$$

unde v_x, v_y, v_z trebuie date ca funcţii de x, y, z.

În cazul cînd vectorul $\bar{v}$ este o forţă $\bar{F}$, liniile respective se numesc *linii de forţă*.

Exemple. Forţa greutăţii raportată la un sistem de axe avînd pe Oz dirijat vertical în sus, $\bar{G}(0, 0, -G)$, ne va da liniile de forţă satisfăcînd sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-G},$$

adică congruenţa de drepte

$$x = c_1, \quad y = c_2,$$

c_1, c_2 fiind constante arbitrare. Deci liniile de forţă vor fi formate de congruenţa dreptelor verticale.

Liniile corespunzătoare forţei elastice vor satisface sistemul

$$\frac{dx}{-kx}=\frac{dy}{-ky}=\frac{dz}{-kz},$$

adică vor fi date de ecuaţiile

$$y=c_1x, \qquad z=c_2x,$$

c_1, c_2 fiind constante arbitrare.

Deci liniile de forţă, în acest caz, vor fi formate de congruenţa de raze pornind din origine.

Forţa gravitaţiei universale, avînd punctul atractiv în origine, conduce la aceleaşi linii de forţă ca şi în cazul forţei elastice.

Liniile de forţă joacă un rol important în Fizică şi în Electricitate.

Aplicaţii. 12°. Se dă în planul xOy cîmpul de forţe

$$\overline{F}=\frac{1}{y}\left(ax+\frac{b}{y}\right)\overline{i}+\frac{1}{x}\left(ay+\frac{b}{x}\right)\overline{j}.$$

Să se găsească linia de forţă care trece prin punctul $M(x_0, y_0)$.

Ecuaţia diferenţială a liniei de forţă este

$$\frac{dx}{\frac{1}{y}\left(ax+\frac{b}{y}\right)}=\frac{dy}{\frac{1}{x}\left(ay+\frac{b}{x}\right)},$$

de unde se obţine linia de forţă căutată

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{y_0}.$$

Expresia $axy+b$ cu care s-a simplificat ecuaţia diferenţială, egalată cu zero, reprezintă locul geometric al punctelor în care forţa este nulă.

13°. Se consideră cîmpul de forţe

$$\overline{F}=-\frac{\lambda y}{x^{\lambda+1}}\overline{i}+\frac{1}{x^{\lambda}}\overline{j}.$$

Să se determine λ astfel, încît liniile de forţă să fie:

a) cercuri,
b) elipse,
c) hiperbole.

Liniile de forţă sînt date de

$$\frac{dx}{-\frac{\lambda y}{x^{\lambda+1}}}=\frac{dy}{\frac{1}{x^{\lambda}}},$$

de unde

$$x^2+\lambda y^2=c^2.$$

Pentru $\lambda=1$, liniile de forţă sînt cercuri, pentru $\lambda>0$ sînt elipse, pentru $\lambda<0$ sînt hiperbole.

§ 35. Gradient. Nabla. Funcţie de forţă. Potenţial. Se poate obţine un cîmp de vectori în mod foarte simplu în felul următor.

Fie $U(x, y, z)$ o funcţie scalară, uniformă şi derivabilă de coordonatele x, y, z într-un anumit domeniu D (o porţiune a spaţiului). Derivatele parţiale ale lui U în raport cu x, y, z sînt în fiecare punct trei mărimi care satisfac formulele (1.10) de transformare în cazul unei schimbări de axe, adică $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ se comportă ca proiecţiile unui vector la o schimbare de axe de coordonate. Această proprietate se verifică imediat dacă ţinem seamă de formulele (1.8) de trecere de la coordonatele x, y, z la coordonatele x', y', z'. Rezultă de aici că derivatele $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ pot fi considerate ca definind un vector cu aceste proiecţii pe axele de coordonate. Acest vector se numeşte gradient al funcţiei U. Scriem

$$\bar{F}=\text{grad}\, U \tag{1 101}$$

sau

$$\bar{F}=\nabla U, \tag{1.102}$$

unde am pus

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.103}$$

Semnul ∇ se citeşte „nabla", El este un *operator vectorial* care transformă un scalar într-un vector; se mai numeşte şi *operatorul lui Hamilton*.

Gradientul joacă un rol important, mai ales în reprezentarea anumitor forţe, $\bar{F}=\text{grad}\, U$. În acel caz U se numeşte *funcţie de forţă*.

Funcţia $-U$ pe care o vom însemna cu V,

$$-U=V, \tag{1.104}$$

se numeşte *energie potenţială* sau simplu *potenţial* (această din urmă numire, întrebuinţată des în electricitate, fiind rezervată mai ales cazului în care masa punctului material este egală cu unitatea). Vom avea, deci,

$$\bar{F}=-\text{grad}\, V. \tag{1.105}$$

Nu orice forţă se poate pune sub formă de gradient. Forţele care admit o astfel de reprezentare se numesc *forţe conservative*, iar celelalte se numesc *forţe neconservative*. Se obişnuieşte a se spune că forţele conservative *admit o funcţie de forţă* sau că ele *derivă dintr-un potenţial*.

Este uşor de verificat că suma a două forţe conservative este tot o forţă conservativă. Dacă U_1 şi U_2 sînt funcţiile de forţă ale celor două componente, atunci U_1+U_2 este funcţia de forţă a rezultantei. Aceasta revine la a spune că operatorul ∇ este distributiv

$$\nabla(U_1+U_2)=\nabla U_1+\nabla U_2.$$

Să considerăm de pildă greutatea G raportată la un sistem de axe avînd pe Oz dirijat vertical în sus. Proiecţiile forţei G, pe cele trei axe de coordonate, vor fi

$$0, \qquad 0, \qquad -G.$$

Evident că putem lua pe $-Gz$ drept funcţie de forţă corespunzătoare, încît vom avea

$$\overline{G}=\nabla(-Gz)=-\nabla Gz=-G\overline{k}.$$

Alt exemplu ni-l oferă forţa elastică

$$\overline{F}=-k\overline{r}.$$

Proiecţiile ei fiind

$$-kx, \qquad -ky, \qquad -kz,$$

funcţia de forţă va fi, evident,

$$-k\,\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=-\frac{kr^2}{2},$$

încît vom avea

$$\overline{F}=-\nabla\frac{k\,r^2}{2}.$$

Pentru forţa de atracţie newtoniană considerată la § 34 vom avea funcţia de forţă corespunzătoare

$$U=f\frac{Mm}{r}, \text{ deci } \overline{F}=\text{grad}\left(f\frac{Mm}{r}\right).$$

Funcţia U se poate determina (cînd este posibil) cu aproximaţia unei constante aditive care, se înţelege, nu influenţează valoarea componentelor forţei. Bunăoară, în exemplele date, putem lua $-Gz+C$, respectiv $-\frac{kr^2}{2}+C$, drept funcţii de forţă, C fiind o constantă arbitrară.

Însă trebuie să menţionăm încă o dată că numai în mod excepţional poate fi reprezentată o forţă $\overline{F}$ prin gradientul unei funcţii scalare de x, y, z. Cu alte cuvinte, pentru ca o forţă să fie conservativă, proiecţiile ei pe axe trebuie să îndeplinească anumite condiţii care, după cum se ştie din Analiză, sînt

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}. \tag{1.106}$$

Ele sînt suficiente pentru a putea determina pe U. Funcţia U se va obţine integrînd ecuaţia diferenţială

$$\mathrm{d}U=F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z.$$

A p l i c a ţ i i. 14°. Să se determine gradienţii funcţiilor:

$$U_1=x(x-a)+y(y-b)+z(z-c),$$

$$U_2=-\frac{x^2+y^2+z^2}{2x^2y^2z^2},$$

$$U_3=\ln(xyz).$$

Se aplică funcţiilor operatorul ∇ şi se obţine

$$\nabla U_1=(2x-a)\bar{i}+(2y-b)\bar{j}+(2z-c)\bar{k},$$

$$\nabla U_2=\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\bar{i}+\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)\bar{j}+\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\bar{k},$$

$$\nabla U_3=\frac{1}{x}\bar{i}+\frac{1}{y}\bar{j}+\frac{1}{z}\bar{k}.$$

15°. Să se calculeze potenţialul cîmpului de vectori

$$\bar{v}=\frac{y^2+z^2}{x}\bar{i}+(2y\ \ln x)\bar{j}+(2z\ \ln x)\bar{k}.$$

Notînd cu V potenţialul, avem

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{y^2+z^2}{x},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=-2y\ \ln x,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-2z\ \ln x.$$

Rezultă

$$V=-(y^2+z^2)\ln x.$$

§ 36. **Suprafeţe echipotenţiale.** Să considerăm două puncte în spaţiu P şi P' vecine, avînd coordonatele x, y, z, respectiv $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Valorile pe care le ia U în aceste două puncte sînt $U(x, y, z)$, respectiv $U(x+dx, y+dy, z+dz)$. Între ele există relaţia dată de o cunoscută dezvoltare în serie pe care o vom limita la termenii de ordinul întîi

$$U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)=U(x, y, z)+\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

adică

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

notînd cu dU variaţia funcţiei U corespunzătoare deplasării din P în P'.

Să însemnăm vectorul $\overline{PP'}$ cu $d\bar{r}$. Vom putea scrie

$$dU=\text{grad}\ U\,d\bar{r}=\bar{F}\ d\bar{r}=F_r\,dr,$$

dacă notăm cu $\bar{F}$ forţa egală cu grad U, F_r fiind proiecţia vectorului $\bar{F}$ pe direcţia şi sensul vectorului $\overline{PP'}$, iar dr, lungimea PP'. Relaţia precedentă ne dă

$$\frac{dU}{dr}=F_r. \tag{1.107}$$

Mărimea $\frac{dU}{dr}$ se numeşte derivata funcţiei U în sensul $d\bar{r}$ $(=\overline{PP'})$, încît relaţia precedentă se poate exprima în felul următor: *derivata lui U în sensul $d\bar{r}$ este egală cu proiecţia forţei pe direcţie*. Această proprietate a funcţiei de forţă este o generalizare a relaţiilor de definiţie a vectorului grad U,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_z.$$

Ea ne confirmă caracterul vectorial al mărimii ∇U.

Să considerăm acum suprafaţa

$$U(x, y, z)=c, \tag{1.108}$$

unde c este o constantă. Această suprafaţă are proprietatea evidentă că funcţia de forţă U ia aceeaşi valoare în toate punctele ei. O astfel de suprafaţă se numeşte *suprafaţă echipotenţială* sau *suprafaţă de nivel*. Numele de „echipotenţială" ce i se dă este în legătură cu proprietatea ei de a reprezenta locul punctelor de acelaşi potenţial.

Două astfel de suprafeţe care corespund la două constante diferite C_1 şi C_2 nu pot avea nici un punct comun. Într-adevăr, dacă ar exista un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ comun celor două suprafeţe, ar urma să avem

$$U(x_0, y_0, z_0)=C_1,$$
$$U(x_0, y_0, z_0)=C_2,$$

de unde ar rezulta

$$C_1=C_2,$$

ceea ce contrazice ipoteza $C_1 \neq C_2$ (funcţia U fiind presupusă uniformă).

În cazul *greutăţii* $\overline{G}$, suprafeţele echipotenţiale sînt planele orizontale, iar în cazul *forţei elastice*, sau al *forţei de atracţie gravitaţionale*, suprafeţele echipotenţiale sînt sferele concentrice, cu centrul în punctul atractiv O.

Să presupunem acum că deplasarea din P în P', considerată mai înainte, se face chiar pe o suprafaţă echipotenţială. Atunci variaţia dU a funcţiei este, evident, nulă, încît relaţia (1.107) devine

$$F_r=0.$$

Cu alte cuvinte, *proiecţia forţei $\overline{F}$ pe orice direcţie situată pe o suprafaţă echipotenţială este nulă*. Aceasta înseamnă că forţa $\overline{F}$ este normală la suprafaţa echipotenţială. Aşadar:

Forţa $\overline{F}$ care derivă din funcţia de forţă U este normală la suprafaţa echipotenţială

$$U=C.$$

Congruenţa liniilor de forţă este normală familiei de suprafeţe echipotenţiale; liniile de forţă sînt, deci, *traiectoriile ortogonale* ale familiei de suprafeţe date de (1.108).

Forţa este dirijată în sensul în care U creşte şi, după cum se vede din relaţia (1.107), este aplicată în direcţia normalei ($d\bar{r}=d\bar{n}$)

$$\frac{dU}{dn}=F.$$

Dacă F este pozitiv, trebuie ca şi dU să fie pozitiv, adică F indică sensul de creştere al funcţiei U.

A p l i c a ţ i e. 16°. Se consideră cîmpul plan de vectori

$$\bar{v}=(x^3-kxy^2)\bar{i}+(y^3-kx^2y)\bar{j},$$

unde k este o constantă. Să se determine k astfel, încît curbele de nivel să fie:

a) cercuri cu centrul în origine,

b) hiperbole echilatere.

În acest caz,

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x}=-2kxy.$$

Deci

$$dU=v_x dx+v_y\,dy=d\left(\frac{x^4+y^4}{4}-\frac{kx^2y^2}{2}\right),$$

$$U=\frac{x^4+y^4}{4}-\frac{k\,x^2y^2}{2}+\text{const}.$$

Curbele de nivel:

$$U\equiv\frac{x^4+y^4}{4}-\frac{k\,x^2y^2}{2}=\text{const}.$$

Pentru $k=-1$ se obţin cercurile cerute

$$x^2+y^2=\text{const}.$$

Pentru $k=+1$ se obţin hiperbolele cerute

$$x^2-y^2=\text{const}.$$

§ 37. Notaţii vectoriale. Operatorul *nabla* are caracterul unui vector, astfel încît se pot face operaţii cu ∇ aşa cum se fac de obicei cu un vector. În special, putem face produsul scalar sau vectorial al vectorului ∇ cu un alt vector $\bar{a}$. Pentru produsul scalar vom obţine

$$\nabla\bar{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

un scalar care este cunoscut în analiza vectorială sub numele de *divergenţă* şi se înseamnă obişnuit div $\bar{a}$.

Cîteodată se întrebuințează și produsul scalar

$$\bar{a}\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z},$$

care reprezintă un *operator diferențial scalar*.

Produsul vectorial dintre ∇ și $\bar{a}$,

$$\nabla \times \bar{a} = \bar{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right),$$

reprezintă un vector cunoscut sub numele de *rotor* de $\bar{a}$; notația obișnuită: rot $\bar{a}$.

Simbolul $\bar{a} \times \nabla$ reprezintă un operator diferențial vectorial

$$\bar{a} \times \nabla = \bar{i}\left(a_y \frac{\partial}{\partial z} - a_z \frac{\partial}{\partial y}\right) + \bar{j}\left(a_z \frac{\partial}{\partial x} - a_x \frac{\partial}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(a_x \frac{\partial}{\partial y} - a_y \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

În fine, produsul scalar $\nabla\nabla = \nabla^2$ este egal cu operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

care se mai însemnă și cu Δ și se numește operatorul lui *Laplace* sau *Laplaceian*.

Operatorul Δ este echivalent cu aplicarea unei divergențe la un gradient

$$\Delta U = \text{div (grad } U).$$

Aceste mărimi au o aplicație curentă mai ales în Electricitate și în Hidrodinamică.

Iată cîteva formule utile care se pot verifica ușor:

1°. div (rot $\bar{a}$) = 0 sau $\nabla(\nabla \times \bar{a}) = 0$

2°. rot (grad U) = 0 sau $\nabla \times (\nabla U) = 0$

3°. grad (div $\bar{a}$) = rot (rot $\bar{a}$) + $\nabla\bar{a} = \nabla(\nabla\bar{a})$

4°. grad $(UV) = U$ grad $V + V$ grad U sau $\nabla(UV) = U(\nabla U) + V(\nabla U)$

5°. grad $[f(U)] = f'(U)$ grad U

6°. $\nabla(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{a}\nabla)\bar{b} + (\bar{b}\nabla)\bar{a} + \bar{a} \times (\nabla \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\nabla \times \bar{a})$

7°. $\nabla(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{b}(\nabla \times \bar{a}) - \bar{a}(\nabla \times \bar{b})$

8°. $\bar{a}(\nabla \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \nabla)\bar{b}$

9°. $\nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b}\nabla + \nabla\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\nabla + \nabla\bar{a})\bar{b} =$

$$= b_x \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} + \bar{a} \text{ div } \bar{b} - \left(a_x \frac{\partial b}{\partial x} + a_y \frac{\partial b}{\partial y} + a_z \frac{\partial b}{\partial z}\right) - \bar{b} \text{ div } \bar{a}$$

10°. $\nabla(U\bar{a}) = U(\nabla\bar{a}) + \bar{a}(\nabla U)$

11°. $\nabla \times (U\bar{a}) = U(\nabla \times \bar{a}) - \bar{a} \times (\nabla U)$

12°. $\nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla(\nabla\bar{a}) - \nabla^2\bar{a} =$ rot (rot $\bar{a}$)

13°. $(\bar{a}\nabla)\bar{a} = \frac{1}{2}\nabla\bar{a}^2 - \bar{a} \times (\nabla \times \bar{a})$

Aplicații. 17°. Se dau cîmpurile de vectori:

$$\bar{v}_1=(ax+b)\bar{i}+(cy+d)\bar{j}-(a+c)z\bar{k},$$

$$\bar{v}_2=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\bar{i}+\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\bar{j}+\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\bar{k}.$$

Să se calculeze:

$$\nabla\bar{v}_1,\ \nabla\bar{v}_2,\ \nabla\times\bar{v}_1,\ \nabla\times\bar{v}_2$$

(divergența și rotorul).

Prin aplicarea operatorului diferențial și vectorial, se obține

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x}=a,\ \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}=c,\ \frac{\partial v_{1z}}{\partial z}=-(a+c),$$

$$\nabla\bar{v}_1=a+c-(a+c)=0,$$

$$\frac{\partial v_{1z}}{\partial y}=\frac{\partial v_{1y}}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v_{1x}}{\partial z}=\frac{\partial v_{1z}}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v_{1y}}{\partial x}=\frac{\partial v_{1x}}{\partial y}=0,$$

$$\nabla\times\bar{v}_1=0.$$

Analog, $\nabla\bar{v}_2=0,\ \nabla\times\bar{v}_2=0.$

18°. Să se calculeze Laplaceienii funcțiilor

$$U_1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\quad U_2=\ln(x^2+y^2+z^2),\quad U_3=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Se obține

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3}\ \text{etc.}$$

$$\Delta U_1=2\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right).$$

Analog,

$$\Delta U_2=\frac{2}{x^2+y^2+z^2},\ \Delta U_3=0.$$

19°. Să se calculeze Laplaceianul $\Delta\bar{V}$ al vectorului

$$\bar{V}=\frac{x^2y}{z}\bar{i}+\frac{y^2z}{x}\bar{j}+\frac{z^2x}{y}\bar{k}$$

și să se verifice relația

$$\Delta\bar{V}=\text{grad}\ (\text{div}\ \bar{V})-\text{rot}\ (\text{rot}\ \bar{V}).$$

Avem

$$\Delta\bar{V}=\Delta V_x\bar{i}+\Delta V_y\bar{j}+\Delta V_z\bar{k},$$

adică

$$\Delta\bar{V}=\frac{2y}{z}\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)\bar{i}+2\frac{z}{x}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\bar{j}+2\frac{x}{y}\left(1+\frac{z^2}{y^2}\right)\bar{k}.$$

Pe de altă parte

$$\operatorname{div} \bar{V}=2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right),$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \bar{V}=2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-\frac{yz}{x}\right)\bar{i}+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-\frac{zx}{y}\right)\bar{j}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{xy}{z}\right)\bar{k},$$

$$\operatorname{rot} \bar{V}=-\left(\frac{z^2x}{y^2}+\frac{y^2}{x}\right)\bar{i}-\left(\frac{x^2y}{z^2}+\frac{z^2}{y}\right)\bar{j}-\left(\frac{y^2z}{x^2}+\frac{x^2}{z}\right)\bar{k},$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{V})=2\left(-\frac{yz}{x^2}-\frac{x^2y}{z^3}+\frac{z}{y}\right)\bar{i}+2\left(-\frac{zx}{y^2}-\frac{y^2z}{x^3}+\frac{x}{z}\right)\bar{j}+2\left(-\frac{xy}{z^2}-\frac{z^2x}{y^3}+\frac{y}{x}\right)\bar{k}.$$

Relaţia pentru verificare se mai poate scrie

$$\Delta\bar{V}=\nabla(\nabla\bar{V})-\nabla\times(\nabla\times\bar{V}).$$

H. NOŢIUNI DE TEORIA GEOMETRICĂ A ŞURUBURILOR

§ 38. Noţiunea de şurub. În capitolul precedent s-a tratat problema sistemelor de vectori alunecători şi s-a arătat că pentru ca două asemenea sisteme să fie echivalente este necesar şi suficient ca ele să aibă într-un anumit punct O acelaşi torsor, adică acelaşi vector rezultant şi acelaşi moment rezultant. S-a arătat că, dacă reducerea se face în raport cu un punct de pe axa centrală a sistemului, atunci cei doi vectori, $\bar{R}$ şi $\bar{M}_r$, sînt coliniari.

Putem, pe baza acestor consideraţiuni să grupăm sistemele de vectori în clase de echivalenţă, adică să punem împreună toate sistemele care au acelaşi torsor în punctul O (sau aceeaşi axă centrală şi aceleaşi elemente $\bar{R}$ şi $\bar{M}_r$). Din punct de vedere al efectului pe care un sistem de forţe îl are asupra unui rigid, aşa cum se va arăta în dinamică, nu este esenţială structura sistemului de forţe (numărul de forţe, modulul, suporturile şi sensurile lor) ci torsorul său. Astfel noţiunea de torsor devine extrem de importantă în mecanică.

În anumite probleme speciale de mecanică teoretică şi aplicată, cum ar fi aceea a formulării generale a condiţiilor de echilibru ale unui rigid, aceea a condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească suporturile a n forţe în echilibru, a condiţiilor pe care trebuie să le îndeplinească suporturile reacţiunilor unor reazeme simple pentru a imobiliza strict un rigid, problema mobilităţii unui lanţ cinematic etc. este necesară însă o noţiune mai generală decît aceea de torsor şi anume aceea de *şurub* (din punct de vedere geometric).

Pentru a ajunge la noţiunea de şurub, vom considera o mulţime formată din torsori, de exemplu sub forma lor minimă. Un torsor din această mulţime poate fi caracterizat, aşa cum s-a arătat mai sus, prin axa sa centrală Δ, prin vectorul rezultant $\bar{R}$ şi prin momentul rezultant minim $\bar{M}_r$. În locul a doi vectori, dat fiind faptul că ei sînt coliniari, putem utiliza numai pe unul dintre ei, de exemplu vectorul rezultant $\bar{R}$ şi raportul dintre valorile vectorilor $\bar{M}_r$ şi $\bar{R}$, raport ce poartă numele de parametrul şurubului şi pe care-l vom nota cu s. Ca urmare un torsor poate fi reprezentat prin ansamblul $(\Delta, \bar{R}, s)$.

Să grupăm acum în aceeaşi clasă toţi torsorii care au aceeaşi axă centrală (Δ) şi acelaşi pas s, vectorii $\bar{R}$ putînd diferi de la un torsor la altul. Se ajunge astfel la noţiunea de şurub (din punct de vedere geometric). Pentru a sesiza şi mai bine această noţiune să considerăm că vectorul $\bar{R}$ ar reprezenta o viteză unghiulară, iar vectorul $\bar{M}_r$ o viteză de translaţie. Aceşti doi vectori, împreună pot caracteriza mişcarea unui şurub obişnuit, care înaintează şi se roteşte în jurul aceleiaşi axe (Δ).

Un anumit şurub se poate roti cu diferite viteze unghiulare. Mărimea vitezei unghiulare nu constituie deci o caracteristică a şurubului. Caracteristic este faptul că la fiecare

viteză unghiulară imprimată şurubului, acesta înaintează cu o viteză bine determinată, proporţională cu viteza unghiulară, factorul de proporţionalitate fiind parametrul s.

Definiţia geometrică a şurubului apare atunci în mod natural *ca fiind elementul caracterizat prin ansamblul* (Δ, s) *format de o dreaptă* Δ — *axa centrală a şurubului — şi un scalar* s — *parametrul şurubului*.

Dacă $s>0$ şurubul se zice „drept", dacă $s<0$ şurubul se zice „sting", iar dacă $s=0$ atunci şurubul degenerează într-o dreaptă. Aşadar, dreptele pot fi privite din punctul de vedere al teoriei şuruburilor ca elemente geometrice particulare. Multe din proprietăţile mulţimilor de şuruburi pot fi particularizate pentru mulţimile de drepte.

Din definiţia dată mai sus şurubului rezultă că toţi torsorii care au aceeaşi axă centrală şi vectorii $\overline{M}_r$ şi $\overline{R}$ în acelaşi raport s, definesc un acelaşi şurub. Altfel spus vectorii $\lambda\overline{R}$ şi $\lambda\overline{M}_r$, unde λ este un parametru variabil, diferit de zero, împreună cu axa Δ definesc acelaşi şurub. Dacă în loc să folosim torsorul minim folosim torsorul într-un punct O, atunci vom putea spune că şurubul este elementul geometric comun mulţimii de torsori $(\lambda\overline{R}, \lambda\overline{M}_0)$ unde $\lambda\neq 0$ este un parametru variabil. Aşadar un şurub poate fi caracterizat prin două coordonate vectoriale *omogene*, spre deosebire de torsor, care este caracterizat prin două coordonate vectoriale $\overline{R}$ şi $\overline{M}_0$ bine definite. Acestor coordonate vectoriale omogene le vor corespunde şase coordonate scalare omogene.

Noţiunea geometrică de şurub poate fi definită riguros cu ajutorul calculului analitic după cum se va vedea.

Fie u, v, w proiecţiile pe axele unui triedru cartezian ale vectorului rezultant al unui sistem de vectori alunecători şi l, m, n proiecţiile pe aceleaşi axe ale momentului rezultant. S-a arătat la § 22—23 că vectorul rezultant, vectorul moment rezultant minim (calculat în raport cu un punct de pe axa centrală) şi ecuaţiile axei centrale pot fi scrise cu notaţiile de mai sus sub forma

$$R=\pm\sqrt{u^2+v^2+w^2} \tag{1.109}$$

$$M_r=\pm\frac{lu+mv+nw}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \tag{1.110}$$

$$\frac{l-wy+vz}{u}=\frac{m-uz+wx}{v}=\frac{n-vx+uy}{w}. \tag{1.111}$$

Putem deci caracteriza un sistem de vectori alunecători fie analitic, prin cele şase componente scalare u, v, w, l, m, n ale torsorului în O, fie geometric, prin scalarii vectorilor $\overline{R}$ şi $\overline{M}_r$ şi prin axa sa centrală.

Componentele u, v, w, l, m, n poartă numele de *coordonatele plükeriene* ale sistemului de vectori.

Să presupunem acum că aceste coordonate plükeriene sînt omogene. Ele vor determina o familie de sisteme de vectori alunecători căci, notînd aceste coordonate cu λu, λv, λw, λl, λm, λn, unde $\lambda\neq 0$ este un parametru, observăm că pentru fiecare valoare a parametrului λ corespunde un sistem de vectori alunecători (mai exact o clasă de sisteme echivalente). Să cercetăm elementul comun al acestor sisteme. Observăm că dacă în formulele (1.109), (1.110) şi (1.111) înlocuim u, v, w, l, m, n cu λu, λv, λw, λl, λm, λn atunci ecuaţiile axei centrale (1.111) rămîn neschimbate; în schimb R şi M_r devin λR, şi λM_r. Raportul lor

$$s=\frac{M_r}{R}=\frac{lu+mv+nw}{u^2+v^2+w^2} \tag{1.112}$$

rămîne neschimbat. *Şurubul* va fi deci elementul comun familiei de sisteme de vectori alunecători, alcătuit din axa centrală Δ, căreia i se ataşează o mărime scalară s definită de (1.112) şi denumită *parametrul şurubului*. Cu alte cuvinte, un şurub este caracterizat analitic prin coordonatele omogene λu, λv, λw, λl, λm, λn şi geometric prin axa centrală Δ şi parametrul s.

O dreaptă, poate fi privită din punct de vedere al teoriei şuruburilor ca un şurub de parametru $s=0$. Ţinînd seamă de expresia (1.112) a parametrului s rezultă că între coordonatele plükeriene ale unei drepte subsistă relaţia $lu+mv+nw=0$.

§ 39. **Şuruburi reciproce.** La § 15 s-a arătat că produsul reciproc a doi vectori $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ poate fi scris sub forma [v. formula (1.55)]

$$(\overline{F}_1, \overline{A_1A_2}, \overline{F}_2) = \overline{F}_1 \cdot \overline{M}_2 + \overline{F}_2 \cdot \overline{M}_1 . \qquad (1.113)$$

Notînd cu $u_1', v_1', w_1', l_1', m_1', n_1'$ şi cu $u_2', v_2', w_2', m_2', n_2'$ proiecţiile pe axe ale celor doi vectori şi ale momentelor lor în raport cu originea, relaţia (1.113) devine

$$(\overline{F}_1, \overline{A_1A_2}, \overline{F}_2) = u_1'l_2' + v_1'm_2' + w_1'n_2' + l_1'u_2' + m_1'v_2' + n_1'w_2' . \qquad (1.114)$$

Dacă vom considera acum în locul a doi vectori $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ două sisteme de vectori şi vom nota cu $u_1, v_1, w_1, l_1, m_1, n_1$ şi $u_2, v_2, w_2, l_2, m_2, n_2$ coordonatele plükeriene ale şuruburilor corespunzătoare, atunci expresia

$$P = u_1l_2 + v_1m_2 + w_1n_2 + l_1u_2 + m_1v_2 + n_1w_2 \qquad (1.115)$$

poartă numele de *produs reciproc al celor două şuruburi*. Două şuruburi se zic reciproce, dacă produsul lor reciproc este nul, adică

$$u_1l_2 + v_1m_2 + w_1n_2 + l_1u_2 + m_1v_2 + n_1w_2 = 0. \qquad (1.116)$$

O b s e r v a ţ i i. 1. S-a arătat la § 15 că în cazul cînd unul dintre vectorii $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$ este versorul unei axe, produsul lor reciproc (1.114) este egal cu momentul celuilalt vector în raport cu axa respectivă. Se poate demonstra fără dificultate că această proprietate poate fi extinsă în cazul de faţă, în sensul că, dacă unul din cele două sisteme de vectori se reduce la versorul unei axe, atunci produsul reciproc (1.115) este egal cu momentul rezultant al celuilalt sistem în raport cu axa respectivă.

2. Se poate da o interpretare produsului reciproc a două şuruburi şi în cazul general. Astfel, dacă unul dintre şuruburi corespunde unui sistem de forţe, iar celălalt unui sistem de deplasări rigide elementare, se poate arăta că produsul reciproc al celor două şuruburi este egal cu lucrul mecanic elementar produs de forţele sistemului, cînd punctele de aplicaţie parcurg deplasările rigide.

§ 40. **Mulţimi liniare de şuruburi.** Un număr $p \leqslant 6$ de relaţii omogene independente

$$\left.\begin{array}{l} F_1(u, v, w, l, m, n) = 0 \\ F_2(u, v, w, l, m, n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_p(u, v, w, l, m, n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.117)$$

definesc o mulţime de şuruburi.

În mecanica teoretică prezintă un deosebit interes mulţimile definite prin relaţii liniare şi omogene de forma

$$\left.\begin{array}{l} L_1u + M_1v + N_1w + U_1l + V_1m + W_1n = 0 \\ L_2u + M_2v + N_2w + U_2l + V_2m + W_2n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_pu + M_pv + N_pw + U_pl + V_pm + W_pn = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.118)$$

Aceste relaţii permit ca un număr p de coordonate omogene să fie exprimate în funcţie de celelalte $6-p=r$ sau ca toate coordonatele omogene să fie exprimate în funcţie de r parametri variabili $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sub forma

$$\left.\begin{array}{l} u = \lambda_1u_1 + \lambda_2u_2 + \dots + \lambda_ru_r \\ v = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_rv_r \\ w = \lambda_1w_1 + \lambda_2w_2 + \dots + \lambda_rw_r \\ l = \lambda_1l_1 + \lambda_2l_2 + \dots + \lambda_rl_r \\ m = \lambda_1m_1 + \lambda_2m_2 + \dots + \lambda_rm_r \\ n = \lambda_1n_1 + \lambda_2n_2 + \dots + \lambda_rn_r . \end{array}\right\} \qquad (1.119)$$

Vom numi r *rangul* unei mulţimi liniare de şuruburi. În aplicaţiile practice intervine adesea o mulţime formată dintr-un număr finit de şuruburi, căreia trebuie să i se determine rangul r. Pentru aceasta vom forma cu coordonatele omogene $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) ale acestor şuruburi matricea

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & v_1 & w_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & v_n & w_n & l_n & m_n & n_n \end{matrix} \right\| \tag{1.120}$$

Este uşor de verificat că rangul r căutat este egal cu rangul matricei (1.120). Pentru aceasta se ţine seama de relaţiile (1.119) şi se observă apoi că oricare ar fi numărul $n \geqslant r$ al şuruburilor mulţimii, rangul maxim al determinanţilor diferiţi de zero, ce se pot forma cu elementele matricei, este r.

§ 41. **Interpretări geometrice.** Configuraţia axelor centrale ale şuruburilor unei mulţimi liniare este în strînsă legătură cu rangul acestei mulţimi. Pentru a demonstra această teoremă vom pune în evidenţă coordonatele omogene ale axei centrale a unui şurub aparţinînd unei asemenea mulţimi.

Într-adevăr, axa centrală, fiind o dreaptă, poate fi considerată ca un şurub de parametru $s=0$. Fie u, v, w, l, m, n coordonatele omogene ale unui şurub şi u', v', w', l', m', n' coordonatele omogene ale axei sale centrale. Avem relaţiile:

$$\left. \begin{aligned} &\lambda u=u', \quad \lambda v=v', \quad \lambda w=w' \\ &\lambda l=l'+su', \ \lambda m=m'+sv', \ \lambda n=n'+sw'. \end{aligned} \right\} \tag{1.121}$$

Într-adevăr, axa centrală, ca şurub, poate fi privită ca avînd o amplitudine (rezultantă) paralelă cu aceea a şurubului considerat şi un moment minim nul. De aceea primele trei coordonate omogene referitoare la amplitudine sînt proporţionale. Ultimele trei coordonate omogene, referitoare la momentul minim, diferă prin su, sv, sw care reprezintă proiecţiile pe axe ale momentului minim.

Să considerăm acum o mulţime liniară de şuruburi definită prin relaţiile (1.118). Să înlocuim u, v, w, l, m, n prin expresiile (1.121). După simplificare cu λ, obţinem

$$\left. \begin{aligned} &L_1u'+M_1v'+N_1w'+U_1l'+V_1m'+W_1n'+s(U_1u'+V_1v'+W_1w')=0 \\ &L_2u'+M_2v'+N_2w'+U_2l'+V_2m'+W_2n'+s(U_2u'+V_2v'+W_2w')=0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &L_pu'+M_pv'+N_pw'+U_pl'+V_pm'+W_pn'+s(U_pu'+V_pv'+W_pw')=0. \end{aligned} \right\} \tag{1.122}$$

Eliminînd parametrul s între ecuaţiile (1.122), obţinem

$$\Phi_1\Psi_2-\Phi_2\Psi_1=0, \quad \Phi_1\Psi_3-\Phi_3\Psi_1=0, \ \ldots, \ \Phi_1\Psi_p-\Phi_p\Psi_1=0 \tag{1.123}$$

unde am notat prin Φ_i şi Ψ_i formele liniare

$$\left. \begin{aligned} &\Phi_i=L_iu'+M_iv'+N_iw'+U_il'+V_im'+W_in' \\ &\Psi_i=U_iu'+V_iv'+W_iw'. \end{aligned} \right\} \tag{1.124}$$

Analizînd ecuaţiile (1.123) constatăm că ele reprezintă forme pătratice în u', v', w', l', m', n'. Dacă se consideră un punct în spaţiu A_0 de coordonate date x_0, y_0, z_0 şi un punct curent A de coordonate x, y, z pe o dreaptă trecînd prin A_0 şi aparţinînd mulţimii de drepte definită de una din formele pătratice (1.123) se verifică uşor că ea generează un con de gradul al doilea. Într-adevăr, coordonatele omogene se pot exprima în funcţie de coordonatele carteziene prin formulele [1]:

$$\left. \begin{aligned} &\lambda u'=x-x_0, \quad \lambda v'=y-y_0, \quad \lambda w'=z-z_0 \\ &\lambda l'=y_0z-z_0y, \quad \lambda m'=z_0x-x_0z, \quad \lambda n'=x_0y-y_0x. \end{aligned} \right\} \tag{1.125}$$

[1] Aceste formule se obţin imediat observînd că $\lambda u'$, $\lambda v'$, $\lambda w'$ sînt proiecţiile pe axe ale vectorului $\overline{A_0A}$, iar $\lambda l'$, $\lambda m'$, $\lambda n'$ sînt proiecţiile pe axe ale momentului $\overline{OA_0} \times \overline{A_0A}$.

De aci rezultă că în general o relaţie pătratică în coordonatele omogene u', v', w', l', m', n' este echivalentă cu o relaţie pătratică în coordonatele x, y, z, deci conul generat de A_0A este de gradul al doilea.

O asemenea mulţime de drepte, caracterizată prin aceea că dreptele ce trec printr-un punct dat A_0, din spaţiu, şi aparţin mulţimii generează un con de gradul al doilea, poartă numele de *complex pătratic*.

Rezultă de aici următoarele consecinţe:

a) Pentru mulţimile de şuruburi de rangul 6 (mulţimea tuturor şuruburilor din spaţiu) şi de rangul 5 nu rezultă nici o restricţie în ceea ce priveşte configuraţia axelor centrale.

b) Axele centrale ale şuruburilor unei mulţimi liniare de rang $r=4$ aparţin unui complex pătratic particular.

c) Axele centrale ale şuruburilor unei mulţimi liniare de rang $r=3$ aparţin dreptelor comune a două complexe pătratice. Această mulţime de drepte este o congruenţă de gradul al patrulea. Printr-un punct din spaţiu trec, în general, patru drepte aparţinînd congruenţei.

d) Axele centrale ale şuruburilor unei mulţimi liniare de rang $r=2$ sînt dreptele comune a trei complexe pătratice. Se poate arăta că aceste drepte generează o suprafaţă denumită „cilindroidul lui Ball“ [1].

e) Mulţimea şuruburilor de rang $r=1$ conţine un singur şurub sau mai multe şuruburi confundate.

f) Mulţimea şuruburilor de rang $r=0$ este mulţimea vidă care nu conţine nici un şurub.

§ 42. **Mulţimi de drepte.** În Mecanică intervin în unele probleme configuraţii de drepte. În cele ce urmează vom cerceta legătura dintre aceste configuraţii şi rangul mulţimii de drepte din care fac parte.

Pentru că, din punct de vedere al teoriei geometrice a şuruburilor, o dreaptă este un şurub de parametru $s=0$, vom putea face studiul reluînd ecuaţiile (1.122), în care însă vom face $s=0$. Obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} L_1u'+M_1v'+N_1w'+U_1l'+V_1m'+W_1n'=0 \\ L_2u'+M_2v'+N_2w'+U_2l'+V_2m'+W_2n'=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_pu'+M_pv'+N_pw'+U_pl'+V_pm'+W_pn'=0. \end{array}\right\} \quad (1.126)$$

Dacă vom considera şi de data aceasta un punct A_0 dat şi un punct A variabil pe o dreaptă aparţinînd mulţimii definite de una din relaţiile (1.126), vom observa că această relaţie este liniară în x, y, z, deci reprezintă un plan. Aşadar una din relaţiile (1.126) defineşte o mulţime de drepte, dintre care, cele ce trec printr-un punct oarecare A_0 formează un fascicul plan. O asemenea mulţime de drepte poartă numele de *complex de gradul întîi*. Cel mai general complex de gradul I este format de dreptele de moment nul ale unui sistem de forţe, sau de normalele la o familie de elici de acelaşi pas, situate pe cilindri coaxiali. Ca exemple de complexe speciale cităm: mulţimea dreptelor ce întîlnesc o dreaptă dată şi mulţimea dreptelor paralele cu un plan dat.

Pe baza acestor rezultate, ecuaţiile (1.126) pot fi interpretate astfel:

a) Dreptele aparţinînd unei mulţimi de rang $r=6$ (mulţimea tuturor dreptelor) pot fi dispuse, evident, oricum în spaţiu.

b) Dreptele aparţinînd unei mulţimi de rang $r=5$ trebuie să aparţină aceluiaşi complex de gradul întîi.

c) Dreptele aparţinînd unei mulţimi de rang $r=4$ trebuie să fie comune la două complexe de gradul întîi, adică să aparţină unei congruenţe de gradul întîi.

d) Dreptele aparţinînd mulţimii de rang $r=3$ trebuie să fie comune la trei complexe de gradul întîi. Se poate arăta că în acest caz ele trebuie să facă parte din aceeaşi familie de generatoare a unei cuadrice (riglate).

e) Dreptele aparţinînd unei mulţimi de rang $r=2$ trebuie să fie comune la patru complexe de gradul întîi. Se poate arăta că ele aparţin unui fascicul plan.

f) Mulţimea dreptelor de rang $r=1$ conţine o singură dreaptă sau mai multe drepte confundate.

g) Mulţimea vidă ($r=0$) nu conţine nici o dreaptă.

[1] Vezi G. V. Suslov, Mecanica Raţională (traducere din limba rusă), vol. II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1950, p. 50–55.

O b s e r v a ț i i. 1. Toate proprietățile arătate pentru configurațiile de drepte rămîn adevărate și pentru mulțimile de șuruburi de același pas. Într-adevăr, făcînd $s=s_0$ (constant) în relațiile (1.122), acestea devin de asemenea liniare în u', v', w', l', m', n'. De altfel relațiile (1.121) pot fi considerate, în cazul cînd $s=s_0$ (constant), ca definind o transformare proiectivă, care, evident, lasă neschimbat rangul matricei (1.120). Această transformare arată că mulțimea dreptelor și mulțimea șuruburilor de același pas s_0 au aceleași proprietăți proiective.

2. În tabela ce urmează se dau o serie de cazuri particulare de configurații de șuruburi de pasuri diferite și de șuruburi de același pas, care pot fi utile în aplicații.

Tabela 1

Mulțimi liniare de șuruburi

Rangul	Configurația axelor centrale	
	Șuruburi de parametri diferiți	Șuruburi de același parametru[1]
0	—	—
1	Un șurub oarecare	confundate
2	a) generatoarele unui cilindroid Ball b) confundate	a) coplanare și concurente b) coplanare și paralele
3	Aparțin aceleiași congruențe de gradul al 4-lea	a) generatoare, din aceeași familie, ale unei cuadrice (riglate) b) întîlnesc trei drepte date c) întîlnesc două drepte date și sînt paralele cu același plan d) sînt coplanare e) sînt concurente în spațiu f) sînt paralele în spațiu g) aparțin la două fascicule plane care au o rază comună
4	a) aparțin aceluiași complex pătratic b) sînt paralele în spațiu	a) aparțin aceleiași congruențe de gradul întîi b) întîlnesc două drepte date c) întîlnesc o dreaptă și sînt paralele cu un plan dat d) unele sînt paralele cu o direcție dată, altele sînt drepte de la infinit ale spațiului e) unele sînt situate într-un plan, celelalte sînt concurente într-un punct din plan f) unele sînt situate într-un plan, celelalte sînt paralele cu o dreaptă din plan
5	a) paralele cu un plan dat[2]	a) aparțin aceluiași complex de gradul întîi b) întîlnesc o dreaptă dată c) paralele cu un plan dat d) două stele de drepte concurente e) două stele de drepte paralele f) o stea de drepte concurente și alta de drepte paralele
6	Oarecare	Oarecare

[1] În această categorie, pentru cazul particular $s=0$, intră mulțimile de drepte.

[2] Acesta este un caz particular. În cazul general axele pot fi oarecare încît nu se poate recunoaște rangul 5 sau 6 al unei mulțimi de șuruburi numai după configurația axelor centrale.

II. CALCULUL CU MĂRIMI FIZICE. DIMENSIUNI. UNITĂȚI. OMOGENITATE. SIMILITUDINE.

A. DIMENSIUNI. UNITĂȚI. OMOGENITATE

§ 1. **Mărime fizică.** Pentru a înțelege această noțiune, să considerăm o mulțime formată din obiecte fizice de aceeași natură și să ne referim la o anumită însușire, comună acestor obiecte. Printr-un proces de abstractizare, se poate elabora noțiunea de mărime fizică corespunzătoare acestei însușiri, dacă se îndeplinesc anumite condiții.

În primul rînd este necesar să se stabilească o *relație de echivalență*, adică un criteriu după care să se poată recunoaște dacă două obiecte din mulțimea considerată sînt echivalente din punct de vedere al însușirii respective. Relația de echivalență permite repartizarea obiectelor mulțimii în *clase de echivalență*.

În al doilea rînd este necesar să se stabilească între clasele de echivalență o *relație de ordonare*. Relațiile de echivalență și de ordonare, împreună, constituie condiția necesară și suficientă pentru a se putea elabora noțiunea de mărime fizică.

Ca exemplu, vom considera ca obiecte fizice forțele și ca însușiri direcția și intensitatea lor.

Dacă ne referim la *direcție*, constatăm că se poate stabili o relație de echivalență, adică se poate da un criteriu după care să se recunoască dacă două forțe au aceeași direcție. Clasele de echivalență sînt atunci formate din forțe paralele. Nu se poate însă stabili o relație de ordonare în aceste clase de echivalență, deoarece noțiunea de „direcție mai mare" sau „mai mică" este lipsită de sens. Însușirea unei forțe de a avea o direcție nu poate duce la elaborarea unei noțiuni de mărime fizică.

Dacă ne referim la *intensitate*, constatăm că, în acest caz, se poate stabili o relație de echivalență și una de ordonare. Într-adevăr, dacă două forțe deformează la fel arcul unui anumit dinamometru, spunem că ele au aceeași intensitate. Dacă deformația produsă de forța $\overline{F}_1$ este mai mare decît cea produsă de forța $\overline{F}_2$, spunem că intensitatea forței $\overline{F}_1$ este mai mare decît intensitatea forței $\overline{F}_2$. Rezultă că mărimea fizică *intensitatea forței* poate fi elaborată.

Procesul de elaborare al noțiunii de mărime fizică cere însă și un al treilea criteriu: acela al *comparației*. Prin acest criteriu se caută să se stabilească nu numai dacă o mărime este mai mare decît alta, ci „de cîte ori" este mai mare. În acest scop, fiecărei clase de echivalență i se atașează un număr real. Aceste numere nu pot fi atribuite însă în mod arbitrar. În primul rînd trebuie respectată ordinea claselor de echivalență, deci funcția care stabilește corespondența între clasele de echivalență și mulțimea numerelor reale trebuie să fie strict crescătoare. În al doilea rînd, raportul a două mărimi de aceeași natură trebuie să rămînă același. De aici rezultă că funcția f trebuie să fie liniară, deci de forma

$$f(x)=kx+f(0), \qquad k>0.$$

Rămîn două constante arbitrare k şi $f(0)$. Rezultă că *se pot atribui numere arbitrare numai la două clase de echivalență.* Pentru celelalte clase, numerele ce trebuie ataşate rezultă din expresia funcției $f(x)$.

De exemplu, la măsurarea temperaturilor, clasei de corpuri care au temperatura gheții ce se topeşte şi clasei de corpuri care au temperatura apei ce fierbe la presiune normală (760 mm Hg), li se atribuie în mod convențional, respectiv valorile: 0° şi 100° (scara Celsius), 0° şi 80° (scara Réaumur), 32° şi 212° (scara Fahrenheit), 273° şi 373° (scara temperaturilor absolute).

În mecanică şi în general în fizică, sistemele de unități folosite au convenția de zero pentru aceeaşi clasă de echivalență, care se impune adesea în mod natural. Ceea ce diferă de la un sistem la altul este convenția cu privire la clasa căreia i se atribuie numărul unu. Un obiect fizic oarecare din această clasă poartă numele de *unitate de măsură* a mărimii fizice respective.

Se poate da o definiție a mărimii fizice independent de unitatea de măsură aleasă[1]. În cele ce urmează vom folosi noțiunea de mărime fizică în sensul clasic. Vom observa că, o dată fixate convenția de zero şi convenția de unitate, pentru a atribui valori numerice celorlalte clase de echivalență vor trebui efectuate măsurători ale mărimilor fizice care caracterizează obiectele din clasele respective.

Importanța măsurării a fost precizată de către marele savant rus D. Mendeleev prin fraza, „ştiința începe acolo de unde începe măsurarea".

Prin măsurare se înțelege compararea pe cale fizică (experimentală) a unei mărimi M dintr-o clasă oarecare cu mărimea de aceeaşi natură U din clasa căreia i s-a atribuit în mod convențional numărul unu (unitatea de măsură).

Rezultatul măsurării este un număr n care arată de cîte ori mărimea U, respectiv unitatea, este cuprinsă în mărimea M, adică:

$$n = \frac{M}{U}.$$

Numărul n, care se obține ca rezultat al măsurării, este un număr abstract şi se numeşte *valoare numerică* a mărimii M.

Mărimea fizică se exprimă sub forma unui produs între valoarea numerică şi unitatea de măsură.

$$\text{mărimea} = \text{valoarea numerică} \times \text{unitatea}$$

sau, cu notațiile folosite:

$$M = nU$$

şi exprimă *ecuația fundamentală a măsurării*.

Rezultatul măsurării unei mărimi va fi întotdeauna exprimat prin valoarea acelei mărimi (număr) şi a unității de măsură folosită în măsurare (denumire).

---

[1] A se vedea R. Răduleț şi A. Timotin, O fundamentare a calculului cu mărimi fizice, independent de unitățile de măsură, Academia R.P.R. filiala Iaşi, Studii şi Cercetări Ştiințifice, Fizică şi Ştiințe Tehnice, Anul XI, Fasc. 2, 1960.

Exemple: 5 m (5 metri); 12 s (12 secunde) etc.

Măsurările se execută experimental pe cale fizică cu mijloace de măsurat (aparate, substanţe, corpuri, instalaţii etc.) care servesc la compararea mărimii de măsurat cu unitatea de măsură, cu precizia metodei sau a aparatului de măsurat utilizat.

Nevoia măsurărilor s-a născut din cele mai vechi timpuri apărînd în comerţ, măsurarea terenurilor şi distanţelor etc. Chinezii, egiptenii, babilonienii, grecii vechi, romanii etc. foloseau măsuri de capacitate, lungime, greutate etc. Balanţa egipteană şi cîntarul roman erau recunoscute şi folosite în toată lumea antică. Astfel, marea balanţă de la templul lui Amon din Teba — Egipt (secolul al XV-lea î.e.n.) era recunoscută ca cea mai precisă balanţă a antichităţii.

Unităţile erau însă foarte diferite, de la ţară la ţară şi de la epocă la epocă.

La 8 mai 1790, la propunerea lui Talleyrand, Adunarea Constituantă Franceză aprobă proiectul de unificare şi sistematizare a măsurilor şi însărcinează Academia de Ştiinţe Franceză să găsească un sistem simplu şi ştiinţific de măsurat.

Astfel a apărut sistemul metric, care a fost apoi generalizat în toate ţările de pe glob, afară de ţările anglo-saxone, — Anglia, Statele-Unite ale Americii etc.

Admiterea aproape unanimă a acestui sistem, care prezintă avantajul că este *simplu, bine determinat* şi se pot deduce unităţile de acelaşi fel una dintr-alta pe *bază zecimală*, s-a extins apoi la *unităţile mecanice, electrice, calorice* şi *optice*.

Adoptarea sistemului metric a fost făcută în baza convenţiei care s-a încheiat la Paris în ziua de 20 mai 1875 de către douăzeci de state participante; această convenţie a fost mereu perfecţionată printr-un şir întreg de legiuiri şi prin conferinţe internaţionale ţinute în anii 1881, 1889, 1903, 1919 etc., statornicindu-se obligativitatea introducerii sistemului metric în statele respective.

Ştiinţa măsurătorilor şi aparatele de măsurat au făcut mari progrese în ultimul timp. Nevoile industriale şi cercetările ştiinţifice de mare precizie au contribuit foarte mult la aceasta. Numeroşi oameni de ştiinţă ca Ampère, Mendeleev şi alţii, şi-au legat numele de ştiinţa măsurătorilor exacte, iar institutele de cercetări şi industriile sînt preocupate intens de aceste probleme.

Este absolut necesar ca unitatea de măsură să poată fi real reprodusă, cu precizia maximă posibilă, sub formă de *etaloane*.

Pentru unele mărimi (lungime, masă etc.) se poate realiza comod o unitate de măsură (metru, kilogram etc.) şi se poate evalua uşor de cîte ori această unitate se cuprinde în mărimea dată, adică putem măsura direct aceste mărimi. Există însă alte mărimi (viteză, acceleraţie etc.), pentru care nu se poate realiza uşor o unitate de măsură şi măsurarea directă, prin comparaţie, nu se poate efectua totdeauna.

Măsurarea indirectă a unei mărimi M se face în acest caz, măsurînd direct mărimi de specii diferite, cunoscute X, Y, Z, ale căror valori numerice x, y, z sînt legate de mărimea M printr-o relaţie oarecare de forma:

$$M=f(x, y, z)$$

în care, după cum se va vedea, vom face, printr-o alegere judicioasă a unităţilor, să nu figureze coeficienţi care să depindă de unităţile respective.

Astfel, acceleraţia gravitaţiei g se măsoară indirect din formula pendulului: $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ care dă pentru acceleraţie: $g=\pi^2\frac{l}{t^2}$, l şi t măsurîndu-se direct.

Valorile a două mărimi de aceeaşi natură se pot aduna după regulile algebrice, numai dacă reprezintă rezultatul unor măsurări făcute cu aceeaşi unitate.

Produsul unui număr oarecare de mărimi, inclusiv de factori numerici, se formează după regulile obişnuite ale produselor algebrice.

Factorul simbolic al produsului, rezultat din înmulţirea factorilor simbolici ai fiecărei mărimi, reprezintă o unitate derivată, diferită de obicei de factorii din care provine.

Unităţile şi mărimile în diferite operaţii vor fi tratate ca factori algebrici, aplicîndu-li-se toate regulile algebrice.

Dacă măsurăm mărimile de aceeaşi speţă Q_1 şi Q_2 cu aceeaşi unitate U, rezultatele măsurării vor fi:

$$q_1=\frac{Q_1}{U}; \qquad q_2=\frac{Q_2}{U}$$

din care se deduce imediat

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{q_1}{q_2}$$

adică raportul a două mărimi de aceeaşi speţă Q_1 şi Q_2 este egal cu raportul valorilor numerice q_1 şi q_2, care se măsoară cu aceeaşi unitate U.

§ 2. **Mărimi şi unităţi fundamentale. Mărimi şi unităţi derivate.** Din definiţia operaţiei de măsurare, rezultă că pentru a măsura mărimile fizice ar trebui să avem tot atîtea unităţi de măsură diferite cîte mărimi fizice diferite avem.

În realitate, mărimile fizice sînt legate prin legi şi definiţii determinate, care simplifică problema alegerii unităţilor.

Mărimile fizice alese se numesc *mărimi fundamentale*, iar unităţile de măsură corespunzătoare — *unităţi fundamentale*.

Restul mărimilor fizice deduse din mărimile fundamentale pe baza ecuaţiilor de definiţie alese pentru aceste mărimi, se numesc *mărimi derivate*, iar unităţile respective, *unităţi derivate*.

Astfel, viteza unui mobil în mişcare uniformă, care parcurge spaţiul s în timpul t, $v=s/t$ defineşte viteza ca mărime derivată faţă de mărimile fundamentale: lungimea şi timpul.

§ 3. **Sisteme de unităţi.** Examinînd unităţile mărimilor geometrice, vedem că putem reduce numărul de unităţi arbitrare, definind astfel un sistem de unităţi coordonate, care să cuprindă o unitate fundamentală (lungime) şi două unităţi derivate (aria şi volumul).

În cinematică sînt suficiente numai două unităţi fundamentale (lungime şi timp) pentru a exprima celelalte unităţi ale mărimilor care se folosesc (viteza, acceleraţia etc.) în funcţie de unităţile fundamentale.

Definim astfel pentru fiecare domeniu de măsurare sau pentru o serie de domenii de măsurare, *sistemul de unităţi*, drept totalitatea unităţilor derivate, care cuprind un domeniu determinat de măsură sau o serie de domenii de măsurare.

Mărimile fundamentale se aleg astfel încît să fie independente.

Mulţimea tuturor mărimilor fundamentale distinct alese ca bază a sistemului de unităţi respectiv, formează *sistemul fundamental de măsură*. În Introducere s-a văzut că Mecanica se bazează pe trei noţiuni fundamen-

tale: spațiul, timpul și masa, de unde și cele trei unități fundamentale corespunzătoare.

Există mai multe sisteme de măsură, după mărimile fundamentale care intră în compunerea lor:

a) sistemul fizic de măsură care are la bază ca unități fundamentale: lungimea, masa și timpul (LMT);

b) sistemul tehnic de măsură care are la bază ca unități fundamentale: lungimea, forța, timpul (LFT).

Principalele sisteme de măsură sînt arătate în tabela 2.

Tabela 2

Unitățile fundamentale de măsuri

Sisteme	Unități de măsură folosite				Denumiri secundare
Sisteme fizice	Denumire	L	M	T	—
	CGS	1 cm	1 g	1 s	Sistem fizic
	MKS	1 m	1 kg	1 s	Sistem fizic practic
	MTS	1 m	1 t	1 s	Sistem fizic industrial
Sisteme tehnice	Denumire	L	F	T	—
	MKfS	1 m	1 kgf[1]	1 s	—

Pentru terminologie și simboluri în mecanică a se vedea și STAS 1814-50.

Sistemele fizice, spre deosebire de sistemul tehnic, au în prezent o utilizare mai extinsă, datorită faptului că în sistemul MKfS unitatea de forță kgf este o mărime dependentă de accelerația gravitației terestre (variabilă cu locul unde se face măsurarea).

§ 4. **Dimensiuni.** Întrucît unitățile derivate provin pe baza relațiilor matematice, din unități fundamentale, variația unităților fundamentale atrage după ea variația unităților derivate.

Va trebui deci să se găsească în special pentru cazul cînd se modifică modulul unităților sau se recalculează valoarea numerică a unei mărimi fizice, la trecerea dintr-un sistem de unități în altul — o astfel de relație, prin care să se poată stabili:

— variația unității mărimii fizice derivate, în funcție de variația unităților fundamentale;

— variația valorii numerice a rezultatului măsurării mărimii fizice, în funcție de variația unităților utilizate.

O astfel de relație, expresie a unității de măsură derivate, în funcție de unitățile de măsură fundamentale, după definiția lui Maxwell, se numește *ecuația de dimensiuni a unității mărimii date*, și poate fi privită ca o definiție succintă și ca o caracteristică a naturii fizice a mărimilor derivate.

[1] Unitatea admisă recent pentru forță este newtonul (N), $1\ N = 10^5$ dyn. Unitatea folosită pînă în prezent era 1 kgf.

Dacă se consideră un sistem de măsură oarecare — de pildă sistemul absolut de măsură — lungime, masă, timp și notăm unitatea fundamentală de lungime, masă și timp, respectiv cu L, M, T, — atunci orice unitate derivată va fi o funcție omogenă de L, M, T:

$$U = f(L, M, T).$$

Dacă la o variație de n ori a unei unități fundamentale, corespunde o variație n^α a unității derivate, atunci se spune că unitatea derivată are dimensiunea α față de unitatea fundamentală care a provocat variația dată.

Dacă o unitate derivată U are dimensiunea α față de unitatea fundamentală L, dimensiunea β față de unitatea fundamentală M și dimensiunea γ față de T, atunci ecuația de dimensiuni a unității derivate U va fi:

$$[U] = L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

în care:

$[U]$ este dimensiunea mărimii U,

iar α, β, γ pot fi numere întregi, fracționare, pozitive, negative sau chiar nule.

Pentru a nu se confunda expresiile legilor fizice cu formulele de dimensiuni, unitățile absolute și formulele lor de dimensiuni se înscriu în paranteze drepte.

O ecuație de dimensiuni a unei mărimi derivate se referă întotdeauna la un sistem de unități bine determinat. Importanța ecuației de dimensiuni pentru caracterizarea naturii fizice a mărimii derivate, este foarte mare. Astfel, dacă ecuația de dimensiuni a unei mărimi A în sistemul LMT va fi de forma:

$$[A] = LMT^{-2}$$

(după cum se va vedea, A corespunde unei forțe), avem posibilitatea de a judeca imediat cum va varia această mărime, dacă vor varia unitățile fundamentale. De exemplu, din ecuația de dimensiuni se vede că, dacă unitatea de lungime crește de n ori, unitatea de forță va crește de n ori; la creșterea unității de masă de n ori și forța crește de n ori și prin creșterea unității de timp de n ori, se micșorează unitatea de forță de n^2 ori.

Trebuie precizat că dimensiunile, spre deosebire de unitățile de măsură, nu determină natura fizică a parametrului dat, ci exprimă numai forma dependenței lui de unitățile fundamentale de măsură.

Astfel, după cum vom vedea mai departe, lucrul mecanic, energia (mărimi scalare) și momentul forței (mărime vectorială) au aceeași dimensiune: L^2MT^{-2} (în sistemul LMT), adică exprimă în aceeași formă dependența lor de unitățile fundamentale de măsură, dar natura lor este diferită. Utilitatea practică a stabilirii caracterului unităților este esențială pentru unitățile derivate, care uneori nu au denumiri proprii și sînt determinate numai prin denumirea care rezultă din ecuația de dimensiuni (m/s^2, km/h etc.).

Ecuația de dimensiuni a oricărei unități derivate se face pe baza ecuației de definiție, a relației care leagă mărimea dată de mărimile fundamentale alese sau de mărimi ale căror dimensiuni sînt cunoscute, iar pentru

dimensiunile mărimilor mai complicate se ţine seama de următoarele proprietăţi ale dimensiunilor:

a) Dacă valoarea numerică a unei mărimi A este egală cu produsul (sau cîtul) altor două mărimi B şi C, adică $A=B\cdot C$ sau $A=B/C$ şi dacă ecuaţiile de dimensiuni ale mărimilor B şi C sînt respectiv:

$$[B]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma},\ [C]=L^{\alpha'}M^{\beta'}T^{\gamma'}$$

atunci ecuaţia de dimensiuni a mărimii A va fi:

în primul caz:

$$[A]=L^{\alpha+\alpha'}M^{\beta+\beta'}T^{\gamma+\gamma'}$$

sau în al doilea caz:

$$[A]=L^{\alpha-\alpha'}M^{\beta-\beta'}T^{\gamma-\gamma'}.$$

b) Dacă valoarea numerică a mărimii A este o putere n a valorii numerice a unei mărimi oarecare B atunci:

$$[A]=L^{\alpha n}M^{\beta n}T^{\gamma n}.$$

Aplicaţii. 1°. Ecuaţia de dimensiuni a vitezei şi acceleraţiei în sistemul LMT:

$$[v]=\frac{s}{t}=\frac{L}{T}=LT^{-1};\qquad [a]=\frac{(v_2-v_1)}{t}=\frac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}.$$

2°. Ecuaţia de dimensiuni a unei forţe în LMT:

$$[F]=ma=MLT^{-2}.$$

3°. Ecuaţia de dimensiuni pentru unghiul plan (α) în sistemul LMT

$$\alpha=\frac{\text{arc}}{\text{rază}}$$

arcul fiind o lungime ca şi raza; trecînd la dimensiuni avem:

$$[\alpha]=\frac{L}{L}=L^{\circ}$$

adică dimensiunile unui unghi plan în raport cu mărimile fundamentale sînt nule.

§ 5. **Omogenitatea mecanică.** Legile fizice exprimă, în general, egalităţi între mărimi fizice.

Orice egalitate între mărimi fizice are sens numai atunci cînd dimensiunile termenilor care intervin în egalitate sînt aceleaşi.

Egalitatea în privinţa dimensiunilor constituie *omogenitatea mecanică*.

Principiul omogenităţii poate fi utilizat la:

— verificarea oricărei formule teoretice sau empirice;
— stabilirea formulei reprezentînd o lege fizică;
— stabilirea dimensiunilor şi a semnificaţiei fizice a coeficienţilor din formule.

Aplicînd acest principiu, se poate verifica de exemplu formula prin care se obţine perioada de oscilaţie a unui pendul $t=k\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Lăsînd la o parte valorile numerice și coeficienții fără dimensiuni și trecînd la dimensiuni avem:

$$[t]=\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right].$$

În sistemul LMT avem:

$$T=\sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}}=\sqrt{T^2}=T$$

adică egalitate între ambii termeni în ceea ce privește dimensiunile.

Bineînțeles, verificarea omogenității formulelor nu atrage după sine confirmarea că și coeficienții numerici sînt exacți.

De asemenea, stabilirea formulei unei legi fizice se poate face cu ajutorul principiului omogenității, cînd experimental s-a stabilit relația între anumite mărimi.

De exemplu se constată experimental că perioada de vibrație a unei picături de apă, sub influența tensiunii superficiale, este funcție de masa și tensiunea superficială:

$$t=f(m,\ A).$$

Scriind dimensiunile acestor mărimi avem:

$$[A]=MT^{-2};\ [m]=M;\ [t]=T.$$

Întrucît principiul omogenității cere ca dimensiunile ambilor termeni să fie aceleași, rezultă că dimensiunea funcției căutate $[f(m,\ A]$ trebuie să fie aceeași cu dimensiunea termenului întîi care este T și deci funcția noastră nu poate fi decît un produs de o constantă numerică (fără dimensiuni) prin $\sqrt{\frac{m}{A}}$, căci dimensiunea lui este:

$$\left[\sqrt{\frac{m}{A}}\right]=\sqrt{\frac{M}{MT^{-2}}}=T$$

și deci formula căutată va fi:

$$t=K\sqrt{\frac{m}{A}}.$$

Aplicarea omogenității permite de asemenea să se stabilească dimensiunea, adică semnificația fizică și denumirea constantelor și coeficienților care intră în diferite formule.

Un exemplu îl avem în formula mișcării uniform variate: $s=\frac{1}{2}at^2+bt+c$, unde prin omogenitate se poate stabili semnificația fizică a coeficienților a, b, c: $[L]=\frac{1}{2}aT^2+bT+c$. Se vede că, pentru a avea omogenitate, a va avea dimensiunile unei accelerații $\left[\frac{L}{T^2}\right]$, b va avea dimensiunile unei viteze $\left[\frac{L}{T}\right]$ și c ale unei lungimi $[L]$. Într-adevăr: $[L]=\frac{L}{T^2}T^2+\frac{L}{T}\ T+L$.

§ 6. **Schimbarea unităților.** Măsurarea diferitelor mărimi fizice se face cu unități de măsură potrivite. Totuși, în aplicații, este nevoie uneori să se treacă de la unele unități la altele.

Problema schimbării unităţilor se prezintă sub două aspecte:
— schimbarea unităţilor în cadrul unui sistem de măsură ales;
— schimbarea unităţilor în sisteme diferite.

a) *Schimbarea unităţilor în cadrul unui sistem de măsură ales*. Într-un sistem de măsură ales, se poate schimba o unitate de măsură cu alta, dacă este necesar, rezultatul măsurării fiind altul.

Necesitatea schimbării unităţilor de măsură apare întotdeauna la rezolvarea problemelor, atunci cînd mărimile fizice care intervin nu aparţin unuia şi aceluiaşi sistem de măsură şi dacă nu există o formulă special calculată pentru aceste unităţi.

De exemplu viteza poate fi calculată în km/h din formula:

$$1\frac{\text{m}}{\text{s}}=\frac{\frac{\text{km}}{1\,000}}{\frac{\text{h}}{3\,600}}=3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

dacă spaţiul este exprimat în metri şi timpul în secunde.

b) *Schimbarea sistemelor de unităţi*. Dacă mărimea fizică A, în sistemul de unităţi LMT, are ecuaţia de dimensiuni:

$$[A]=L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma} \tag{2.1}$$

atunci, într-un alt sistem de unităţi XYZ, ecuaţia de dimensiuni va fi:

$$[A]=X^{a}Y^{b}Z^{c}. \tag{2.2}$$

În ambele cazuri, mărimea fizică A se va păstra, bineînţeles, aceeaşi şi aceasta ne permite să scriem:

$$[A]\equiv L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}=X^{a}Y^{b}Z^{c}. \tag{2.3}$$

Mărimile fundamentale din noul sistem de măsură (XYZ) exprimate în primul sistem vor fi:

$$[X]=L^{\alpha_1}M^{\beta_1}T^{\gamma_1} \tag{2.4}$$

$$[Y]=L^{\alpha_2}M^{\beta_2}T^{\gamma_2} \tag{2.5}$$

$$[Z]=L^{\alpha_3}M^{\beta_3}T^{\gamma_3} \tag{2.6}$$

şi deci ecuaţia (2.3) devine:

$$L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}=(L^{\alpha_1}M^{\beta_1}T^{\gamma_1})^{a}(L^{\alpha_2}M^{\beta_2}T^{\gamma_2})^{b}(L^{\alpha_3}M^{\beta_3}T^{\gamma_3})^{c} \tag{2.7}$$

sau încă:

$$L^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma}=L^{a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3}M^{a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3}T^{a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3}. \tag{2.8}$$

De aici urmează că *ecuaţiile generale de transformare ale unităţilor vor fi*:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3\\ \beta&=a\beta_1+b\beta_2+c\beta_3\\ \gamma&=a\gamma_1+b\gamma_2+c\gamma_3.\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Tabele cu transformări ale unităţilor se găsesc în Manualul Inginerului, vol. I, p. 390–395, Editura Tehnică, 1954.

Aplicaţii. **1°. Să exprimăm lucrul mecanic din sistemul LMT în sistemul LFT.** **Transformăm ecuaţia dimensională a lucrului mecanic din sistemul LMT în sistemul LFT.** **În sistemul LMT:**

$$[A]=L^2MT^{-2}.$$

În sistemul LFT:

$$[A]=L^aF^bT^c.$$

Mărimea fiind aceeaşi:

$$L^2MT^{-2}=L^aF^bT^c.$$

Exprimînd mărimile fundamentale LFT în sistemul LMT avem:

$$L=L^1M^0T^0;\ F=L^1M^1T^{-2};\ T=L^0M^0T^1$$

de unde:

$$2=a+b;\ 1=b;\ -2=-2b+c.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii de transformare găsim:

$$a=1;\ b=1;\ c=0$$

deci, în sistemul LFT, lucrul mecanic are dimensiunea LF.

Faptul că mărimea A se păstrează aceeaşi, indiferent de sistem, face să putem scrie pentru unitatea de măsură:

$$[1\ \text{kgf}\cdot 1\ \text{m}]_{LFT}=1\,000\ \text{g}\cdot 981\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\cdot 100\ \text{cm}=1\,000\cdot 981\cdot 100\frac{\text{g}\cdot\text{cm}^2}{\text{s}^2}=9{,}81\cdot 10^7\ \text{erg}$$

$$[1\ \text{kilogram forţă-metru}]_{LFT}=[9{,}81\cdot 10^7\ \text{ergi}]_{LMT\,(CGS)}$$

Adică unitatea tehnică de lucru mecanic este de aproximativ 10^8 mai mare decît unitatea CGS.

2°. Să stabilim semnificaţia constantei în formula care dă suprafaţa cercului în funcţie de diametru:

$$S=KD^2;\ K=\frac{S}{D^2}$$

şi trecînd la dimensiuni:

$$[K]=\frac{[S]}{[D^2]}=\frac{L^2}{L^2}=L^0$$

adică coeficientul K nu are dimensiune, este un număr a cărui valoare depinde de unităţile în care se măsoară diametrul şi suprafaţa.

Dacă se iau ca unităţi de măsură pentru lungime 1 m, iar suprafaţa 1 m², atunci valoarea lui K va fi, după cum se ştie $K=\pi/4$:

$$S=\frac{\pi D^2}{4}.$$

Dacă se iau ca unităţi de măsură pentru lungime 1 m, iar pentru unitatea de suprafaţă, suprafaţa unui cerc al cărui diametru este egal cu 1 m, atunci $K=1$ şi formula cercului va fi:

$$S=D^2.$$

În acest caz, formula suprafeţei pătratului va fi $S=K_1l^2$, în care $K_1=4/\pi$ şi formula suprafeţei pătratului în aceste unităţi va fi $S=\frac{4}{\pi}l^2$.

Suprafaţa sferei în funcţie de diametru, în acest caz, ar fi dată de $S=4D^2$.

§ 7. Unităţi fundamentale ale sistemelor generale.

Unităţi de lungime. În Sistemul Internaţional de unităţi de măsură, unitatea fundamentală de lungime este *metrul* (m). Metrul este lungimea

egală cu 1650763,73 lungimi de undă, în vid, ale radiației care corespunde tranziției atomului de kripton — 86 între nivelele sale $2\,p_{10}$ și $5\,d_5$ (STAS 737-62). Această definiție a fost aprobată de către a 11-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din 1960 prin rezoluția a 6-a. Aceeași rezoluție abrogă definiția metrului din 1889[1] bazată pe prototipul internațional și stabilește ca acest prototip internațional sancționat de către prima Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din 1889, să fie păstrat în biroul Internațional de Măsuri și Greutăți în aceleași condiții ca cele fixate în 1889.

Acest etalon nu poate varia cu mai mult de 0,2 microni, precizie care astăzi nu mai este suficientă. Actualmente se pot efectua măsurări de lungime cu o precizie de 0,000025 mm, adică 0,025 microni.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul *nr. 6 c*, atribuit în acest scop în 1895 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS: centimetrul (cm), este a suta parte din metrul definit mai sus.

Unitățile de masă. În sistemul SI unitatea de masă este *kilogramul* (kg). Kilogramul este masa prototipului internațional de platină iridiată, sancționat în anul 1889, de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres — Franța.

În R.P.R. servește ca etalon național prototipul *nr. 2* atribuit în acest scop de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți din 1889. El se află în păstrarea Direcției Generale pentru Metrologie, Standarde și Invenții.

În sistemul CGS: gramul (masă), care este 1/1 000 din kg (masă) definit mai sus.

Unitatea de timp. În toate sistemele unitatea fundamentală de timp este *secunda* (*s*). Secunda (de timp mijlociu) reprezintă a 86 400-a parte a zilei solare mijlocii.

Anul tropic (adică intervalul mijlociu dintre două treceri consecutive ale soarelui la punctul echinoxial mijlociu de primăvară), are 365,242 198 79 de zile solare mijlocii.

Ora standard și implicit secunda sînt determinate de Biroul Internațional al Orei din Paris.

Conservarea și difuzarea orei în R.P.R. este în sarcina Observatorului Astronomic din București.

Unitatea de forță în sistemul SI este *Newtonul* (N).

Newtonul este forța necesară pentru a imprima, în vid, masei de 1 kg o accelerație de 1 m/s².

Pînă în ultimul timp, ca unitate de forță s-a folosit mai mult kilogramul-forță, care reprezintă forța a cărei valoare este egală cu greutatea prototipului internațional de masă, definit mai sus, măsurat în vid, la accelerația normală a gravitației de 9,80665 m/s².

În afară de unitățile fundamentale definite mai sus, mai sînt și unitățile derivate, dependente de sistemul ales. Pentru unitățile fundamentale și unitățile derivate s-a întocmit tabela 3.

---

[1] Metrul este lungimea, la temperatura de 0°C, a prototipului internațional de platină iridiată, sancționat în 1889 de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți și păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți din Sèvres-Franța.

Tabela 3

Unităţile mărimilor geometrice şi mecanice

Mărimea	Simbol	Ecuaţia de definiţie	Dimensiuni în sistemul LMT	Dimensiuni în sistemul LFT	Unităţi în sistemul CGS	Unităţi în sistemul SI	Unităţi în sistemul MKfS
Lungime	l	—	L	L	cm	m	m
Masă	m	$m=\frac{F}{a}$ [1]	M	$L^{-1}FT^2$	g	kg	$\frac{kgf\cdot s^2}{m}$
Timp	t	—	T	T	s	s	s
Arie	A	$A=l^2$	L^2	L^2	cm^2	m^2	m^2
Volum	V	$V=l^3$	L^3	L^3	cm^3	m^3	m^3
Unghi plan	α	$\alpha=\frac{s}{r}$	1	1	rad	rad	rad
Viteză	v	$v=\frac{s}{t}$	LT^{-1}	LT^{-1}	cm/s	m/s	m/s
Acceleraţie	a	$a=\frac{v}{t}$	LT^{-2}	LT^{-2}	cm/s^2	m/s^2	m/s^2
Viteză unghiulară	ω	$\omega=\frac{\theta}{t}$	T^{-1}	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s
Acceleraţie unghiulară	ε	$\varepsilon=\frac{\omega}{t}$	T^{-2}	T^{-2}	rad/s^2	rad/s^2	rad/s^2
Perioadă	T	$T=\frac{2\pi}{\omega}$	T	T	s	s	s
Frecvenţă	f	$f=\frac{1}{T}$	T^{-1}	T^{-1}	Hz	Hz	Hz
Forţă	F	$F=ma$ [2]	LMT^{-2}	F	dyn	N	kgf
Percusiune	P	$P=Ft$	LMT^{-1}	FT	dyn·s	N·s	kgf·s
Momentul unei forţe (cuplu)	$\mathcal{M}$	$\mathcal{M}=Fl$	L^2MT^{-2}	LF	dyn·cm	N·m	kgf·m
Impuls (cantitate de mişcare)	H	$H=mv$	LMT^{-1}	FT	$\frac{g\cdot cm}{s}$	$\frac{kg\cdot m}{s}$	kgf·s
Energie	W, E	$E=\frac{1}{2}mv^2$	L^2MT^{-2}	LF	erg	J	kgf·m
Lucru mecanic	W, L	$L=Fl\cos(\overline{F},\overline{l})$	L^2MT^{-2}	LF	erg	J	kgf·m

[1] Definiţia în sistemul MKfS.
[2] Definiţia în sistemele CGS şi SI.

Tabela 3 (*continuare*)

Mărimea	Simbol	Ecuația de definiție	Dimensiuni în sistemul		Unități în sistemul		
			LMT	LFT	CGS	SI	MKfS
Putere	P	$P=\frac{W}{t}$	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	erg/s	W	kgf·m/s
Moment de inerție al masei	J	$J=ml^2$	L^2M	LFT^2	$g\cdot cm^2$	$kg\cdot m^2$	$m\cdot kgf\cdot s^2$
Moment cinetic	K	$K=mvr=J\omega$	L^2MT^{-1}	LFT	$\frac{g\cdot cm^2}{s}$	$\frac{kg\cdot m^2}{s}$	m·kgf·s
Presiune	P	$P=\frac{F}{A}$	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	dyn/cm^2	N/m^2	kgf/m^2
Masă specifică (densitate)	ρ	$\rho=\frac{m}{V}$ [1]	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	g/cm^3	kg/m^3	$kgf\cdot s^2/m^4$
Greutate specifică	γ	$\gamma=\frac{G}{V}$	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	dyn/cm^3	N/m^3	kgf/m^3

Observație. În sistemul MKfS, se notează uneori cu „u" unitatea tehnică de masă, adică $u=\frac{kgf\cdot s^2}{m}$.

Unitățile alese se folosesc cu multiplii și submultiplii lor, formați pentru toate unitățile în sistemul zecimal. Fac excepție timpul și submultiplii vechi ai unghiului drept (formați în sistemul sexagesimal). De asemenea fac excepție sistemele anglo-saxone, care nu respectă sistemul zecimal.

În tabela 4 sînt date prefixe și simboluri pentru multiplii și submultiplii zecimali.

Tabela 4

Prefixe și simboluri pentru multiplii și submultiplii zecimali

Prefixe	Simboluri	Factori de multiplicare a unităților de referință	Prefixe	Simboluri	Factori de multiplicare a unităților de referință
pico	p	10^{-12}	deca	da	10^{1}
nano	n	10^{-9}	hecto	h	10^{2}
micro	μ	10^{-6}	kilo	k	10^{3}
centimili	cm	10^{-5}	miria	ma	10^{4}
decimili	dm	10^{-4}	hectokilo	hk	10^{5}
mili	m	10^{-3}	mega	M	10^{6}
centi	c	10^{-2}	giga	G	10^{9}
deci	d	10^{-1}	tera	T	10^{12}
—	—	10^{0}			

[1] Definiția în sistemele CGS și SI

Scrierea prefixelor și simbolurilor pentru multiplii și submultiplii valorilor care nu se găsesc în tabelă, precum și formarea prefixului compus etc., se face după regulile cunoscute.

§ 8. Unități cu denumiri speciale și unități în afara sistemelor. În afară de unitățile sistemelor generale și cu utilizare restrînsă, în practică, în tehnică și fizică, se folosesc diferite unități care nu se încadrează în nici unul dintre sistemele studiate pînă acum. Ele sînt în circulație datorită interesului practic pe care-l prezintă sau în virtutea tradiției utilizării lor.

Principalele unități de acest fel, care se folosesc în unele împrejurări, sînt:

Lungime	Micron (μ)	1 μ = 10^{-4} cm
	Angström (Å)	1 Å = 10^{-8} cm
	Unitate X (U.X.)	1 U.X. = 10^{-11} cm
	An lumină	1 an lumină: 9,461·10^{-12} km
	Parsec	1 parsec = 30,84·10^{-12} km
	Milă marină (Mm)	1 Mm = 1 852 m
	Țol	1 țol = 2,54 cm
Suprafață:	Ar (a)	1 a = 100 m^2
	Hectar (ha)	1 ha = 10 000 m^2
Volum:	Ster (st)	1 st = 1 m^3
Capacitate:	Litru (l)	1 l = 1 dm^3
	Dublu decalitru (ddal)	1 ddal = 20 l = 20 dm^3
Unghi plan:	Miime adevărată (m_a)	1 $m_a = 10^{-3}$ rad
Masă:	Mol (mol)	cantitatea de substanță a cărei masă, exprimată în grame, este numeric egală cu greutatea moleculară
Timp:	Oră (h)	1 h = 60 min = 3 600 s
Viteză:	Nod (Nd)	1 Nd = 1 Mm/h = 1 852 m/h
Forță:	Tonă-forță (tf)	1 tf = 1 000 kgf
	1 chintal (q)	1 q = 100 kgf
Energie:	Calorie mare (kcal)	1 kcal = 427 kgf·m = 4,18·10^{10} erg
	Calorie mică (cal)	1 cal = 0,427 kgf·m
Putere:	Cal-putere (CP)	1 CP = 75 kgf·m/s
Presiune:	Bar (bar)	1 bar = 10^6 barye
	Atmosferă fizică (At)	1 At = 1,03322 kgf/cm^2 = 760 mm Hg
	Atmosferă tehnică (at)	1 at = 1 kgf/cm^2
	Torr (torr)	1 torr = 1 mm Hg

Sistemul de unități legal în R.P.R. este sistemul zecimal.

§ 9. Unități științifice. Pentru a se evita erori care s-ar datora unor factori externi greu de combătut (variația lungimilor din cauza variației temperaturii, variația gravitației cu latitudinea și altitudinea etc.), s-au stabilit și *unități științifice*, care sînt practic invariabile.

§ 9. Alte sisteme de unități. În afară de unitățile bazate pe sistemul zecimal, mai sînt sisteme bazate pe tradiție sau pe alte considerații. Astfel, unitățile anglo-saxone și americane sînt bazate pe un sistem tradițional, fără relații științifice între diferitele unități, ceea ce dă dificultăți în calcule. De exemplu:

1 yard = 0,914398 m = 3 picioare = 36 degete

1 livră = 16 uncii = 1/14 stone

1 HP=76,040 kgf·m/s

1 milă=8 forlongs=320 poles=1 760 yards=63 360 inches (pe uscat)=72 960 inches (pe mare).

Sistemul cel mai general este sistemul zecimal care simplifică considerabil calculele și le ușurează din punct de vedere matematic. Avantajele se văd în deosebi în industrie și în calculele științifice și tehnice.

§ 10. **Unități vechi de măsură.** Pînă la introducerea sistemului metric au funcționat atît în țara noastră cît și în alte țări, unități de măsură locale cu caracter tradițional istoric.

Astfel, în Muntenia, Moldova și Transilvania s-au folosit următoarele unități:

Pentru lungimi: stînjenul Șerban-Vodă, 1 stj=8 palme=64 degete=640 linii=1,9665 m;

1 prăjină=3 stj;

stînjenul Constantin-Vodă avea 2,02 m;

1 cot=9 rupi=16 grefi=0,664 m; 1 poștă avea aproximativ 10 000 stj.

Stînjenul moldovenesc sau gospod: 1 stj=8 palme=64 palmace=768 linii=2,23 m. Prăjina moldovenească avea 4 stj, iar cotul moldovenesc 0,637 m.

Stînjenul transilvănean (cadastral): 1 stj=6 picioare=144 țoli=1 728 linii=1,89648 m.

Pentru suprafețe: în Muntenia, pogonul reprezenta un dreptunghi cu o latură de 72 stj (24 prăj.), și cealaltă de 18 stj. (6 prăj.), avînd o suprafață de 144 prăjini pătrate=1 296 stj. pătrați=5 011,7891 m².

În Moldova, falcea avea 80 prăjini fălcești=2 880 stj. pătrați=14 320,952 m².

În Transilvania, 1 jugăr cadastral=576 prăjini pătrate=1 600 stj. pătrați=57 600 picioare pătrate=5 754,6415 m².

Unitățile de greutate erau:

În Muntenia și Moldova: ocaua=4 litre=1 271,86 g (în Muntenia) și 1 281 g (în Moldova).

În U.R.S.S. se foloseau, în trecut, următoarele unități de măsură:

Pentru lungimi: 1 verstă=1,067 km;

1 sajen (sj)=3 arșini=48 verșoci=2,134 m.

Pentru suprafețe: 1 verstă pătrată=1,138 km²;

1 desiatină=1,093 ha;

1 sajen pătrat=4,552 m².

Pentru greutăți:

1 pud=40 funzi=1 280 loți=16,38 kg.

B. SIMILITUDINE. TEORIA MODELELOR

§ 11. **Similitudine. Modele.** Teoria similitudinii dinamice a fost enunțată pentru prima dată de Newton, care a aplicat-o în Mecanica fluidelor. După el, diferiți cercetători (Froude, Cauchy, Reynolds, Mach, Maiewski etc.) au formulat legi de similitudine, referindu-se în special la probleme din Mecanica fluidelor.

La baza teoriei similitudinii stau două postulate.

1. Desfășurarea oricărui fenomen fizic poate fi exprimată cu ajutorul mijloacelor de care dispun matematicile, în general printr-un sistem de ecuații funcționale care stabilesc relațiile dintre diferitele mărimi fizice caracteristice acelui fenomen.

2. Desfășurarea unui fenomen fizic nu depinde de sistemul de unități în care sînt măsurate mărimile fizice caracteristice ale fenomenului studiat.

Similitudinea are trei teoreme de bază:

1) *Valorile criteriilor de similitudine omoloage a două procese fizice asemenea sînt egale.*

Teorema permite extinderea rezultatelor unor criterii experimentale la toate fenomenele asemenea celui studiat.

Ea a fost enunţată iniţial de Newton (1686). A fost folosită de V. L. Kiripicev în probleme de elasticitate, iar actuala formă a teoriei a fost dată de T. A. Afanasieva—Ehrenfest (1915) care a aplicat-o în analiza dimensională.

2) *Orice proces fizic poate fi descris cu ajutorul unor relaţii funcţionale între criteriile de similitudine respective.*

Teorema a fost enunţată în 1911 de cărtre prof. Federman din Petersburg.

3) *Pentru ca două procese fizice să fie asemenea, condiţia necesară şi suficientă este ca ele să fie calitativ asemenea, iar criteriile lor de similitudine omoloage să ia valori egale.*

Teorema a fost enunţată iniţial de prof. V. L. Kiripicev din Petersburg (1874), care a explicat-o la fenomene elastice, iar demonstraţia ei a fost dată de acad. M. V. Kiripicev (1930), ultima demonstraţie (1954) bazîndu-se pe teoria grupurilor lui Lie.

Similitudinea a devenit în ultimele decenii un instrument de cercetare în toate domeniile fizicii şi tehnicii.

Adesea similitudinea permite simplificarea unor probleme foarte complicate, precum şi reducerea cercetărilor la un număr suficient de mic de cazuri tipice.

În rezolvarea multor probleme importante din domeniul hidrodinamicii, aerodinamicii, termotehnicii, elasticităţii etc. se întîmpină uneori dificultăţi matematice imposibil de învins, iar alteori fenomenul studiat este atît de complicat şi depinde de atît de mulţi parametri, încît nici nu i se pot stabili ecuaţiile mişcării.

În astfel de cazuri, la construcţia avioanelor, vapoarelor, digurilor şi a altor construcţii complexe se folosesc şi *metode experimentale*, bazate pe teoria similitudinii şi a modelelor.

Experimentul are dublu scop:

a) Permite ca dintr-un număr mic de experienţe să fie deduse legi valabile pentru multiple şi variate fenomene din diferite domenii ale fizicii;

b) Permite înlocuirea studiului fenomenelor reale prin studiul fenomenelor calitativ asemenea, la scară redusă (sau amplificată), fenomene care pot fi realizate practic în laboratoare.

Pentru a ne da seama de modul în care se vor comporta anumite construcţii proiectate şi pe care le vom numi *originale* (sau *prototipuri*) se recurge adesea la executarea unor construcţii similare, de obicei la o scară redusă, denumite *modele* sau *machete*. În scopul de a se stabili modul în care se vor comporta originalele în exploatare, se supun modelele în laboratoare la acţiuni analoge acelora la care vor fi supuse originalele. Înlocuirea studiului unui fenomen din natură prin studierea în laborator a unui fenomen analog pe un model redus sau amplificat, constituie studiul prin *modelare*.

Studiul fenomenului fizic este înlocuit astfel prin studiul unui fenomen similar (de exemplu macheta unui baraj sau a unui avion) care se realizează practic mult mai comod şi mai ieftin, şi asupra căruia se fac în laborator încercări similare celor la care va fi supus prototipul în realitate.

Vom aminti şi o metodă mai recentă, numită *cromoplasticitate*, care foloseşte un material special (cromoplastic) pentru studiul pe modele al comportării pieselor intrate în zona elasto-plastică[1].

Se fac astfel măsurări de traiectorii, timpuri, viteze, acceleraţii, forţe, tensiuni, lucruri mecanice, puteri, temperaturi etc.

Similitudinea fizică poate fi considerată ca o generalizare a similitudinii geometrice. Din geometrie se ştie că două figuri geometrice sînt asemenea, dacă lungimile lor corespunzătoare sînt în acelaşi raport de asemănare, numit scară.

Vom spune, prin analogie, că două fenomene fizice sînt similare, dacă putem obţine caracteristicile unuia, din ale celuilalt, printr-un simplu calcul, pe baza scărilor respective.

Dacă toate mărimile care iau parte la fenomenul mecanic se transpun asemenea de pe original pe model, avem *similitudine mecanică generală*. Pentru un astfel de model sînt valabile toate legile aplicabile originalului.

Deoarece unele mărimi ca acceleraţia gravitaţiei, greutatea specifică, coeficientul de elasticitate, frecarea etc. nu pot fi modificate după voie, în practică se utilizează o *similitudine incompletă*, obţinîndu-se similitudinea numai pentru mărimile de bază ale fenomenului.

Problemele similitudinii a două sisteme de puncte materiale pot fi examinate din diferite puncte de vedere, în funcţie de care avem următoarele feluri de similitudine: geometrică, statică, cinematică, dinamică, termică etc.

În cele ce urmează se vor nota, în genere, cu litere mici mărimile pe model şi cu majusculele respective mărimile pe prototip. În cazul cînd trebuie să folosim aceeaşi literă atît pentru dimensiunea modelului, cît şi pentru aceea a prototipului, aceasta se pune în paranteză.

a) *Similitudinea geometrică*. În similitudinea geometrică întîlnim numai *spaţiul*. Similitudinea geometrică se referă numai la forma corpului, care trebuie să aibă lungimile omoloage proporţionale, iar unghiurile omoloage egale. În geometrie avem o singură mărime fundamentală, *lungimea* $[L]$ cu ajutorul căreia pot fi măsurate toate mărimile geometrice: unghiuri, lungimi, suprafeţe, volume, ale căror formule de dimensiuni sînt respectiv $[L^0]$, $[L^1]$, $[L^2]$, $[L^3]$.

Notînd cu l lungimile pe model şi cu L pe prototip avem:

$$\text{scara lungimilor} \quad \frac{l}{L}=\lambda \tag{2.10}$$

$$\text{scara suprafeţelor} \quad \frac{A}{(A)}=\lambda^2 \tag{2.11}$$

$$\text{scara volumelor} \quad \frac{V}{(V)}=\lambda^3 \tag{2.12}$$

de unde rezultă că, pentru model vom avea:

$$l=\lambda L, \quad A=\lambda^2(A), \quad V=\lambda^3(V).$$

[1] „*Cromoplasticitatea*" — Ştefan Bălan, S. Răutu, N. Goldenberg, V. Petcu; Comunicări Academia R.P.R. — nr. 11/1958.

b) *Similitudinea cinematică.* Spunem că mișcările a două sisteme sînt cinematic asemenea dacă traiectoriile mișcărilor ambelor sisteme sînt geometric asemenea și dacă vitezele tuturor punctelor omoloage ale sistemelor sînt în același raport.

În similitudinea cinematică se folosesc două scări fundamentale:

scara lungimilor (2.10) $\frac{l}{L}=\lambda$

și

$$\text{scara timpurilor} \quad \frac{t}{T}=\tau \tag{2.13}$$

unde t este timpul fenomenului pe model, iar T este timpul corespunzător pe prototip.

Scara vitezelor corespunzătoare pe model și prototip este

$$\frac{v}{(v)}=\frac{\lambda}{\tau}=\lambda\tau^{-1}. \tag{2.14}$$

Scara accelerațiilor este

$$\frac{a}{(a)}=\frac{\lambda}{\tau^2}=\lambda\tau^{-2}. \tag{2.15}$$

Scara turațiilor este aceeași cu a vitezelor unghiulare:

$$\frac{n}{(n)}=\frac{\omega}{(\omega)}=\tau^{-1}; \tag{2.16}$$

iar scara accelerațiilor unghiulare este

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon)}=\tau^{-2}. \tag{2.17}$$

c) *Similitudinea dinamică.* Două sisteme de puncte materiale sînt dinamic asemenea, dacă, pe lîngă similitudinea cinematică, au masele într-un același raport și dacă sînt egale raporturile între forțele omoloage care acționează asupra punctelor omoloage ale celor două sisteme.

În dinamică există trei scări fundamentale: scara lungimilor λ dată de (2.10), scara timpurilor τ dată de (2.13) și scara maselor

$$\frac{m}{M}=\mu \tag{2.18}$$

unde m este masa pe model, iar M este masa respectivă pe prototip.

Pentru viteze folosim scara (2.14), iar pentru accelerații scara (2.15) de la similitudinea cinematică.

Notînd cu f forța pe model și cu F forța respectivă pe prototip, pe baza legii a doua a lui Newton obținem scara forțelor:

$$\frac{f}{F}=\frac{ma}{M(a)}=\frac{m}{M}\cdot\frac{a}{(a)}=\mu\frac{\lambda}{\tau^2}$$

adică:

$$\frac{f}{F}=\mu\frac{\lambda}{\tau^2}=\chi. \tag{2.19}$$

Expresia $\varkappa=\lambda\mu\tau^{-2}$ este cunoscută sub denumirea de *ecuaţia caracteristică a lui Bertrand*; ea stabileşte relaţia fundamentală între cele patru scări principale de similitudine λ, μ, τ şi $\varkappa$.

Pentru celelalte mărimi derivate se obţin imediat următoarele scări: scara lucrului mecanic

$$\frac{L}{(L)}=\frac{fl}{FL}=\varkappa\lambda=\mu\lambda^2\tau^{-2}, \tag{2.20}$$

scara puterilor

$$\frac{p}{P}=\frac{fl/t}{FL/T}=\varkappa\lambda\tau^{-1}=\mu\lambda^2\tau^{-3}, \tag{2.21}$$

scara greutăţilor specifice

$$\frac{\gamma}{(\gamma)}=\frac{f/l^3}{F/L^3}=\varkappa\lambda^{-3}=\mu\lambda^{-2}\tau^{-2}, \tag{2.22}$$

scara densităţilor

$$\frac{\rho}{(\rho)}=\frac{m/V}{M/(V)}=\mu\lambda^{-3}. \tag{2.23}$$

Cu aceste scări se lucrează în diferite *legi de similitudine*, numite uneori şi *legi de modelizare*.

§ 12. Legea generală de similitudine a lui Newton. Să admitem un sistem de puncte materiale A_i considerat ca model şi un al doilea sistem de puncte materiale (A_i) considerat ca prototip, asemenea cu primul sistem, din punct de vedere geometric, cinematic şi dinamic.

Fie λ, μ şi τ cele trei scări ale mărimilor fundamentale, date respectiv de expresiile (2.10), (2.18), (2.13).

Să determinăm scara care trebuie aleasă pentru forţe, astfel încît să existe similitudine dinamică pentru mişcările celor două sisteme de puncte materiale.

Pentru aceasta este necesar ca ecuaţiile diferenţiale ale mişcării modelului şi prototipului să fie identice.

Aşa cum se va arăta în dinamică, ecuaţiile mişcării sistemelor sînt date de principiul lucrului mecanic virtual sub forma:

$$\Sigma(\bar{F}_i-m_i\bar{a}_i)\delta\bar{r}_i=0 \tag{2.24}$$

pentru model şi

$$\Sigma[(\bar{F}_i)-M_i(\bar{a}_i)]\delta(\bar{r}_i)=0 \tag{2.25}$$

pentru prototip, unde prin $\bar{F}_i$ s-a notat rezultanta forţelor date aplicate în punctul A_i de masă m_i şi acceleraţie $\bar{a}_i$, prin $\delta\bar{r}_i$ deplasarea virtuală a punctului A_i de pe model, iar prin $(\bar{F}_i)$, M_i, (a_i) şi $\delta(\bar{r}_i)$ mărimile respective ale punctului (A_i) de pe prototip.

Forţele $-m_i\bar{a}_i$ şi $-M_i(\bar{a}_i)$ sînt forţele de inerţie corespunzătoare punctelor A_i şi (A_i).

Ţinînd seama de scările λ, μ, τ ale mărimilor fundamentale, raportul dintre valoarea forţelor de inerţie pe model şi prototip este

$$\frac{m_i a_i}{M_i(a_i)}=\lambda\mu\tau^{-2}=\varkappa. \tag{2.26}$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţiile (2.24) şi (2.25) să fie identice este ca forţele $\bar{F}_i$ şi $(\bar{F}_i)$ să fie în acelaşi raport $\varkappa=\lambda\mu\tau^{-2}$ dat de (2.26), de unde rezultă:

$$\bar{F}_i=\varkappa(\bar{F}_i)=\lambda\mu\tau^{-2}(\bar{F}_i). \qquad (2.27)$$

Relaţia (2.26) exprimă *legea de similitudine a lui Newton.*

Din relaţia (2.27) rezultă:

a) Forţele respective de pe model şi prototip trebuie să fie paralele.

b) Raportul modulelor lor trebuie să fie constant şi egal cu

$$\varkappa=\lambda\mu\tau^{-2}.$$

Legea similitudinii se poate obţine şi pe calea ecuaţiilor dimensionale ale mărimilor care intră în ecuaţiile mişcării. Astfel, să considerăm o mişcare oarecare a unui sistem din natură şi să schimbăm unităţile cu care se măsoară valorile ce intră în ecuaţia de mişcare. Dacă micşorăm unitatea de lungime de λ ori, unitatea de masă de μ ori şi unitatea de timp de τ ori, unitatea pentru măsurarea forţelor se va micşora de $\lambda\mu\tau^{-2}$ ori. Rezultă că cifrele care reprezintă valorile lungimilor, maselor, timpurilor şi forţelor se vor mări respectiv de λ, μ, τ şi $\varkappa$ ori; noile cifre trebuie să satisfacă ecuaţiile anterioare ale mişcării. Această a doua demonstraţie a legii generale a similitudinii ne prezintă legea similitudinii în dinamică ca o consecinţă a omogenităţii tuturor termenilor care intră în ecuaţiile de mişcare.

Ca exemplu să considerăm mişcarea centrală a două sisteme, forţa de atracţie fiind proporţională cu masa punctelor şi cu distanţa lor la puterea n. Raportul forţelor de atracţie ale celor două sisteme este:

$$\varkappa=\frac{f}{F}=\frac{mr^n}{MR^n}=\mu\lambda^n. \qquad (2.28)$$

Din egalarea expresiei (2.28) cu (2.19) rezultă:

$$\tau^2=\lambda^{1-n}. \qquad (2.29)$$

Considerînd că punctele descriu orbite în jurul centrului atractiv O rezultă că τ este egal cu raportul timpurilor de rotaţie a maselor în jurul lui O.

În cazul particular $n=-2$, adică atunci cînd forţa de atracţie este invers proporţională cu pătratul distanţelor, formula (2.29) devine:

$$\tau^2=\lambda^3$$

care exprimă că pătratele timpurilor de rotaţie sînt proporţionale cu cuburile distanţelor; se găseşte astfel pe această cale cea de-a treia lege a lui Kepler.

§ 13. **Legile speciale de similitudine.** Legea de similitudine a lui Newton impune ca toate forţele care acţionează asupra celor două sisteme considerate să se găsească în raportul $\varkappa$ dat de (2.26).

Deoarece în practică nu toate forţele pot fi reduse în acest raport, se consideră în fiecare caz în parte numai similitudinea acelor forţe care se

consideră predominante pentru fenomenul respectiv, neglijîndu-se forţele secundare. Astfel, după natura forţelor considerate ca predominante, se obţin diferite legi speciale de similitudine, de forma:

$$\tau=\psi(\lambda). \tag{2.30}$$

Fără a intra în studiul legilor speciale de modelizare, vom cita pe cele mai importante.

a) Dacă se consideră că forţele principale care produc mişcarea sînt *forţele de gravitaţie* se obţine legea de similitudine a lui Froude:

$$\tau=\sqrt{\lambda}. \tag{2.31}$$

b) Dacă se consideră *forţele elastice* ca forţe predominante se obţine legea de similitudine a lui Cauchy:

$$\tau=\lambda. \tag{2.32}$$

c) Considerînd că *forţele de frecare interioare* au acţiune dominantă în ecuaţiile de mişcare, cum este în cazul lichidelor vîscoase, se obţine legea de similitudine a lui Reynolds:

$$\tau=\lambda^2. \tag{2.33}$$

Astfel de legi speciale de similitudine au o importanţă deosebită în diferitele domenii ale mecanicii aplicate. Studiul lor se face, însă, la disciplina ştiinţifică corespunzătoare.

PARTEA A DOUA

STATICA

§ 1. **Generalități.** Statica este acea parte a mecanicii care studiază transformarea sistemelor de forțe aplicate corpurilor solide în sisteme echivalente și condițiile de echilibru ale sistemelor de forțe.

Un sistem de forțe este constituit dintr-un ansamblu de forțe considerat în totalitatea lui; un sistem de forțe este echivalent cu un ansamblu de forțe dat (primar), dacă se poate substitui ansamblului de forțe primar fără să-i modifice efectele mecanice asupra unui corp solid dat.

În statică este vorba de un echilibru relativ, adică în raport cu un sistem de referință ales. În vorbirea curentă se spune adeseori, că se realizează echilibrul corpurilor, nu echilibrul sistemelor de forțe — acest lucru fiind îndreptățit, deoarece existența forțelor presupune întotdeauna existența corpurilor.

Vom studia în primul rînd statica punctului material și apoi statica corpului solid, considerînd corpurile, pe rînd, libere sau cu legături față de mediul înconjurător. Acolo unde va fi cazul se vor considera și frecările. Sistemele de forțe vor fi considerate în cazul lor cel mai general situate oricum în spațiu, sau în cazuri particulare: forțe concurente, forțe paralele în plan etc.

Din punct de vedere istoric, statica s-a dezvoltat cu mult înaintea celorlalte capitole ale Mecanicii, din nevoia oamenilor de a construi sau de a-și face dispozitive care să le ușureze munca, fapt care cerea să se studieze mai îndeaproape problemele legate de echilibrul unor corpuri. Astfel, în antichitate, *Arhimede* (287—212 î. e. n) este primul care a dat formulare teoretică unor probleme de mecanică, bazîndu-se pe practică și pe calcule matematice. Din acest punct de vedere, el poate fi socotit ca părinte al mecanicii teoretice. El a enunțat prima dată legea pîrghiilor, a definit centrul de greutate al unor corpuri, a pus bazele hidrostaticii (celebrul principiu care îi poartă numele), a studiat șurubul etc.

Mai tîrziu *Pappus* (secolul al IV-lea e. n) încearcă să continue cercetările lui Arhimede cu privire la mașinile simple ale timpului său și la centrele de greutate. El a enunțat două teoreme care au fost reluate mai tîrziu de Guldin.

Abia mult mai tîrziu, începînd din secolul al XVI-lea, statica a înregistrat progrese mai importante. *Stevin* (1548—1620) a publicat în 1586 opera sa remarcabilă relativ la statică și hidrostatică, în care studiază echilibrul corpurilor grele pe planul înclinat și ajunge la regula paralelogramului pentru compunerea forțelor concurente. Această lege a fost regăsită mai tîrziu de *Galilei* (1564—1642) care o generalizează și pentru cazul mișcării corpurilor. *Newton* (1642—1727) enunță principiile de bază ale mecanicii, care au contribuit amplu la dezvoltarea mecanicii în general și care au dus și la precizarea unor capitole din statică. *Varignon* (1654—1722) a stabilit teorema momentelor și a studiat mașinile simple. Mai tîrziu, *Poinsot* (1777—1859) introduce în statică teoria cuplurilor, iar în secolele al XIX-lea și al XX-lea statica a ajuns la forma actuală.

III. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

A. STATICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER

§ 1. Punct material liber. Punct material supus la legături. Se înțelege prin *punct material liber*, un punct material care poate ocupa orice poziție în spațiu, poziția sa fiind determinată numai de forțele care acționează asupra lui, nu și de alte condiții geometrice. Poziția sa este definită de trei parametri independenți, coordonatele punctului.

Se înțelege prin *punct material supus la legături* un punct material obligat să rămînă pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix din spațiu.

În aceste cazuri, poziția punctului poate fi definită cu ajutorul unui număr mai redus de parametri. Astfel, în cazul unui punct obligat să rămînă pe o suprafață sînt necesari numai doi parametri independenți, coordonatele curbilinii ale punctului. În cazul unui punct obligat să rămînă pe o curbă este necesar un singur parametru, iar în cazul unui punct obligat să rămînă într-un anumit punct din spațiu nu este nevoie de nici un parametru.

Numărul de parametri necesari pentru a defini poziția unui punct definește numărul de *grade de libertate*. Astfel, un punct material liber are trei grade de libertate; un punct material obligat să rămînă pe o suprafață are două grade de libertate; un punct material obligat să rămînă pe o curbă are un grad de libertate, iar un punct material obligat să rămînă într-un punct fix din spațiu nu are nici un grad de libertate.

Exemplu. Punctul material M de greutate $\overline{G}$, legat cu trei fire petrecute peste trei scripeți foarte mici, A, B și O (fig. 3.1, *a*) la capetele cărora atîrnă greutățile P, Q, S, este un punct material *liber*, pentru că el poate ocupa orice poziție în spațiu. Bineînțeles că el ocupă o anumită poziție de echilibru determinată de forțele $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{S}$ și $\overline{G}$.

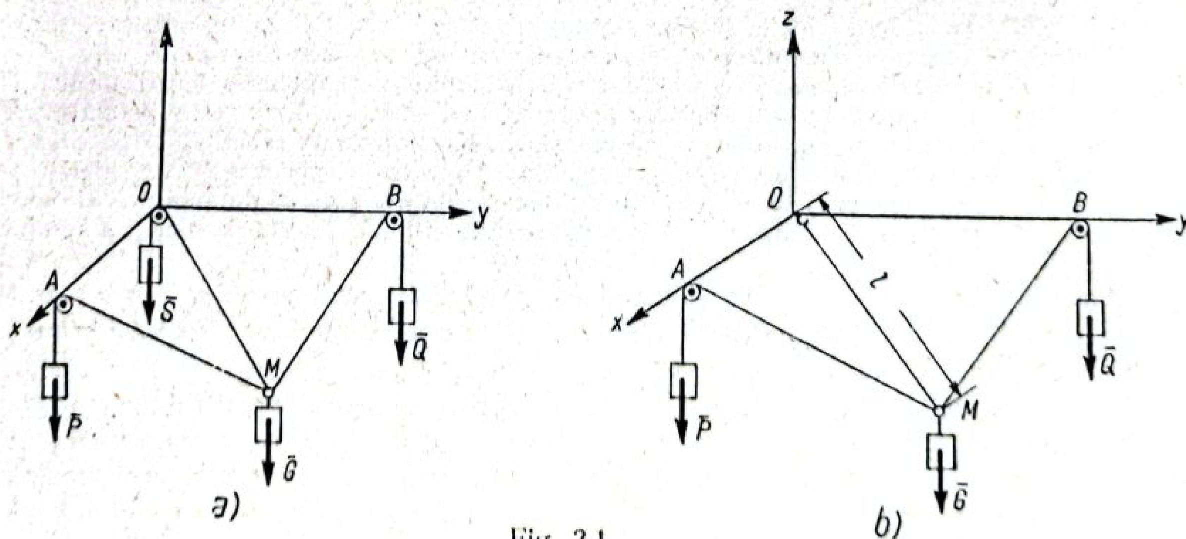


Fig. 3.1

Cu totul alta este situația punctului material M din fig. 3.1, *b* legat de punctul O cu un fir OM inextensibil, de lungime l și cu două fire trecute peste doi scripeți foarte mici A și B la capetele cărora atîrnă respectiv greutățile P și $\overline{Q}$.

Dacă firul OM este întins, punctul material este obligat să rămînă pe o sferă cu centrul în O și avînd raza l. Deci, poziția sa de echilibru nu este determinată numai de forțele $\overline{P}$, $\overline{Q}$

și G, ci și de obligația geometrică de a rămîne pe sferă. Este deci vorba de un punct material *supus la legături*.

§ 2. Punct material liber acționat de sisteme de forțe concurente. Să considerăm un corp pentru care se poate folosi ca model mecanic punctul material și un sistem de forțe care acționează asupra acestuia. Punctele de aplicație ale forțelor sistemului coincid și nu pot fi schimbate, deci forțele sînt *concurente* și au caracter de vectori *aplicați* (*legați*).

Experiența arată că, dacă în particular asupra punctului material O acționează simultan două forțe $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$, acestea pot fi înlocuite cu o forță unică $\bar{\mathcal{R}}$ denumită *rezultantă*. Mărimea, direcția și sensul rezultantei sînt date de diagonala paralelogramului construit cu ajutorul vectorilor care reprezintă cele două forțe (fig. 3.2). Acest rezultat experimental este cunoscut sub numele de *principiul paralelogramului*. El pune în evidență faptul că forțele sînt mărimi vectoriale pentru care se aplică operația de adunare definită în calculul vectorial prin *regula paralelogramului* și în general toate operațiile și rezultatele valabile pentru vectorii concurenți (cap. I, § 17).

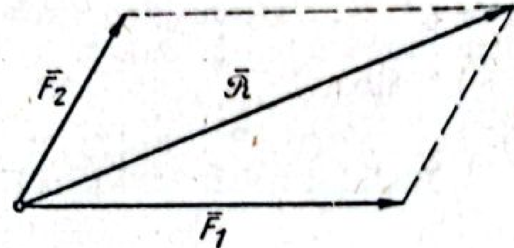


Fig. 3.2

Pentru acest caz se pot face următoarele observații:

a) *Operații elementare de echivalență*. Într-un sistem de forțe concurente se pot înlocui, după regula paralelogramului, două dintre forțe cu rezultanta lor sau una dintre forțe cu componentele ei pe două direcții concurente, fără ca efectul mecanic al sistemelor de forțe asupra punctului să se schimbe. În particular, se pot suprima sau introduce două forțe de același modul și opuse. Acestea sînt operații elementare de echivalență.

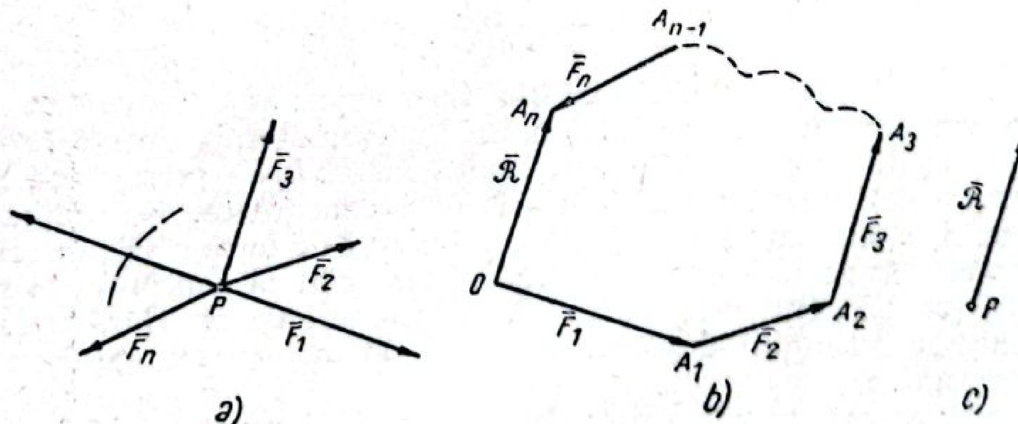


Fig. 3.3

b) *Invarianți*. Rezultanta $\bar{\mathcal{R}}$ a unui sistem de forțe concurente, obținută prin construcția grafică denumită *poligonul forțelor*, este un *invariant* față de operațiile elementare de echivalență. Poligonul forțelor extinde regula paralelogramului (fig. 3.3). Fiind dat un sistem de forțe concurente

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, care acţionează asupra unui punct material P (fig. 3.3,*a*), se alege un punct O arbitrar în spaţiu în care se aplică un vector $\overline{OA_1}$, echipolent cu $\overline{F}_1$; în extremitatea acestuia se aplică un vector $\overline{A_1A_2}$ echipolent cu $\overline{F}_2$ şi aşa mai departe.

Rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$ a sistemului de forţe concurente este dată în mărime, direcţie şi sens de vectorul $\overline{OA}_n$ care închide poligonul forţelor $OA_1\, A_2 \ldots A_n$ (fig. 3.3, *b*). Sistemul de forţe concurente din fig. 3.3, *a* este echivalent cu forţa unică din fig. 3.3, *c*.

Vom scrie

$$\overline{\mathcal{R}} = \Sigma \overline{F}_i. \tag{3.1}$$

Modulul rezultantei se obţine din relaţia

$$\mathcal{R}^2 = \Sigma F_i^2 + 2 \sum_i \sum_j F_i \cdot F_j \cos\,(\overline{F}_i,\ \overline{F}_j). \tag{3.2}$$

Proiectînd relaţia (3.1) pe axe, rezultă proiecţiile rezultantei

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i. \tag{3.3}$$

Cu ajutorul acestor proiecţii se poate determina modulul rezultantei şi cosinusurile sale directoare, folosind formulele

$$\mathcal{R} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{3.4}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{3.5}$$

c) *Echivalenţa a două sisteme de forţe concurente*. Rezultanta este singurul invariant al unui sistem de forţe concurente. Ca urmare ea singură caracterizează un sistem de forţe concurente. Rezultă imediat că fiind date două sisteme de forţe concurente (S) şi (S'), condiţia ca ele să fie echivalente este să aibă aceeaşi rezultantă

$$\overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathcal{R}}'. \tag{3.6}$$

§ 3. **Echilibrul punctului material liber supus la acţiunea unui sistem de forţe concurente.** Să considerăm un punct material liber care se află în repaus faţă de un triedru de referinţă inerţial. Să presupunem, apoi, că asupra sa acţionează un sistem de forţe concurente. Ne propunem să găsim condiţia necesară şi suficientă ca sistemul de forţe să fie în echilibru sau, ceea ce este acelaşi lucru, ca punctul material să continuie să rămînă în repaus (poziţia punctului material, în sistemul de referinţă ales, să nu se schimbe cu timpul) după ce sistemul de forţe a fost aplicat punctului material.

Pentru aceasta se vor utiliza două principii şi anume: principiul paralelogramului forţelor şi principiul inerţiei.

Principiul paralelogramului forţelor permite să se înlocuiască sistemul de forţe concurente cu o forţă unică $\mathcal{R}$, rezultanta sistemului.

Conform principiului inerţiei, dacă asupra punctului material liber nu acţionează nici o forţă şi punctul material se găseşte în repaus faţă de un reper fix, el va continua să rămînă în repaus şi reciproc.

Pe baza acestor două principii se poate trage concluzia că pentru echilibru este necesar şi suficient ca forţa unică $\overline{\mathcal{R}}$ la care s-a redus sistemul de forţe concurente să fie nulă

$$\overline{\mathcal{R}}=0. \tag{3.7}$$

Pentru că $\overline{\mathcal{R}}$ este suma vectorială a forţelor ce alcătuiesc sistemul ($\overline{\mathcal{R}}=\Sigma\overline{F}_i$), rezultă că ecuaţia vectorială (3.7) mai poate fi scrisă

$$\Sigma\overline{F}_i=0. \tag{3.8}$$

Această condiţie vectorială este echivalentă cu trei ecuaţii scalare, obţinute prin proiectarea ei pe axele unui triedru ortogonal.

$$\Sigma X_i=0, \quad \Sigma Y_i=0, \quad \Sigma Z_i=0. \tag{3.9}$$

În cazul unui sistem de forţe în acelaşi plan, problema nu se particularizează dacă se presupune că planul în care acţionează forţele este xOy. Atunci $Z_i=0$ şi ultima dintre ecuaţiile (3.9) este identic satisfăcută. Rămîn atunci două condiţii de echilibru

$$\Sigma X_i=0, \quad \Sigma Y_i=0. \tag{3.10}$$

De asemenea, în cazul unui sistem de forţe avînd acelaşi suport, problema nu se particularizează dacă se presupune că suportul comun este axa Ox. Atunci $Y_i=0$, $Z_i=0$ şi ultimele două ecuaţii (3.9) sînt identic satisfăcute. Rămîne atunci o singură ecuaţie scalară de echilibru

$$\Sigma X_i=0. \tag{3.11}$$

§ 4. **Problemele staticii punctului material liber.** Problemele privind echilibrul punctului material liber pot fi împărţite în două categorii:

a) Probleme în care se dau forţele care acţionează asupra punctului material şi se cere să se determine poziţia lui de echilibru.

b) Probleme în care se dă poziţia de echilibru a punctului şi se cer forţele care trebuie să acţioneze asupra lui pentru a-l menţine în această poziţie.

În prima categorie de probleme, necunoscutele sînt coordonatele punctului, în număr de trei în spaţiu sau două în plan. Deoarece pentru determinarea lor se dispune de un număr de trei ecuaţii scalare în spaţiu sau de două ecuaţii scalare în plan, rezultă că în general problemele din prima categorie pot fi rezolvate. Bineînţeles, nu este exclusă posibilitatea ca sistemul de ecuaţii de echilibru să fie nedeterminat sau imposibil. În aceste cazuri există respectiv o infinitate de poziţii de echilibru posibile sau nu există nici una.

În a doua categorie de probleme, necunoscutele sînt mărimile şi direcţiile forţelor. Dacă nu se face nici o menţiune asupra forţelor, problemele din această categorie sînt în general nedeterminate, căci există o infinitate de sisteme de forţe care menţin un punct material în repaus. Dacă se impun forţelor anumite condiţii, fie în ce priveşte numărul lor, fie mărimea lor etc. atunci este posibil ca şi problemele din această categorie să fie deter-

minate. Pentru aceasta este necesar ca numărul necunoscutelor scalare introduse să nu fie mai mare de trei în spaţiu şi mai mare de două în cazul forţelor în plan.

A p l i c a ţ i e. 1°. Se consideră într-un plan vertical un punct material de greutate G, legat cu două fire petrecute peste doi scripeţi S_1 şi S_2. La extremităţile firelor atîrnă respectiv greutăţile P şi Q (fig. 3.4, *a*).

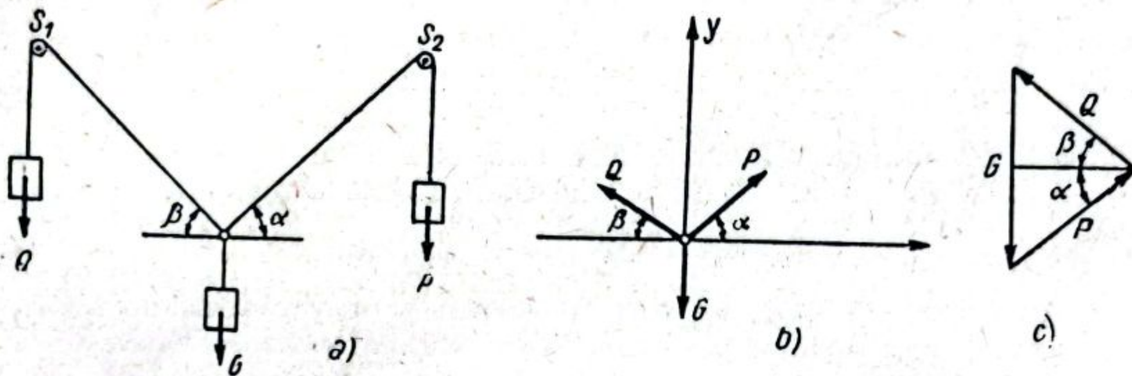


Fig. 3.4

Se cere să se determine poziţia de repaus a punctului material.

Fiind o problemă de punct material liber supus la forţe aflate în acelaşi plan, poziţia de repaus va fi definită de doi parametri. Alegem ca parametri unghiurile α şi β pe care firele le fac cu orizontala. Asupra punctului acţionează forţele arătate în fig. 3.4, *b*. Ecuaţiile de echilibru sînt

$$P\cos\alpha - Q\cos\beta = 0, \qquad P\sin\alpha + Q\sin\beta - G = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii trigonometrice, obţinem

$$\sin\alpha = \frac{P^2+G^2-Q^2}{2\,PG}, \quad \sin\beta = \frac{Q^2+G^2-P^2}{2\,QG}.$$

Pentru ca aceste soluţii să aibă sens este necesar şi suficient ca

$$-1 \leqslant \frac{P^2+G^2-Q^2}{2\,PG} < 1, \qquad -1 < \frac{Q^2+G^2-P^2}{2\,QG} < 1.$$

Inegalităţile se mai scriu

$$|G-P| < Q < |P+G|; \qquad |G-Q| < P < |G+Q|.$$

Rezultă că între modulele celor trei forţe trebuie să subziste aceleaşi inegalităţi ca între laturile unui triunghi. Altfel echilibrul este imposibil şi punctul material nu poate rămîne în repaus.

Această ultimă condiţie apare evidentă dacă se rezolvă grafic problema, ceea ce revine la construirea unui triunghi căruia i se cunosc lungimile laturilor şi direcţia uneia dintre ele (fig. 3.4, *c*).

B. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARE

§ 5. **Axioma legăturilor.** În cazul unui punct material supus la legături, condiţia de echilibru $\overline{\mathcal{R}}=0$ scrisă pentru forţele efectiv aplicate (date) nu mai este necesară. Într-adevăr, experienţa arată de exemplu că un punct

material greu poate rămîne în echilibru pe un cerc situat într-un plan vertical în punctul A cel mai de jos sau, dacă cercul este aspru (curbă cu frecări) într-un punct M (fig. 3.5, *a*). Cum asupra punctului acţionează forţa efectiv aplicată $\overline{G}\neq 0$ şi totuşi punctul stă în echilibru, rezultă că nu mai este necesară condiţia $\overline{\mathcal{R}}=0$, valabilă la punctul material liber.

Pentru a găsi condiţia necesară şi suficientă ca un punct material supus la legături să se găsească în echilibru, vom înlătura legătura (în exemplul de mai sus, cercul). Punctul material devine astfel liber. Dacă se admite că asupra lui acţionează o forţă egală şi opusă rezultantei forţelor efectiv aplicate, punctul material continuă să rămînă în repaus şi după suprimarea legăturii. Această forţă înlocuieşte legătura şi poartă numele de *forţă de legătură* sau *reacţiune*. Notînd-o cu $\overline{R}$, condiţia necesară şi suficientă de echilibru devine

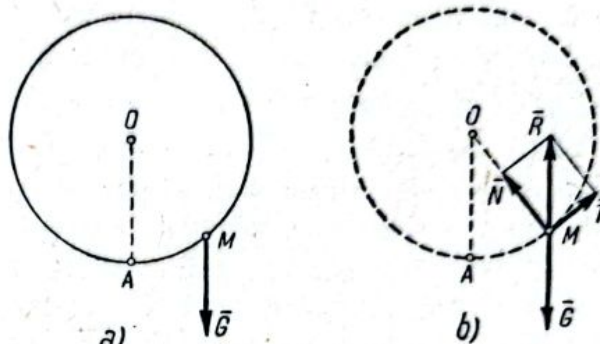


Fig. 3.5

$$\overline{R}+\overline{\mathcal{R}}=0. \tag{3.12}$$

Această înlocuire a unei legături cu o forţă este cunoscută sub numele de *axioma legăturilor* (*axioma eliberării*, *principiul forţelor de legătură*) şi se enunţă astfel:

O legătură poate fi înlocuită cu o forţă denumită forţă de legătură sau reacţiune. Sub acţiunea forţelor efectiv aplicate şi a forţei de legătură, punctul material poate fi considerat liber şi poate fi tratat ca atare.

O problemă de echilibru a punctului material supus la legături comportă în general determinarea a două categorii de necunoscute: unele privind poziţia punctului, celelalte privind forţa de legătură. Pentru rezolvarea problemei se aplică axioma legăturilor şi apoi se scriu ecuaţiile de echilibru care rezultă din proiectarea pe axe a condiţiei (3.12), adică

$$X+R_x=0,\quad Y+R_y=0,\quad Z+R_z=0 \tag{3.13}$$

în cazul unui sistem de forţe în spaţiu şi

$$X+R_x=0,\quad Y+R_y=0 \tag{3.14}$$

în cazul unui sistem de forţe în plan.

Dacă asupra forţei de legătură $\overline{R}$ nu se pune nici o condiţie, problema rămîne nedeterminată pentru că în afara proiecţiilor forţei de legătură, al căror număr este egal cu acela al ecuaţiilor de echilibru, mai intervin ca necunoscute parametrii care definesc poziţia de echilibru, în număr de doi în cazul unei suprafeţe şi de unul în cazul unei curbe.

Numai în cazul cînd punctul material este obligat să rămînă într-o anumită poziţie fixă în spaţiu, problema este determinată, singurele necu-

noscute fiind atunci proiecțiile R_x, R_y, R_z ale forței de legătură pe axe. Valorile lor se obțin imediat

$$R_x=-X, \quad R_y=-Y, \; R_z=-Z \text{ sau} \tag{3.15}$$

$$R_x=-X, \quad R_y=-Y \tag{3.16}$$

după cum este cazul unui sistem de forțe în spațiu sau în plan.

Experiența arată că un punct material obligat să rămînă pe o curbă sau pe o suprafață nu poate fi în echilibru în orice poziție. Rezultă atunci că forța de legătură $\overline{R}$ nu poate fi arbitrară, căci dacă ar fi arbitrară, ea ar putea echilibra rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$ a forțelor efectiv aplicate punctului, oricare ar fi poziția acestuia pe curbă sau pe suprafață.

Pentru a cerceta care sînt restricțiile ce se pun practic forței de legătură, s-o descompunem după o direcție normală și o direcție tangențială la legătură. Să notăm cu $\overline{N}$ și $\overline{T}$ cele două componente astfel obținute (fig. 3.5, *b*). Există evident relația

$$\overline{R}=\overline{N}+\overline{T}. \tag{3.17}$$

Rolul componentei $\overline{N}$ este de a împiedica punctul material să părăsească legătura. Rolul componentei $\overline{T}$ este de a împiedica punctul material să se deplaseze pe curbă sau pe suprafață; ea poartă numele de *forță de frecare*.

§ 6. **Legături ideale.** Se înțelege prin legături ideale (fără frecări sau lucii) legăturile pentru care $\overline{T}=0$. Asemenea legături nu există în realitate. Există însă curbe și suprafețe la care forța de frecare este destul de mică și într-o primă aproximație poate fi *neglijată*. În aceste condiții, din (3.17), rezultă

$$\overline{R}=\overline{N}. \tag{3.18}$$

În cazul cînd legătura este o suprafață lucie, reacțiunea are direcția normalei la suprafață în punctul considerat, iar în cazul cînd legătura este o curbă lucie, reacțiunea are o direcție oarecare în planul normal.

Cum rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra unui punct material supus la legături trebuie, pentru echilibru, să fie egală și direct opusă cu reacțiunea dezvoltată de legătură, rezultă următoarele condiții necesare și suficiente pentru ca un punct material să rămînă în echilibru pe o curbă sau suprafață lucie:

Dacă un punct material este obligat să rămînă pe o suprafață lucie, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate punctului să fie dirijată după normala la suprafață în punctul considerat.

Dacă un punct material este obligat să rămînă pe o curbă lucie, condiția necesară și suficientă pentru echilibru este ca rezultanta forțelor efectiv aplicate să aibă suportul în planul normal la curbă în punctul considerat.

Să analizăm posibilitatea de rezolvare a problemelor de echilibru a punctului material supus la asemenea legături.

Dacă aplicăm axioma legăturilor, dispunem de trei ecuaţii scalare, la fel ca în cazul punctului material liber.

În cazul punctului material supus la legături, necunoscutele sînt de două feluri:

a) necunoscute care privesc poziţia de echilibru;

b) necunoscute care privesc forţa de legătură.

În cazul unui punct material obligat să rămînă pe o suprafaţă, poziţia de echilibru depinde de doi parametri: coordonatele curbilinii u şi v, în funcţie de care se exprimă coordonatele x, y şi z sub forma

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v). \tag{3.19}$$

Dacă se cunoaşte poziţia de echilibru, normala la suprafaţă este în general determinată, deci se cunoaşte punctul de aplicaţie şi direcţia reacţiunii. Pentru a cunoaşte complet reacţiunea este nevoie de scalarul ei (o necunoscută). În total rezolvarea unei probleme de echilibru a unui punct material silit să rămînă pe o suprafaţă lucie comportă determinarea a trei necunoscute: două coordonate curbilinii şi scalarul reacţiunii, deci numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuaţii de echilibru care se pot scrie. Problema în general este deci posibil de rezolvat. Se poate întîmpla, în cazuri particulare, ca sistemul de trei ecuaţii cu trei necunoscute astfel obţinut să fie nedeterminat sau imposibil. În aceste cazuri există o infinitate de poziţii de echilibru sau nu există nici o asemenea poziţie.

În cazul unui punct material obligat să rămînă pe o curbă lucie, poziţia de echilibru depinde de un singur parametru, în funcţie de care se pot exprima coordonatele punctului sub forma

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \tag{3.20}$$

Dacă se cunoaşte poziţia de echilibru a punctului, planul normal în care trebuie să se găsească reacţiunea este bine determinat. Cunoaşterea reacţiunii revine atunci la cunoaşterea proiecţiilor ei pe două direcţii din planul normal, deci comportă două necunoscute scalare. În total deci rezolvarea unei probleme de echilibru a unui punct material silit să rămînă pe o curbă lucie comportă trei necunoscute, adică un număr egal cu acela al ecuaţiilor de care se dispune. Deci în general o asemenea problemă este posibil de rezolvat. În cazuri particulare, cînd sistemul de ecuaţii este nedeterminat sau imposibil, sau există o infinitate de poziţii de echilibru, sau nu există nici o asemenea poziţie.

§ 7. Ecuaţiile de echilibru în cazul unei suprafeţe. Dacă ecuaţia suprafeţei este dată sub formă implicită

$$\varphi(x, y, z)=0, \tag{3.21}$$

se ştie că un vector normal la suprafaţă este gradientul funcţiei $\varphi(x, y, z)$. Reacţiunea $\bar{R}$ în cazul unei suprafeţe lucii fiind normală, poate fi scrisă sub forma

$$\bar{R}=\lambda \operatorname{grad} \varphi. \tag{3.22}$$

Atunci, dacă $\overline{\mathcal{R}}$ este rezultanta forţelor efectiv aplicate, condiţia de echilibru (3.12) se scrie

$$\overline{\mathcal{R}}+\lambda \operatorname{grad} \varphi=0. \tag{3.23}$$

La această ecuaţie trebuie adăugată ecuaţia (3.21). Proiectînd pe cele trei axe ecuaţia vectorială (3.23) obţinem

$$X+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad Y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad Z+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{3.24}$$

Dacă ecuaţia suprafeţei este dată sub formă explicită

$$z=z(x, y), \tag{3.25}$$

atunci ecuaţiile (3.24) pot fi scrise astfel:

$$X+\lambda\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad Y+\lambda\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ Z-\lambda=0. \tag{3.26}$$

În sfîrşit, dacă suprafaţa este dată prin ecuaţiile parametrice

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v), \tag{3.27}$$

parametrii directori ai normalei la suprafaţă sînt determinanţii funcţionali

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)},\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)},\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \tag{3.28}$$

şi ecuaţiile de echilibru devin

$$X+\lambda\frac{D(y, z)}{D(u, v)}=0,\quad Y+\lambda\frac{D(z, x)}{D(u, v)}=0,\quad Z+\lambda\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=0. \tag{3.29}$$

Dacă într-o problemă interesează numai poziţia de echilibru a punctului, ea se poate obţine scriind ecuaţiile care se obţin prin eliminarea parametrului λ între ecuaţiile (3.24) respectiv (3.26) sau (3.29). Se obţine

$$\frac{X}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{Z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \tag{3.30}$$

$$\frac{X}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z}{-1}, \tag{3.31}$$

$$\frac{X}{\frac{D(y, z)}{D(u, v)}}=\frac{Y}{\frac{D(z, x)}{D(u, v)}}=\frac{Z}{\frac{D(x, y)}{D(u, v)}}. \tag{3.32}$$

Aplicaţii. 2°. Să se determine modulul forţei orizontale F necesare pentru a menţine în repaus un punct material de greutate G pe un plan luciu, înclinat sub un unghi α faţă de orizontală. Să se determine de asemenea mărimea reacţiunii şi poziţia de repaus (fig. 3.6).

Eliberînd punctul material de legături vom introduce şi reacţiunea normală N (fig. 3.6, b). Alegînd ca axe de coordonate linia de cea mai mare pantă a planului şi normala la plan, ecuaţiile de echilibru se scriu

$$-F\cos\alpha+G\sin\alpha=0,\qquad N-F\sin\alpha-G\cos\alpha=0,$$

din care, pentru necunoscutele F şi N rezultă valorile

$$F=G \operatorname{tg} \alpha, \quad N=\frac{G}{\cos \alpha}.$$

Poziţia de echilibru este nedeterminată căci coordonatele punctului nu intervin în ecuaţiile de echilibru. Rezultă atunci că dacă $F=G \operatorname{tg} \alpha$, punctul material stă în repaus oriunde ar fi el aşezat pe planul înclinat.

3°. Să se găsească poziţia de repaus a unui punct material greu pe o sferă lucie de rază R.

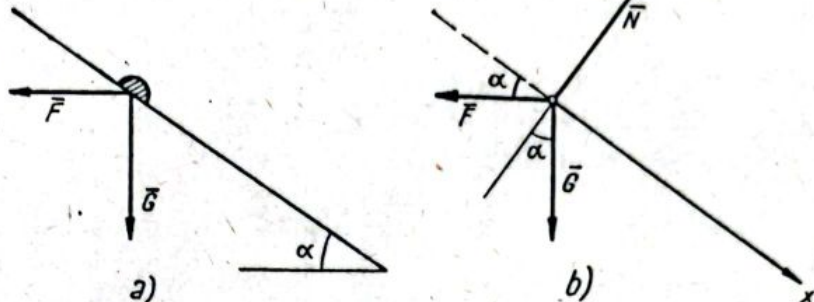


Fig. 3.6

Alegînd un sistem de axe cu originea în centrul sferei şi axa Oz verticală şi ascendentă, ecuaţia sferei se va scrie $\varphi(x, y, z) \equiv x^2+y^2+z^2-R^2=0$. Greutatea fiind verticală avem $\overline{R}=\overline{G}=-G\overline{k}$. Rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=2y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}=2z,$$

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-G.$$

Condiţiile de echilibru (3.30) devin

$$\frac{0}{2x}=\frac{0}{2y}=\frac{-G}{2z}.$$

De aci deducem $x=0$, $y=0$. Introducînd aceste valori în ecuaţia sferei rezultă $z^2-R^2=0$ de unde $z=\pm R$. Deci există două poziţii de repaus în punctele $A(0, 0, R)$ şi $B(0, 0, -R)$. Se poate verifica uşor că aceste două poziţii corespund respectiv punctului celui mai înalt şi punctului celui mai de jos de pe sferă.

4°. Să se găsească poziţia de repaus a unui punct material de greutate G, obligat să rămînă pe o sferă lucie de rază R dacă este legat cu un resort ideal de constantă elastică k de punctul cel mai înalt al sferei.

Folosind acelaşi sistem de axe ca în problema precedentă şi notînd cu $A(0, 0, R)$ punctul cel mai înalt al sferei şi cu $P(x, y, z)$ poziţia de repaus a punctului, rezultă pentru forţa elastică, respectiv pentru componentele ei, expresiile

$$\overline{F}=-k\overline{AP},$$

$$F_x=-kx, \quad F_y=-ky, \quad F_z=-k(z-R).$$

Atunci proiecţiile rezultantei $\overline{R}$ vor fi

$$X=-kx, \quad Y=-ky, \quad Z=-G-k(z-R).$$

Condiţiile de echilibru (3.30) devin

$$\frac{-kx}{2x}=\frac{-ky}{2y}=\frac{-G-k(z-R)}{2z}.$$

Din aceste ecuaţii deducem, în cazul $G \neq kR$: $x=0$, $y=0$, $z=\pm R$, iar în cazul $G=kR$: x=arbitrar, y=arbitrar, z=arbitrar. Există deci fie două poziţii de repaus, ca în cazul problemei precedente, fie o infinitate de asemenea poziţii, punctul material găsindu-se în repaus în oricare punct al sferei.

§ 8. **Ecuaţiile de echilibru în cazul unei curbe.** Să presupunem că se cunosc ecuaţiile implicite ale curbei:

$$\varphi(x, y, z)=0;\ \psi(x, y, z)=0. \tag{3.33}$$

Se ştie că planul normal la curbă conţine normalele la cele două suprafeţe $\varphi=0$ şi $\psi=0$, deci conţine vectorii grad φ şi grad ψ. Reacţiunea în cazul unei curbe lucii fiind un vector cuprins în planul normal, se poate pune sub forma

$$\overline{R}=\lambda \text{ grad } \varphi+\mu \text{ grad } \psi. \tag{3.34}$$

Atunci, dacă se notează cu $\overline{\mathcal{R}}$ rezultanta forţelor efectiv aplicate, condiţia de echilibru (3.12) se scrie.

$$\overline{\mathcal{R}}+\lambda \text{ grad } \varphi+\mu \text{ grad } \psi=0. \tag{3.35}$$

Proiectînd pe axe ecuaţia (3.35) obţinem

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\\ Y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}=0\\ Z+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Dacă ecuaţiile curbei sînt date sub forma

$$z=f(x, y),\ z=g(x, y), \tag{3.37}$$

se deduc uşor ecuaţiile de echilibru observînd că în acest caz se poate scrie

$$\varphi(x, y, z)=f(x, y)-z=0,$$
$$\psi(x, y, z)=g(x, y)-z=0,$$

deci

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y};\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-1,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial x};\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial y};\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=-1.$$

Atunci ecuaţiile de echilibru (3.36) devin

$$\left.\begin{aligned} X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}+\mu\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}+\mu\frac{\partial g}{\partial y}=0\\ Z-\lambda-\mu=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

La aceste ecuaţii trebuie adăugate relaţiile (3.33).

În cazul cînd curba este dată prin ecuaţiile parametrice

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t), \tag{3.39}$$

reacţiunea $\bar{R}$ trebuind să fie cuprinsă în planul normal, este perpendiculară pe tangentă, ai cărei parametri directori sînt x', y' şi z' şi deci componentele ei trebuie să îndeplinească condiţia

$$R_x x' + R_y y' + R_z z' = 0. \tag{3.40}$$

Această condiţie este satisfăcută identic dacă se ia

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \mu z' - \nu y' \\ R_y &= \nu x' - \lambda z' \\ R_z &= \lambda y' - \mu x', \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

unde λ, μ, ν sînt trei parametri arbitrari. Ecuaţiile de echilibru devin

$$\left.\begin{aligned} X + \mu z' - \nu y' &= 0 \\ Y + \nu x' - \lambda z' &= 0 \\ Z + \lambda y' - \mu x' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

Dacă, într-o problemă interesează numai poziţia de echilibru, aceasta se poate obţine eliminînd parametrii λ şi μ între ecuaţiile (3.36) sau (3.38) şi parametrii λ, μ şi ν între ecuaţiile (3.42). Se obţin respectiv condiţiile

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ Z & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \tag{3.43}$$

$$\begin{vmatrix} X & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ Y & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ Z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.44}$$

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0. \tag{3.45}$$

Aplicaţii. 5°. Să se determine poziţia de repaus a unui punct material de greutate G, obligat să rămînă pe un cerc de rază R, situat într-un plan vertical, dacă asupra punctului mai acţionează şi o forţă F paralelă cu diametrul orizontal al cercului.

Rezolvare. Eliberăm punctul material de legătura sa cu cercul şi introducem reacţiunea normală N (fig. 3.7). Proiectînd pe tangenta şi pe normala la cerc, obţinem ecuaţiile de echilibru

$$F \sin\alpha - G \cos\alpha = 0, \quad N - F\cos\alpha - G\sin\alpha = 0,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{G}{F}, \quad N = \sqrt{F^2 + G^2}.$$

Se poate observa că există două poziţii de echilibru distincte, diametral opuse A şi B.

6°. Un punct material de greutate neglijabilă, obligat să rămînă pe un semicerc de rază R, este legat cu două resoarte, de constante elastice k, de extremităţile diametrului AB (fig. 3.8). Se cere să se determine poziţia de repaus.

R e z o l v a r e. Eliberăm punctul material de legătura cu cercul şi introducem reacţiunea normală N. Ecuaţiile de proiecţie pe tangenta şi pe normala în M la cerc sînt (fig. 3.8)

$$-F_1 \sin\frac{\alpha}{2}+F_2 \cos\frac{\alpha}{2}=0, \quad N-F_1 \cos\frac{\alpha}{2}-F_2 \sin\frac{\alpha}{2}=0.$$

Dar F_1 şi F_2 fiind forţe elastice, sînt proporţionale respectiv cu lungimile MA şi MB

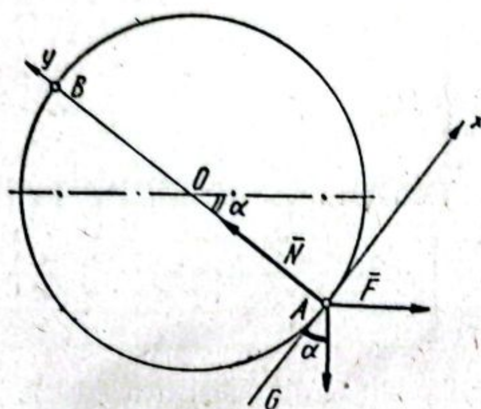


Fig. 3.7

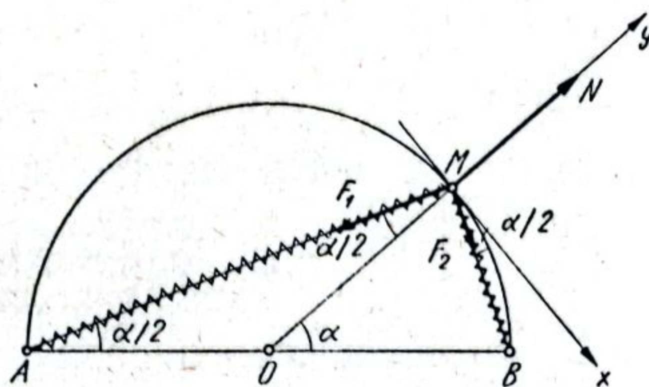


Fig. 3.8

$$F_1=k\cdot MA=k\cdot 2R\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$F_2=k\cdot MB=k\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Introducîndu-le în ecuaţiile de echilibru, se observă că prima devine o identitate, iar din a doua se deduce $N=2kR$. Deci punctul material stă în repaus în orice poziţie pe cerc, iar reacţiunea are o valoare constantă.

7°. Să se determine poziţia de repaus a unui punct material greu pe elicea de ecuaţii parametrice

$$x=a\cdot\cos t,\ y=a\cdot\sin t,\ z=bt \text{ (axa } Oz \text{ verticală ascendentă).}$$

R e z o l v a r e. Observînd că greutatea G are drept proiecţii pe axe: $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$ şi deducînd din ecuaţiile parametrice: $x'=-a\sin t$, $y'=a\cos t$, $z'=b$, ecuaţia de echilibru (3.45) devine

$$-Gb=0,$$

ecuaţie imposibilă. Deci punctul material greu nu poate sta în repaus în nici unul din punctele elicei.

§ 9. Cazul legăturilor unilaterale. În paragrafele dinainte s-a presupus că punctul material nu poate părăsi legătura oricare ar fi forţele efectiv aplicate asupra lui. O astfel de legătură se numeşte *legătură bilaterală*. Există însă legături care pot fi părăsite în anumite condiţii; ele se numesc *legături unilaterale*. Ca exemplu citâm un punct material legat cu un fir flexibil şi inextensibil de un punct fix din spaţiu. Dacă rezultanta forţelor care acţionează asupra firului întinde firul, punctul material rămîne pe o sferă cu centrul în punctul fix şi cu raza egală cu lungimea firului. Dacă firul nu este întins, punctul material poate părăsi sfera către interior.

O legătură unilaterală se exprimă, după caz, printr-o inegalitate.

În exemplul dinainte, dacă punctul fix este în originea unui sistem de axe $Oxyz$, iar lungimea firului este l, legătura este caracterizată prin

$$x^2+y^2+z^2-l^2 \leqslant 0.$$

O problemă de echilibru a punctului material supus la o legătură unilaterală se rezolvă în modul următor:

a) Se determină pozițiile de echilibru ale punctului ca și cînd legătura ar fi bilaterală, urmînd procedeul arătat.

b) Se analizează în fiecare dintre aceste poziții sensul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$. Dacă acest sens este astfel încît asigură legătura, poziția de echilibru este posibilă. Dacă sensul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ nu asigură legătura, poziția de echilibru nu corespunde și trebuie înlăturată.

Astfel, în exemplul dat, rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$ trebuie să aibă sensul către exteriorul sferei de rază l. Putem da o expresie generală a condiției ca o poziție de echilibru să fie acceptabilă în cazul unei legături unilaterale. Să presupunem că legătura unilaterală se exprimă prin condiția

$$f(x, y, z) \geqslant 0. \tag{3.46}$$

Este întotdeauna posibil să se exprime o legătură unilaterală sub forma (3.46) deoarece, dacă inegalitatea ar fi de sens contrar, ea poate fi adusă la forma (3.46) prin înmulțire cu -1.

Se știe că vectorul grad f are direcția normală la suprafață și este dirijat în sensul în care crește funcția $f(x, y, z)$. Este ușor de verificat că, dată fiind condiția (3.46), pentru ca echilibrul să fie asigurat în cazul unei legături unilaterale, este necesar ca rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$ a forțelor efectiv aplicate punctului material să fie de sens opus sensului gradientului adică

$$\overline{\mathcal{R}}.\mathrm{grad}\, f<0. \tag{3.47}$$

În funcție de componentele celor doi vectori, condiția (3.47) se scrie

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}<0. \tag{3.48}$$

Aplicație. 8°. Se consideră un punct material greu, legat cu un fir flexibil și inextensibil de lungime l de un punct fix din spațiu. Se cere să se determine poziția de echilibru.

Rezolvare. Presupunînd un sistem de axe cu originea în punctul fix, avînd axa Oz verticală și ascendentă, ecuația sferei pe care trebuie să rămînă punctul material se scrie $x^2+y^2+z^2-l^2=0$. Pentru că legătura este unilaterală (firul putîndu-se slăbi) și pentru că legătura permite ca punctul material să ocupe numai interiorul sferei, unde distanța de la origine la un punct oarecare este mai mică decît l, condiția impusă de legătură se scrie

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant l^2.$$

Putem aduce această condiție la forma (3.46) scriind-o

$$f(x, y, z)=l^2-x^2-y^2-z^2 \geqslant 0.$$

Rezultanta forțelor efectiv aplicate asupra punctului se reduce în cazul nostru la greutatea proprie $\overline{G}$ ale cărei componente pe axe sînt:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-G.$$

Presupunînd deocamdată legătura bilaterală, condiţia de echilibru

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

devine

$$\frac{0}{-2x}=\frac{0}{-2y}=\frac{-G}{-2z}.$$

Rezultă $x=0$ şi $y=0$. Ţinînd seama de ecuaţia suprafeţei, se deduce $z=\pm l$. Corespund deci două poziţii de echilibru $A(0, 0, l)$ şi $B(0, 0, -l)$. Să analizăm care dintre ele convine cazului legăturii unilaterale. Condiţia (3.48) devine

$$0\cdot(-2x)+0\cdot(-2y)+(-G)\cdot(-2z)<0,$$

sau

$$Gz<0.$$

Ea este satisfăcută numai de punctul B, singura poziţie de echilibru posibilă.

C. STATICA PUNCTULUI MATERIAL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

§ 10. Frecarea de alunecare. Coeficient de frecare de alunecare. În capitolul precedent s-a presupus că legăturile sînt ideale. S-a neglijat în felul acesta componenta tangenţială a forţei de legătură, denumită *forţă de frecare de alunecare*. Sînt cazuri cînd această neglijare nu se poate face. Aceasta se întîmplă în cazul legăturilor aspre, rugoase. Experienţa arată că pe o suprafaţă sau pe o curbă aspră un punct material nu poate sta în echilibru în orice poziţie. De aci se deduce că forţa de frecare $\overline{T}$ satisface anumite condiţii.

S-au imaginat numeroase experienţe care să pună în evidenţă aceste condiţii. În cele ce urmează se vor arăta rezultatele experienţelor făcute de Coulomb.

O asemenea experienţă redusă la forma cea mai simplă se realizează astfel: se consideră un corp de dimensiuni neglijabile aşezat pe un plan orizontal aspru (fig. 3.9). Asupra sa acţionează la început greutatea $\overline{G}$ şi reacţiunea normală $\overline{N}$. Dacă planul ar fi luciu, corpul ar trebui să alunece în momentul în care i s-ar aplica cea mai mică forţă orizontală $\overline{F}$. În realitate însă corpul nu alunecă decît în momentul cînd forţa $\overline{F}$ atinge o anumită valoare. Aceasta dovedeşte că asupra corpului mai acţionează o forţă care se opune alunecării, care este îndreptată în sens contrar vitezei relative şi care echilibrează forţa $\overline{F}$. Aceasta este *forţa de frecare de alunecare*, $\overline{T}$. Faptul că totuşi echilibrul se strică atunci cînd forţa F depăşeşte o anumită intensitate, ne arată că forţa de frecare $\overline{T}$ nu poate depăşi o anumită valoare $\overline{T}_{max}$.

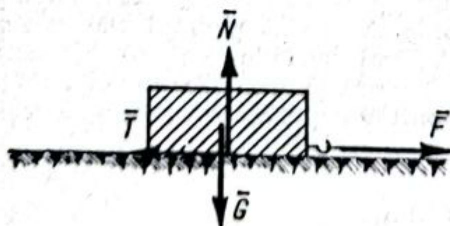


Fig. 3.9

Experiențele lui Coulomb au arătat că: *1.* valoarea maximă a forței de frecare nu depinde de viteza relativă a corpului, de mărimea suprafeței de contact dintre corp și plan, ci *2.* numai de natura corpurilor și de starea suprafețelor în contact, precum și *3.* de mărimea reacțiunii normale la suprafața de contact, $\overline{N}$.

Toate aceste rezultate pot fi cuprinse în formula

$$|\overline{T}_{max}|=\mu|\overline{N}|. \tag{3.49}$$

Coeficientul μ se numește *coeficient de frecare* la alunecare; el nu are dimensiuni și depinde de natura corpurilor și a suprafețelor în contact.

În tabela 5 sînt date valorile coeficientului de frecare μ pentru cîteva corpuri întîlnite în tehnică.

Tabela 5

Valorile coeficientului de frecare μ

Natura corpurilor	Starea suprafețelor	Coeficientul μ	Observații
Oțel pe oțel	unse cu seu	0,07	
	unse cu ulei	0,15	coeficient de aderență (la pornire)
	uscate	0,22–0,25	
Bronz pe bronz	puțin unse	0,20	
Bronz pe fontă	puțin unse	0,21	
Fontă pe fontă sau bronz	puțin unse	0,15	
	cu apă	0,31	
Oțel pe gheață	—	0,014	coeficient de aderență
	—	0,027	
Stejar pe stejar (uscat)	în lungul fibrelor	0,48	
	normal pe fibre	0,34	
Curea de piele pe tambur de stejar	uscate	0,27	
	puțin unse	0,47	
Curea de piele pe fontă	puțin unse	0,28	depinde de viteză
	cu apă	0,36	

Recapitulînd proprietățile forței de frecare de alunecare conchidem:

a) Direcția ei este tangentă la suprafață sau la curbă.

b) Sensul ei este invers tendinței de alunecare.

c) Pentru echilibru este necesar ca modulul forței de frecare să rămînă inferior valorii date de (3.49), adică.

$$|\overline{T}|\leqslant\mu|\overline{N}|. \tag{3.50}$$

Natura forțelor de frecare. Teoria lui Coulomb explică deci apariția forțelor de frecare — îndeosebi — prin neregularitățile pe care le prezintă suprafețele corpurilor în contact. Cînd două corpuri au o deplasare relativă, unul în raport cu celălalt, aceste asperități sînt strivite; deci forța de frecare ar fi forța care se opune strivirii neregularităților. Ar rezulta, în virtutea acestei teorii, că forța de frecare dintre două corpuri este cu atît mai mică, cu cît suprafețele lor de contact sînt prelucrate mai fin.

Experiențele au arătat însă că această concluzie nu este adevărată decît între anumite limite. S-a constatat astfel că, dacă suprafețele a două corpuri sînt foarte fin polizate, forța de frecare poate crește foarte mult. Astfel, două *plăci de control*[1]), așezate una peste alta, dau naștere la forțe de frecare foarte mari, deși asperitățile lor nu întrec 1/2 000 mm. Acest fenomen se explică prin coeziunea dintre moleculele situate pe suprafața unui corp și cele situate pe suprafața celuilalt corp. Se știe că forțele de coeziune se exercită atunci cînd distanța dintre molecule este foarte mică (1/1 000 000 mm), ceea ce se întîmplă cu multe molecule în cazul cînd cele două suprafețe sînt foarte fin polizate.

§ 11. Critica legilor lui Coulomb. Legile lui Coulomb și în special independența coeficientului de frecare μ de mărimea reacțiunii normale și de viteza relativă a celor două corpuri care alunecă unul față de celălalt au fost criticate. Totuși ele rămîn valabile în cadrul valorilor pe care le-a experimentat Coulomb, însă ieșind din acest cadru, legile nu se mai verifică.

Astfel, s-a arătat că pentru *valori foarte mari ale reacțiunii normale* $\bar{N}$ coeficientul de frecare nu mai este constant ci crește (foarte lent) cu N.

De asemenea, coeficientul de frecare variază cu *viteza*. Dăm în tabela 6 exemple de valori, în cazul oțel pe oțel, după Galton:

Tabela 6

Coeficientul de frecare pentru oțel pe oțel, cînd variază viteza.

v [km/h]	0	10,93	21,8	43,5	65,8	87,6	96,48
μ	0,242	0,088	0,072	0,07	0,057	0,038	0,027

Fenomenul își găsește aplicație în frînarea vehiculelor. Astfel, cînd roțile unui vehicul care circulă cu mare viteză sînt blocate cu ajutorul saboților și ele patinează, coeficientul de frecare la alunecare este mic și vehiculul parcurge pînă la oprire o distanță mare. Dacă însă roțile nu sînt complet blocate, ele rostogolindu-se și alunecînd în același timp, dar cu o viteză mai redusă, coeficientul de frecare este mai mare și oprirea vehiculului se face pe o distanță mai mică. Se ajunge astfel la faptul surprinzător că un vehicul se oprește mai ușor cînd se frînează mai puțin.

Examinînd tabela 6, se constată că coeficientul de frecare μ scade sensibil în special între valoarea $v=0$ și $v=10$ km/h. Coeficientul de frecare corespunzător cazului $v=0$ se notează cu μ_0 și poartă numele de *coeficient de aderență*.

Se constată de asemenea că frecarea mai depinde de *temperatura* corpurilor în contact (scăzînd cu creșterea temperaturii), de *timpul* cît au stat corpurile în contact etc.

---

[1] Plăci lustruite foarte fin, folosite în metrologie la verificarea aparatelor de măsură (*cale*).

§ 12. Problemele de echilibru cu frecare ale unui punct material. Rezultă din cele de mai înainte că, față de cazul legăturilor ideale, într-o problemă de echilibru cu frecare intervine în plus o forță $\overline{T}$ care satisface unor anumite condiții arătate în paragraful precedent. Vom analiza pe rînd cazul curbelor și cazul suprafețelor.

a) *În cazul unei curbe aspre* determinarea forței $\overline{T}$ comportă cunoașterea unei singure necunoscute scalare. Într-adevăr punctul de aplicație fiind presupus cunoscut, direcția forței este bine determinată, căci la o curbă, într-un punct, se poate duce în general o tangentă unică. Pentru completa determinare a forței este necesar să se cunoscă numai scalarul T al forței $\overline{T}$. Această necunoscută trebuie să satisfacă inegalitatea (3.50) sau, în cazul limită de echilibru, egalitatea

$$|\overline{T}|=\mu|\overline{N}|.$$

În acest din urmă caz, deci, pentru determinarea necunoscutei scalare T se dispune de o ecuație; problema este în general posibilă.

Pozițiile de echilibru limită ale unui punct material pe o curbă aspră sînt în general bine determinate.

Dacă însă interesează toate pozițiile de echilibru ale unui punct material pe o curbă aspră, acestea sînt nedeterminate, deoarece se introduce o necunoscută scalară în plus (T) și o inegalitate ($|\overline{T}|\leqslant\mu|\overline{N}|$). Sistemul de ecuații admite o simplă infinitate de soluții, deci pe o curbă aspră, un punct material poate sta în echilibru în toate punctele unui anumit arc al ei.

b) *În cazul unei suprafețe aspre* determinarea forței de frecare comportă cunoașterea a două necunoscute scalare. Într-adevăr punctul de aplicație P al ei fiind presupus cunoscut, suportul trebuie să fie conținut în planul tangent la suprafață în acel punct. În planul tangent însă, direcția forței $\overline{T}$ este nedeterminată. Pentru a determina forța $\overline{T}$ atît ca direcție, cît și ca valoare, este necesar să se cunoască proiecțiile ei pe două direcții din planul tangent. Să presupunem două direcții ortogonale $P\xi$ și $P\eta$ și să notăm cu T_ξ și T_η cele două proiecții necunoscute. În situație de echilibru condiția (3.29) se scrie în cazul de față

$$\sqrt{T_\xi^2+T_\eta^2}\leqslant\mu|\overline{N}|.$$

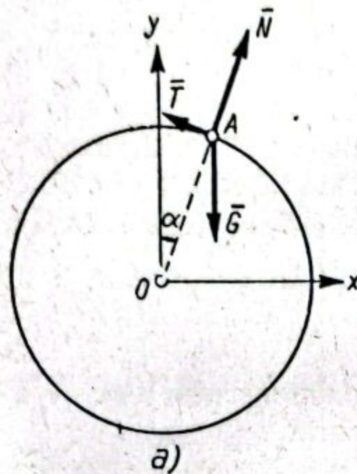
Analizînd această condiție rezultă că în cazul unei suprafețe aspre problema este nedeterminată, atît pentru pozițiile de echilibru limită, cît și pentru pozițiile de echilibru în general.

Pentru aflarea pozițiilor de echilibru limită se dispune de o singură ecuație cu două necunoscute T_ξ și T_η. Sistemul admite o simplă infinitate de soluții. Pe o suprafață aspră există deci, în general, o infinitate de poziții de echilibru limită așezate pe o curbă.

Pentru aflarea celorlalte poziții de echilibru se dispune de o inegalitate. Sistemul de ecuații de echilibru are, în acest caz, o dublă infinitate de soluții. Pe o suprafață aspră un punct material poate fi în echilibru în toate punctele unei anumite regiuni.

Aplicații. 9°. Să se găsească pozițiile de echilibru limită ale unui punct material greu pe un cerc situat într-un plan vertical, cunoscînd coeficientul de frecare μ între punctul material și cerc.

Rezolvare. Se reprezintă forțele $\overline{G}$, $\overline{N}$ și $\overline{T}$ care acționează asupra punctului (fig. 3.10, *a*). Notînd $\alpha = AOy$ rezultă ecuațiile de proiecție pe tangenta și normala la cerc:



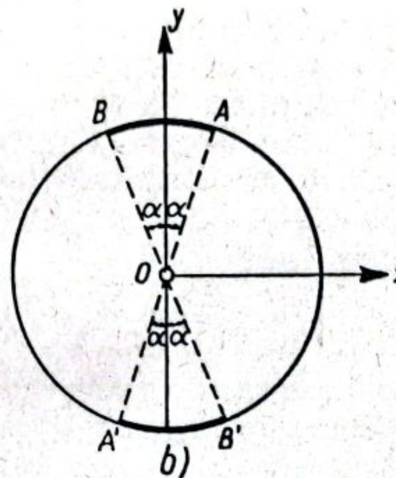


Fig. 3.10

$$-T+G\sin\alpha=0;\quad N-G\cos\alpha=0$$

și condiția $T=\mu N$.

Rezultă imediat $\operatorname{tg}\alpha=\mu$;

$$N=\frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}};\quad T=\frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Există patru poziții limită de echilibru A, B, A' și B' arătate în fig. 3.10, *b*. Punctul material se găsește în echilibru pe arcele de cerc AB și $A'B'$ care au fost îngroșate.

10°. Un punct material de greutate $\overline{G}$, acționat de o forță orizontală $\overline{F}$ se află în repaus pe un plan aspru (coeficient de frecare μ), înclinat sub un unghi α față de orizontală. Se cere să se determine între ce limite trebuie să varieze modulul forței $\overline{F}$ pentru ca punctul material să rămînă în repaus.

Rezolvare. Eliberînd punctul material de legătura cu planul înclinat, introducem reacțiunea normală $\overline{N}$ și forța de frecare $\overline{T}$. Sensul forței $\overline{T}$ din fig. 3.11 corespunde cazului cînd punctul material tinde să alunece pe linia de cea mai mare pantă a planului, în sens ascendent. Vom ține seama de posibilitatea de alunecare în ambele sensuri folosind inegalitatea (3.50) sub forma $-\mu N \leqslant T \leqslant \mu N$. Alegînd ca axe linia de cea mai mare pantă și normala la plan, ecuațiile de echilibru și inegalitatea (3.50) se scriu

$$F\cos\alpha-G\sin\alpha-T=0,$$
$$N-F\sin\alpha-G\cos\alpha=0,\quad -\mu N\leqslant T\leqslant \mu N.$$

Din primele două ecuații deducem

$$T=F\cos\alpha-G\sin\alpha,$$
$$N=F\sin\alpha+G\cos\alpha.$$

Înlocuind în dubla inegalitate, rezultă

$$-\mu(F\sin\alpha+G\cos\alpha)\leqslant F\cos\alpha-G\sin\alpha\leqslant$$
$$\leqslant\mu(F\sin\alpha+G\cos\alpha),$$

din care deducem limitele între care poate varia F pentru ca punctul material să rămînă în repaus

$$G\,\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\leqslant F\leqslant G\,\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}.$$

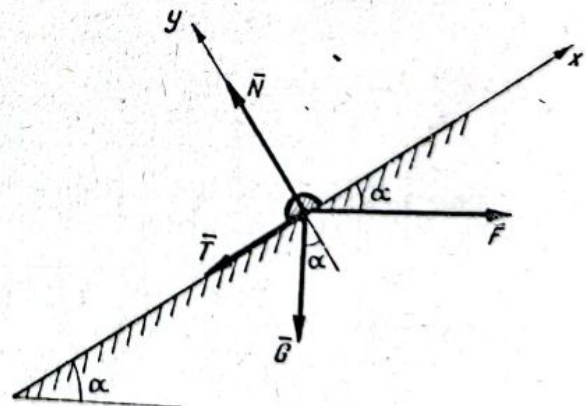


Fig. 3.11

Limita superioară a fost determinată în ipoteza că diferența $(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)$ este pozitivă. În cazul $\cos\alpha-\mu\sin\alpha\leqslant 0$, respectiv

$$\operatorname{cotg}\alpha\leqslant\mu\quad\text{sau}\quad\alpha\geqslant\operatorname{arc\,cotg}\mu,$$

nu există o limită superioară dincolo de care punctul material să alunece în sens ascendent. În acest caz oricît de mare ar fi forța F punctul material rămîne în repaus. Fenomenul poartă numele de *autoblocare*.

Limita inferioară a scalarului forței F se anulează pentru cazul cînd diferența $(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$ se anulează. În cazul cînd $\sin\alpha-\mu\cos\alpha\leqslant 0$, respectiv

$$\operatorname{tg}\alpha\leqslant\mu \text{ sau } \alpha\leqslant\operatorname{arc}\operatorname{tg}\mu,$$

scalarul forței F este negativ sau nul, ceea ce arată că în absența forței F punctul material continuă să rămînă în repaus, deși asupra lui acționează greutatea G. Fenomenul poartă numele de *autofixare*.

§ 13. Considerații geometrice. Unghi de frecare. Conuri de frecare. Să considerăm exemplul simplu al unui punct material greu, așezat pe un plan orizontal aspru. Să admitem că asupra sa acționează forța orizontală $\overline{F}$ și că el se găsește în echilibru (fig. 3.12).

Să notăm cu α unghiul format de reacțiunea totală $\overline{R}$ cu normala la planul orizontal. Se deduce cu ușurință relația

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{T}{N}.$$

S-a presupus că există echilibru. Aceasta înseamnă că $T\leqslant\mu N$. Să considerăm cazul de echilibru limită și să notăm cu φ unghiul format de reacțiunea $\overline{R}$ cu normala la plan în acest caz. Rezultă

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{T_{max}}{N}.$$

Cum însă $T_{max}=\mu N$ rezultă încă

$$\operatorname{tg}\varphi=\mu. \tag{3.51}$$

Unghiul φ astfel definit poartă numele de *unghi de frecare*. Importanța lui apare din compararea expresiilor $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{tg}\varphi$. Deoarece în cazul echilibrului $T\leqslant T_{max}$ rezultă $\operatorname{tg}\alpha\leqslant\operatorname{tg}\varphi$ sau, fiindcă unghiurile α și φ sînt amîndouă ascuțite

$$\alpha\leqslant\varphi. \tag{3.52}$$

Cu alte cuvinte, pentru ca un punct material să fie în echilibru pe un plan aspru este necesar ca suportul reacțiunii $\overline{R}$ să facă un unghi $\alpha\leqslant\varphi$

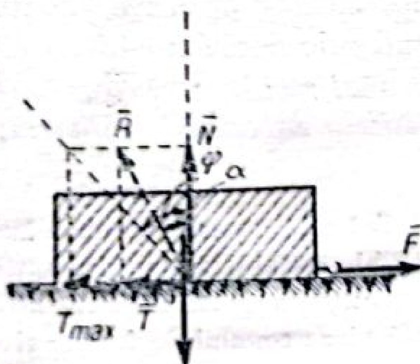


Fig. 3.12

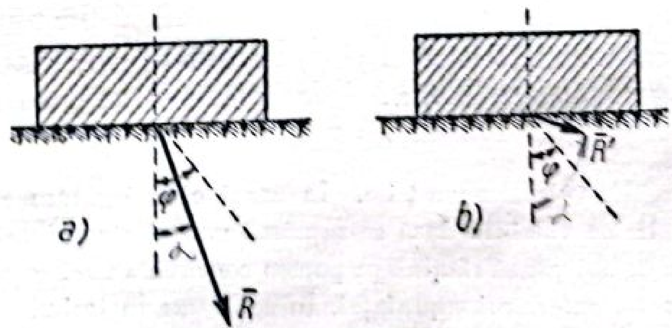


Fig. 3.13

cu normala la plan. Cum rezultanta forțelor efectiv aplicate $\mathcal{R}$ este egală și opusă reacțiunii $\overline{R}$ condiția de echilibru se mai poate enunța și sub forma: *suportul rezultantei forțelor efectiv aplicate asupra punctului material trebuie să facă cu normala la plan un unghi mai mic decît unghiul de frecare.*

Interpretarea acestui rezultat este dată în fig. 3.13. Astfel, în fig. 3.13, *a*, corpul este în echilibru pentru că suportul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ face cu normala un unghi mai mic decît φ. Echilibrul se menține, oricît de mare ar fi această rezultantă. În fig. 3.13, *b* corpul se mișcă, deși asupra lui acționează o forță $\overline{\mathcal{R}}'$ mult mai mică în modul decît $\overline{\mathcal{R}}$. Motivul este că suportul acestei ultime forțe face cu normala un unghi mai mare decît unghiul de frecare φ.

Rezultatul poate fi generalizat cu ușurință în cazul unei suprafețe și al unei curbe oarecare.

Să considerăm o suprafață aspră oarecare, un punct M pe ea și normala MN în punctul considerat. O dreaptă care trece necontenit prin punctul M și face cu normala la suprafață unghiul de frecare φ generează un con cu două pînze numit con de frecare (fig. 3.14).

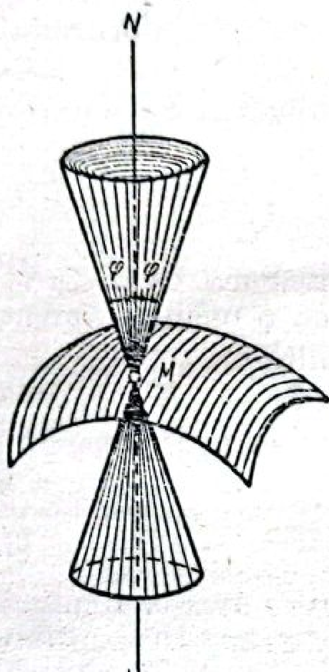


Fig. 3.14

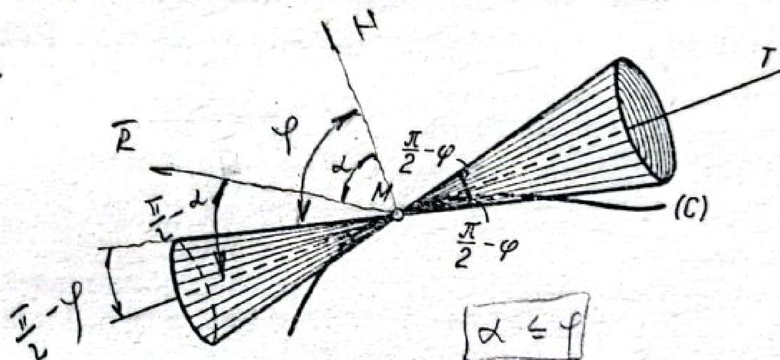


Fig. 3.15

Importanța acestui con este următoarea: s-a văzut că pentru echilibru este necesar ca suportul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ a forțelor efectiv aplicate punctului să formeze cu normala la suprafață un unghi mai mic decît unghiul de frecare. Această condiție este îndeplinită dacă *suportul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ este situat în interiorul conului de frecare sau, pentru pozițiile de echilibru limită, pe suprafața conului.*

Observație. În cazul cînd legătura este unilaterală condiția de mai înainte rămîne valabilă dacă se suprimă una dintre pînzele conului. Astfel dacă punctul material este obligat să rămînă pe partea concavă a unei suprafețe, rezultanta $\overline{\mathcal{R}}$ trebuie să fie dirijată către exteriorul suprafeței. În acest caz va trebui eliminată pînza conului de frecare situată în interior.

Să considerăm acum o curbă aspră oarecare (fig. 3.15), un punct M pe ea, tangenta MT și planul normal în punctul considerat. Generalizînd cele de mai înainte în cazul unei curbe se ajunge la concluzia că, pentru echilibru, este necesar ca suportul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ să formeze cu planul normal un unghi mai mic, la limită egal cu unghiul de frecare φ. Să considerăm

o dreaptă care trece necontenit prin punctul M şi face cu tangenta la curbă un unghi egal cu $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$. Această dreaptă generează un con cu două pînze numit *con de frecare*.

Este uşor de verificat că dacă *suportul rezultantei $\overline{\mathcal{R}}$ a forţelor efectiv aplicate punctului material este exterior conului sau, la limită, pe suprafaţa acestui con, punctul material este în echilibru.*

§ 14. Expresii analitice. Consideraţiile geometrice făcute în paragraful precedent permit exprimarea condiţiilor de echilibru cu frecare pe cale analitică, într-o formă foarte generală.

În cazul unei suprafeţe de ecuaţie $f(x, y, z)=0$ se ştie că se poate obţine uşor un vector care să aibă direcţia normalei la suprafaţă: grad $f=\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$. Să considerăm şi vectorul $\overline{\mathcal{R}}=X\bar{i}+Y\bar{j}+Z\bar{k}$. Unghiul acestor doi vectori trebuie, pentru echilibru, să fie mai mic decît unghiul de frecare. Folosind produsul scalar al celor doi vectori se obţine

$$\overline{\mathcal{R}}\,\text{grad}\, f=|\overline{\mathcal{R}}|\cdot|\text{grad}\, f|\cdot\cos\alpha,$$

de unde

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathcal{R}}\,\text{grad}\, f}{|\overline{\mathcal{R}}|\cdot|\text{grad}\, f|}.$$

În funcţie de proiecţiile pe axe ale celor doi vectori

$$\cos\alpha=\frac{X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Dacă vectorii $\overline{\mathcal{R}}$ şi grad f fac între ei un unghi ascuţit, $\cos\alpha>0$, iar dacă fac un unghi obtuz, $\cos\alpha<0$. Vom considera în cele ce urmează $|\cos\alpha|$ a cărui valoare este

$$|\cos\alpha|=\frac{\left|X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Pentru ca $\alpha\leqslant\varphi$ este necesar ca

$$|\cos\alpha|\geqslant\cos\varphi.$$

Dar $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Atunci condiția de echilibru se scrie

$$\frac{\left|X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{3.53}$$

În cazul unei curbe pe care o presupunem dată prin ecuațiile parametrice $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ se poate ușor găsi un vector dirijat în lungul tangentei

$$\overline{V}=x'\overline{i}+y'\overline{j}+z'\overline{k},$$

unde prin x', y', z' s-au notat derivatele funcțiilor x, y, z, în raport cu parametrul (în cazul de față, t).

Considerînd și rezultanta forțelor efectiv aplicate $\overline{\mathcal{R}}=X\overline{i}+Y\overline{j}+Z\overline{k}$ putem exprima analog ca mai sus unghiul β dintre cei doi vectori printr-o relație analogă

$$\cos\beta=\frac{Xx'+Yy'+Zz'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Pentru echilibru, vectorul $\overline{\mathcal{R}}$ trebuie să formeze cu planul normal un unghi mai mic decît unghiul de frecare sau, ceea ce este același lucru, cu tangenta la curbă un unghi $\beta\geqslant\frac{\pi}{2}-\varphi$. Aceasta are loc dacă

$$|\cos\beta|\leqslant\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\quad\text{sau}\quad|\cos\beta|\leqslant\sin\varphi.$$

Cum $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, condiția de echilibru a unui punct material pe o curbă aspră devine

$$\frac{|Xx'+Yy'+Zz'|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\leqslant\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{3.54}$$

Aplicații. 11°. Să se determine regiunile în care un punct material greu poate sta în echilibru pe o elice aspră (avînd coeficientul de frecare μ) de ecuații parametrice $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, $z=h\theta$ (axa Oz verticală și ascendentă).

Rezolvare. În cazul de față $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$, iar derivatele în raport cu parametrul θ vor fi $x'=-a\sin\theta$, $y'=a\cos\theta$, $z'=h$.

Rezultă pentru echilibru

$$\frac{|-Gh|}{G\sqrt{a^2+h^2}}\leqslant\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Pentru că $|-Gh|=Gh$ rezultă

$$\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\leqslant\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\quad\text{sau}\quad h\leqslant a\mu.$$

Există atunci două posibilități: sau această inegalitate este satisfăcută și atunci punctul material este în echilibru în orice punct pe elice, sau această inegalitate nu este satisfăcută și atunci echilibrul este imposibil. Dacă $h=a\mu$ punctul este în echilibru limită (indiferent) în orice poziție pe elice.

12°. Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct material greu pe o sferă aspră.

Rezolvare. Dacă centrul sferei este în originea axelor de coordonate și raza ei este R, ecuația este $f=x^2+y^2+z^2-R^2=0$. Presupunînd axa Oz verticală și ascendentă $X=0$, $Y=0$, $Z=-G$. Apoi

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

$$\frac{|-G\cdot 2z|}{G\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Ținînd seama că $x^2+y^2+z^2=R^2$ condiția de echilibru se scrie

$$|-z|\geqslant\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Dacă $z>0$, atunci $|-z|=z$ și $z\geqslant\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată deasupra planului de cotă $z=\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Dacă $z<0$, $|-z|=-z$ rezultă $z\leqslant-\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Această condiție este îndeplinită de o calotă sferică situată sub planul de cotă $z=-\frac{R}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

IV. SISTEME DE FORȚE

A. SISTEME GENERALE

§ 1. **Solidul rigid.** Corpurile din natură sînt deformabile, într-o măsură mai mare sau mai redusă. Nu există corp perfect rigid. Totuși, pentru anumite materiale (metale, lemn, zidării etc.), într-o primă aproximație, deformațiile pot fi neglijate fără ca rezultatele cercetărilor întreprinse să se îndepărteze sensibil de realitate. Se ajunge astfel la conceptul matematic de solid rigid. Acest concept ușurează mult calculul și este aplicat în mod deosebit în mecanica rațională.

Se numește *solid rigid* un corp la care distanța dintre două puncte oarecare rămîne aceeași cînd asupra sa acționează un sistem de forțe finite, oricît de mari ar fi aceste forțe.

În dinamică se va arăta că, în particular, dacă asupra solidului rigid acționează două forțe egale și direct opuse, în două puncte A și B diferite (fig. 4.1, *a* sau 4.1, *b*) ele nu au nici un efect asupra solidului. Dacă solidul se găsea în repaus față de un reper fix, el continuă să rămînă în stare de repaus; dacă se găsea în stare de mișcare, el continuă să se miște ca și cînd nimic n-ar fi intervenit din exterior.

Rezultă că, dat fiind un sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid, *se pot introduce sau suprima oricînd două forțe egale și direct opuse, fără ca prin aceasta efectul sistemului de forțe asupra solidului rigid să se schimbe.*

§ 2. Caracterul forțelor care acționează asupra solidului rigid. Să arătăm că punctul de aplicație al unei forțe poate fi deplasat pe suportul ei fără ca efectul pe care forța îl are asupra solidului rigid să se schimbe.

Într-adevăr, fie $\overline{F}$ o forță care acționează în punctul A al unui solid rigid (fig. 4.2). Fie un punct B oarecare pe suportul forței $\overline{F}$. În acest punct se consideră aplicate două forțe $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ egale și opuse (fig. 4.2, *b*). Prin

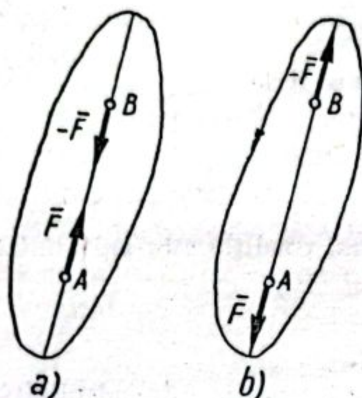


Fig. 4.1

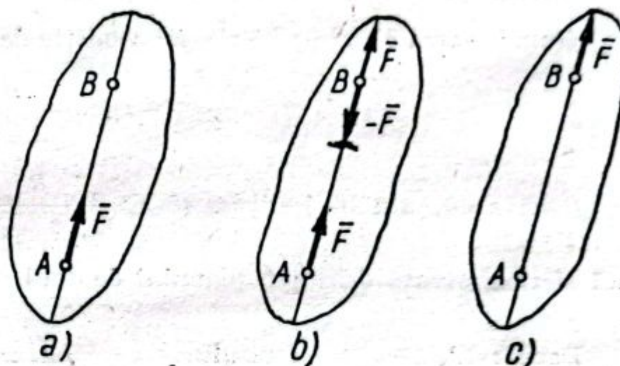


Fig. 4.2

aceasta efectul forței $\overline{F}$ nu s-a schimbat. Se poate suprima acum perechea de forțe: $\overline{F}$ (aplicată în A) și $-\overline{F}$ (aplicată în B). Nici prin această operație nu s-a schimbat nimic în ceea ce privește efectul forțelor asupra solidului. Se ajunge astfel la situația din fig. 4.2, *c*. Ori, această situație diferă de cea inițială prin faptul că punctul de aplicație al forței $\overline{F}$ s-a deplasat pe suportul ei din A în B.

Forțele care acționează asupra unui solid rigid pot fi reprezentate deci prin *vectori alunecători*.

În consecință, pentru aceste forțe se aplică teoria vectorilor alunecători, care a fost prezentată în cadrul „Calculului vectorial" (cap. I, §§ 16—25). Rezumăm rezultatele obținute la acel capitol, pe care însă le particularizăm pentru sistemele de forțe.

B. SISTEME DE FORȚE OARECARE

§ 3. Operații elementare de echivalență. Efectele mecanice ale unui sistem de forțe oarecare asupra unui rigid nu se schimbă dacă se înlocuiește într-un punct dat o forță sau mai multe forțe, cu un sistem echivalent, aplicînd regulele stabilite anterior cu privire la paralelogramul forțelor. De asemenea, efectele mecanice nu se schimbă dacă se deplasează punctul de aplicație al unei forțe pe suportul ei. Acestea sînt cele două operații elementare de echivalență ce pot fi făcute cu forțele unui sistem care acționează asupra unui rigid.

§ 4. Invarianții unui sistem de forțe. Un sistem de forțe care acționează asupra unui rigid are ca invarianți față de operațiile elementare de echivalență:

a) *Vectorul rezultant* $\overline{\mathcal{R}}$ definit ca sumă a forțelor și obținut prin aplicarea regulii paralelogramului forțelor. Expresia sa este

$$\overline{\mathcal{R}}=\Sigma \overline{F}_i, \tag{4.1}$$

iar proiecțiile sale pe axe sînt

$$X=\Sigma X_i, \quad Y=\Sigma Y_i, \quad Z=\Sigma Z_i. \tag{4.2}$$

b) *Vectorul moment rezultant în raport cu un punct O*, $\overline{\mathcal{M}}_O$ definit ca sumă a momentelor forțelor sistemului în raport cu acest punct. Expresia sa este

$$\overline{\mathcal{M}}_O=\Sigma \overline{r}_i \times \overline{F}_i, \tag{4.3}$$

unde s-a notat cu $\overline{r}_i$ vectorul de poziție al punctului de aplicație A_i al unei forțe oarecare $\overline{F}_i$ a sistemului, în raport cu punctul $O(\overline{r}_i=\overline{OA}_i)$. Proiecțiile pe axe ale vectorului moment rezultant sînt

$$\mathcal{M}_{Ox}=\Sigma(y_iZ_i-z_iY_i), \quad \mathcal{M}_{Oy}=\Sigma(z_iX_i-x_iZ_i), \quad \mathcal{M}_{Oz}=\Sigma(x_iY_i-y_iX_i), \tag{14.4}$$

unde cu x_i, y_i, z_i s-au notat coordonatele punctului A_i.

Orice alt invariant față de operațiile elementare de echivalență, în afară de $\overline{\mathcal{R}}$ și $\overline{\mathcal{M}}_O$ sînt o combinație a acestor doi invarianți.

Ansamblul celor doi vectori poartă numele de *torsorul sistemului de forțe* în raport cu punctul O.

Vectorul $\overline{\mathcal{R}}$ rămîne același oricare ar fi punctul O de calcul al torsorului; vectorul $\overline{\mathcal{M}}_O$ se schimbă de la un punct la altul după legea (1.40)

$$\overline{\mathcal{M}}_P=\overline{\mathcal{M}}_O+\overline{PO}\times\overline{\mathcal{R}}. \tag{4.5}$$

În cazul cînd $\overline{\mathcal{R}}=0$, momentul rezultant $\overline{\mathcal{M}}_P$ nu variază. În cazul cînd $\overline{\mathcal{R}}\neq 0$, $\overline{\mathcal{M}}_P$ variază devenind minim în punctele unei drepte denumite *axa centrală a sistemului de forțe*. Ecuația vectorială a acestei drepte poate fi pusă sub forma (1.70)

$$\overline{r}=\frac{\overline{\mathcal{M}}_O\times\overline{\mathcal{R}}}{\overline{\mathcal{R}}^2}+\lambda\overline{\mathcal{R}}. \tag{4.6}$$

Ecuațiile scalare ale aceleiași axe pot fi puse sub forma (1.75)

$$\frac{\mathcal{M}_{Ox}-yZ+zY}{X}=\frac{\mathcal{M}_{Oy}-zX+xZ}{Y}=\frac{\mathcal{M}_{Oz}-xY+yX}{Z}. \tag{4.7}$$

Expresia momentului rezultant minim (într-un punct al axei centrale) este (1.68)

$$\mathcal{M}_{min}=\frac{\overline{\mathcal{R}}\cdot\overline{\mathcal{M}}_O}{\overline{\mathcal{R}}^2}=\frac{X\cdot\mathcal{M}_{Ox}+Y\cdot\mathcal{M}_{Oy}+Z\cdot\mathcal{M}_{Oz}}{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{4.8}$$

§ 5. Echivalența a două sisteme de forțe. O consecință a teoriei generale a vectorilor alunecători este că *două sisteme de forțe (S) și (S') sînt echivalente, adică produc același efect mecanic asupra unui rigid dacă au același vector*

rezultant și același vector moment rezultant în raport cu punctul O. Vom scrie aceste condiții prin egalitățile

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\mathcal{R}}=\bar{\mathcal{R}}'\\ \bar{\mathcal{M}}_O=\bar{\mathcal{M}}'_O\end{array}\right\} \tag{4.9}$$

Aceste două egalități pot fi strînse într-una singură, dacă se utilizează noțiunea de torsor. Obținem atunci condiția: *două sisteme de forțe (S) și (S′) sînt echivalente dacă au în punctul O același torsor*, ceea ce se scrie

$$\tau_0(S)=\tau_0(S'). \tag{4.10}$$

§ 6. **Reducerea unui sistem de forțe.** Reducerea unui sistem de forțe revine la găsirea celui mai simplu sistem de forțe, care să aibă același torsor ca și sistemul dat (§ 5).

Tipurile de sisteme simple sînt limitate, în funcție de posibilitățile care există pentru componentele $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{M}}_O$ ale torsorului.

a) *Cazul* $\bar{\mathcal{R}}=0$ *și* $\bar{\mathcal{M}}_O=0$. Sistemul de forțe dat este *echivalent cu zero* sau *în echilibru*, deoarece un sistem (formal) care n-ar avea nici o forță, are evident $\bar{\mathcal{R}}=0$ și $\bar{\mathcal{M}}_O=0$, ca și sistemul dat.

b) *Cazul* $\bar{\mathcal{R}}=0$ *și* $\bar{\mathcal{M}}_O\neq0$. Sistemul de forțe dat este *echivalent cu un cuplu*, ale cărui forțe acționează într-un plan normal pe vectorul $\bar{\mathcal{M}}_O$, forțele $\bar{F}_1$ și $-\bar{F}_1$ ale cuplului fiind astfel alese încît

$$|\bar{F}_1|d_1=|\bar{\mathcal{M}}_O|, \tag{4.11}$$

unde prin d_1 s-a notat brațul cuplului (distanța dintre suporturile celor două forțe). Sensul forțelor $\bar{F}_1$ și $-\bar{F}_1$ trebuie să fie astfel alese încît sensul vectorului $\bar{\mathcal{M}}_O$ să respecte regula șurubului.

— În cazul cînd $\bar{\mathcal{R}}\neq0$, sistemul de forțe admite o axă centrală. În acest caz reducerea depinde de punctul în care este făcută. În cazul cînd punctul se află pe axa centrală reducerea se numește *canonică*.

În cazul cînd reducerea se face într-un punct oarecare O, sistemul de forțe poate fi înlocuit cu o forță $\bar{F}=\bar{\mathcal{R}}$ aplicată în O și un cuplu ale cărui forțe $\bar{F}_1$ și $-\bar{F}_1$ sînt situate într-un plan normal pe vectorul $\bar{\mathcal{M}}_O$, la o distanță d_1, astfel încît să fie îndeplinită relația (4.11) și să fie respectată regula șurubului.

În cazul reducerii canonice se deosebesc două cazuri, după cum momentul rezultant minim $\mathcal{M}_{min}$ dat de relația (4.8) este nul sau diferit de zero. Deoarece am presupus $\bar{\mathcal{R}}^2\neq0$, totul revine la a studia cazurile cînd scalarul torsorului $\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}_O$ este nul sau diferit de zero.

c) *Cazul* $\bar{\mathcal{R}}\neq0$ *și* $\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{M}}=0$. Sistemul de forțe se reduce la o forță unică $\bar{F}=\bar{\mathcal{R}}$ aplicată într-un punct de pe axa centrală și avînd direcția acestei axe.

d) *Cazul* $\bar{\mathcal{R}}\neq0$ *și* $\bar{\mathcal{R}}_O\bar{\mathcal{M}}\neq0$. Sistemul se reduce la o forță $\bar{F}=\bar{\mathcal{R}}$ aplicată într-un punct de pe axa centrală și la un cuplu ale cărui forțe $\bar{F}_1$ și $-\bar{F}_1$

acționează într-un plan normal pe axa centrală pe două suporturi situate la distanța d_1 astfel încît să subsiste relația

$$|F_1| d_1 = |\mathcal{M}_{min}| \tag{4.12}$$

și să fie respectată regula șurubului drept. Un asemenea sistem de forțe alcătuit dintr-o forță și dintr-un cuplu acționînd într-un plan normal pe suportul forței nu are încă o denumire consacrată. Îl vom denumi în cele ce urmează *dinamă*, *torsor minim* sau *răsucitor*.

În concluzie există patru cazuri posibile de reducere a unui sistem de forțe:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \bar{\mathcal{R}}=0,\ \bar{\mathcal{M}}_O=0 \text{ echilibru} \\ \text{b)} & \bar{\mathcal{R}}=0,\ \bar{\mathcal{M}}_O\neq 0 \text{ cuplu} \\ \text{c)} & \bar{\mathcal{R}}\neq 0,\ \bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0 \text{ forță unică} \\ \text{d)} & \bar{\mathcal{R}}\neq 0,\ \bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O\neq 0 \text{ dinamă (torsor minim, răsucitor).} \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

Se poate da o interesantă interpretare fizică acestor patru cazuri de reducere a sistemelor de forțe, dacă se consideră posibilitățile de mișcare ale rigidului. *Să presupunem că sistemul de forțe ar acționa asupra unui corp omogen de formă sferică care se află în stare de repaus față de un reper inerțial.*

Dacă sistemul de forțe este în echilibru, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul continuă să rămînă în repaus.

Dacă sistemul de forțe este echivalent cu un cuplu, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul începe să se rotească în jurul unei axe paralele cu vectorul $\bar{\mathcal{M}}_O$ și trecînd prin centrul sferei.

Dacă sistemul de forțe este echivalent cu o forță unică trecînd prin centrul sferei, se constată că, după aplicarea sistemului de forțe, corpul capătă o mișcare de translație în direcția și sensul vectorului $\bar{\mathcal{R}}$.

În sfîrșit, dacă sistemul de forțe este echivalent cu o dinamă (torsor minim, răsucitor) a cărui axă centrală trece prin centrul sferei, atunci corpul capătă o mișcare elicoidală deplasîndu-se în lungul axei centrale, în direcția și sensul indicat de $\bar{\mathcal{R}}$ și rotindu-se în jurul aceleiași axe în sensul indicat de $\bar{\mathcal{M}}_O$.

Observație. Concluziile de mai sus nu mai sînt riguroase în cazul unui corp de o formă oarecare, sau în cazul cînd corpul sferic nu se află inițial în repaus. În cazul general mișcarea corpului este determinată, așa cum se va arăta în dinamică, de condițiile inițiale, de masa sa, de momentele de inerție principale centrale și de sistemul de forțe. Faptul că în cazul unui corp sferic omogen elementul hotărîtor este sistemul de forțe, se datorește simetriei corpului. Menționăm că și în cazul unui cub, octaedru regulat etc. concluziile arătate în cazul corpului sferic rămîn adevărate.

Aplicații. 1°. Asupra unui corp de formă paralelipipedică ($OA=a$, $OB=OC=2a$) acționează sistemul de forțe $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_6$, avînd punctele de aplicație, direcțiile și sensurile indicate în fig. 4.3, iar ca module $|\bar{F}_1|=|\bar{F}_2|=|\bar{F}_4|=|\bar{F}_6|=P$; $|\bar{F}_3|=|\bar{F}_5|=2P$. Se cere: a) să se facă reducerea sistemului de forțe în raport cu punctul O; b) să se arate că sistemul se reduce la o dinamă; c) să se scrie ecuațiile axei centrale; d) să se calculeze elementele torsorului minim (vectorul rezultant și vectorul moment rezultat într-un punct de pe axa centrală).

Rezolvare. a) Vom calcula proiecţiile vectorului rezultant şi ale momentului rezultant pe axele de coordonate. Se obţine:

$$X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6=0$$
$$Y=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4+Y_5+Y_6=Y_1+Y_2=P-P=0$$
$$Z=Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6=Z_3+Z_4+Z_5+Z_6=2P+P+2P+P=6P$$
$$\mathcal{M}_{Ox}=Z_5\cdot AD+Z_6\cdot OB=2P\cdot 2a+P\cdot 2a=6Pa$$
$$\mathcal{M}_{Oy}=-Z_4\cdot OA-Z_5\cdot BD=-P\cdot a-2P\cdot a=-3Pa$$
$$\mathcal{M}_{Oz}=Y_1\cdot OA=Pa.$$

Rezultă

$$\overline{\mathcal{R}}=6P\bar{k},\quad \overline{\mathcal{M}}_O=6Pa\bar{i}-3Pa\bar{j}+Pa\bar{k}.$$

b) Observăm că $\overline{\mathcal{R}}\neq 0$, $\overline{\mathcal{M}}_O\neq 0$. Calculînd trinomul invariant obţinem $\mathcal{R}\cdot\mathcal{M}_O=6P^2a\neq 0$. Sistemul de forţe se reduce la o dinamă (torsor minim, răsucitor).

c) Ecuaţiile axei centrale, care în cazul general sînt

$$\frac{\mathcal{M}_{Ox}-yZ+zY}{X}=\frac{\mathcal{M}_{Oy}-zX+xZ}{Y}=\frac{\mathcal{M}_{Oz}-xY+yX}{Z},$$

în cazul de faţă devin

$$\frac{6Pa-6Py}{0}=\frac{-3Pa+6Px}{0}=\frac{Pa}{6P}.$$

Aceste ecuaţii mai pot fi scrise $x=\frac{a}{2}$, $y=a$. Rezultă că axa centrală este paralelă cu axa Oz. Ea este una din axele de simetrie ale paralelipipedului.

d) Vectorul rezultant $\overline{\mathcal{R}}$ rămîne acelaşi ca în O ($\overline{\mathcal{R}}=6P\bar{k}$). Vectorul moment rezultant va deveni

$$\overline{\mathcal{M}}_r=\frac{\overline{\mathcal{R}}\cdot\overline{\mathcal{M}}_O}{|\overline{\mathcal{R}}|^2}\,\overline{\mathcal{R}}=\frac{6P^2a}{36P^2}\cdot 6P\bar{k}=Pa\bar{k}.$$

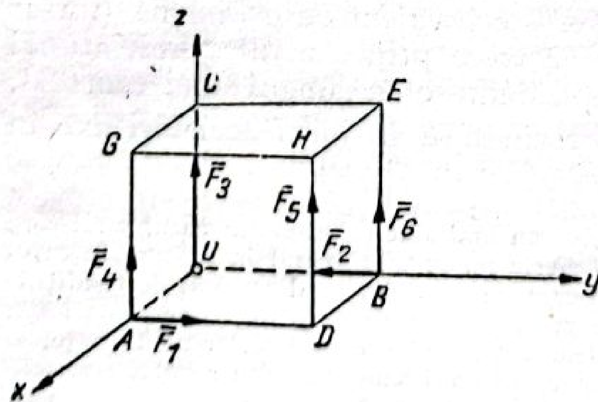


Fig. 4.3

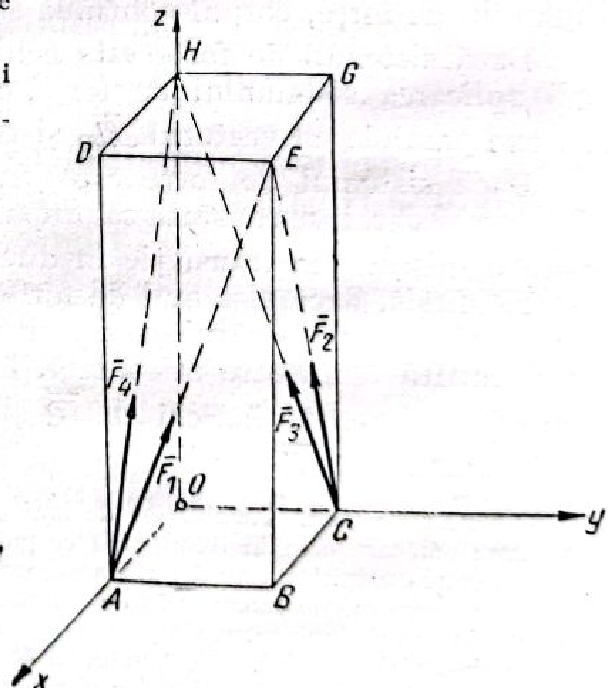


Fig. 4.4

2°. Pe feţele laterale ale unui paralelipiped acţionează forţele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ şi $\bar{F}_4$, avînd direcţiile diagonalelor AE, CE, CH şi AH, şi sensurile indicate în fig. 4.4. Ştiind că $OA=3a$, $OC=4a$, $OH=12a$, iar $|\bar{F}_1|=|\bar{F}_3|=4P\sqrt{10}$, $\bar{F}_2=\bar{F}_4=3P\sqrt{17}$, se cere:

a) să se reducă sistemul de forţe în raport cu punctul O;

b) cu ce este echivalent sistemul de forţe;

c) ecuațiile axei centrale;
d) elementele torsorului minim.

Rezolvare. a) Vom calcula proiecțiile vectorului rezultant și ale momentului rezultant pe axe. Observînd că

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \text{vers } \bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \text{vers } \overline{AE} = |\bar{F}_1| \frac{\overline{AE}}{|\overline{AE}|} = 4P\sqrt{10}\frac{4a\bar{j}+12a\bar{k}}{\sqrt{16a^2+144a^2}} = 4P\bar{j}+12P\bar{k},$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \text{vers } \bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \text{vers } \overline{CE} = |\bar{F}_2| \cdot \frac{\overline{CE}}{|\overline{CE}|} = 3P\sqrt{17}\frac{3a\bar{i}+12a\bar{k}}{\sqrt{9a^2+144a^2}} = 3P\bar{i}+12P\bar{k},$$

$$\bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \text{vers } \bar{F}_3 = |\bar{F}_3| \text{vers } \overline{CH} = |\bar{F}_3| \frac{\overline{CH}}{|\overline{CH}|} = 4P\sqrt{10}\frac{-4a\bar{j}+12a\bar{k}}{\sqrt{16a^2+144a^2}} = -4P\bar{j}+12P\bar{k},$$

$$\bar{F}_4 = |\bar{F}_4| \text{vers } \bar{F}_4 = |\bar{F}_4| \text{vers } \overline{AH} = |\bar{F}_4| \frac{\overline{AH}}{|\overline{AH}|} = 3P\sqrt{17}\frac{-3a\bar{i}+12a\bar{k}}{\sqrt{9a^2+144a^2}} = -3P\bar{i}+12P\bar{k}.$$

vom avea

$$X = X_2 + X_4 = 3P - 3P = 0,$$
$$Y = Y_1 + Y_3 = 4P - 4P = 0,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 12P + 12P + 12P + 12P = 48P,$$

$$\mathcal{M}_{Ox} = Z_2 \cdot OC + Z_3 \cdot OC = 12P \cdot 4a + 12P \cdot 4a = 96Pa,$$
$$\mathcal{M}_{Oy} = -Z_1 \cdot OA - Z_4\, OA = -12P \cdot 3a - 12P \cdot 3a = -72Pa,$$
$$\mathcal{M}_{Oz} = Y_1 \cdot OA - X_2 \cdot OC = 4P \cdot 3a - 3P \cdot 4a = 0.$$

Deci

$$\bar{\mathcal{R}} = 48P\bar{k}, \quad \bar{\mathcal{M}}_O = 96Pa\bar{i} - 72Pa\bar{j}.$$

b) Se observă că $\mathcal{R} \neq 0$. Trinomul invariant $\bar{\mathcal{R}} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = X\mathcal{M}_{Ox} + Y\mathcal{M}_{Oy} + Z\mathcal{M}_{Oz} = 0$.
Deci sistemul de forțe se reduce la o forță unică.
c) Ecuațiile axei centrale, care, în cazul general sînt

$$\frac{\mathcal{M}_{Ox} - yZ + zY}{X} = \frac{\mathcal{M}_{Oy} - zX + xZ}{Y} = \frac{\mathcal{M}_{Oz} - xY + yX}{Z},$$

în cazul de față devin

$$\frac{96\,Pa - 48\,Py}{0} = \frac{-72\,Pa + 48\,Px}{0} = \frac{0}{48P}.$$

Aceste ecuații pot fi scrise mai simplu: $y = 2a$, $x = \frac{3a}{2}$ și ne arată că axa centrală a sistemului de forțe coincide cu axa de simetrie paralelă cu Oz, a paralelipipedului.

C. SISTEME PARTICULARE DE FORȚE

Vom analiza cîteva sisteme particulare de forțe care intervin mai des în aplicațiile practice.

§ 7. Forțe concurente. Vom numi forțe concurente în cazul unui rigid, forțele ale căror suporturi sînt concurente. Cazul acesta este ceva mai general

decît cel din cazul punctului material, cînd forțele aveau și același punct de aplicație.

Fie O punctul comun al suporturilor forțelor. Vom calcula torsorul sistemului în raport cu acest punct. Momentul rezultant în raport cu O este evident nul. Ca urmare și scalarul torsorului $\bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0$, deci nu sînt posibile decît două cazuri de reducere:

$$\left.\begin{array}{lll}\bar{\mathcal{R}}=0, & \bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{echilibru}\\ \bar{\mathcal{R}}\neq 0, & \bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{forță unică.}\end{array}\right\} \tag{4.14}$$

Regăsim astfel rezultatele cunoscute de la sistemele de forțe concurente care acționează asupra punctului material.

Axa centrală trece prin O și coincide cu suportul rezultantei.

§ 8. **Forțe în plan.** Vom numi forțe în plan, forțele ale căror suporturi se găsesc în același plan (Π). Fie O un punct din acest plan. Vom calcula torsorul în raport cu O. Momentul unei forțe oarecare $\bar{F}_i$ a sistemului în raport cu O este evident un vector normal pe planul (Π). Și momentul rezultant $\bar{\mathcal{M}}_O$ va fi în cazul general un vector normal pe planul (Π). Cum forțele au suporturile lor în planul (Π), vectorul rezultant $\bar{\mathcal{R}}$ în cazul general va fi și el cuprins în planul (Π). Deducem că vectorii $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{M}}_O$ sînt ortogonali, deci $\bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0$. Nu sînt deci posibile decît 3 cazuri de reducere a unui sistem de forțe plane:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{a)} & \bar{\mathcal{R}}=0, & \bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{echilibru}\\ \text{b)} & \bar{\mathcal{R}}=0, & \bar{\mathcal{M}}_O\neq 0 & \text{cuplu}\\ \text{c)} & \bar{\mathcal{R}}\neq 0, & \bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{forță unică.}\end{array}\right\} \tag{4.15}$$

Axa centrală se poate determina folosind faptul că în cazul $\bar{\mathcal{R}}\neq 0$ nu este posibil decît cazul de reducere la o forță unică. Momentul rezultant fiind un invariant față de operațiile elementare de echivalență, urmează că el va fi egal cu momentul forței unice, respectiv al rezultantei. Această proprietate este cunoscută sub numele de *teorema lui Varignon*. Ea se scrie:

$$\bar{r}\times\bar{\mathcal{R}}=\bar{\mathcal{M}}_O, \tag{4.16}$$

unde prin $\bar{r}$ s-a notat vectorul de poziție al unui punct curent de pe axa centrală. Ecuația (4.16) poate fi considerată ca ecuația vectorială a axei centrale a sistemului.

Alegînd un sistem de axe $Oxyz$ astfel încît planul forțelor să coincidă cu xOy și notînd cu x, y, z coordonatele unui punct curent de pe axa centrală, cu X și Y proiecțiile vectorului $\bar{\mathcal{R}}$ pe axele Ox și Oy $(Z=0)$ și cu $\mathcal{M}_{Oz}$ proiecția vectorului $\mathcal{M}_O$ pe axa Oz $(\mathcal{M}_{Ox}=0, \mathcal{M}_{Oy}=0)$, ecuația (4.16) se scrie

$$\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ X & Y & 0\end{vmatrix}=\mathrm{M}_{Oz}\cdot\bar{k},$$

de unde deducem

$$z=0,\ Yx-Xy=\mathcal{M}_{Oz}, \tag{4.17}$$

care sînt ecuațiile axei centrale. Prima ecuație arată că axa centrală se află în planul forțelor.

A p l i c a ț i e. 3°. Se consideră (fig. 4.5) două ziduri de sprijin de aceeași lungime, unul avînd secțiunea transversală dreptunghiulară de dimensiuni $b\times h$ și fiind acționat de

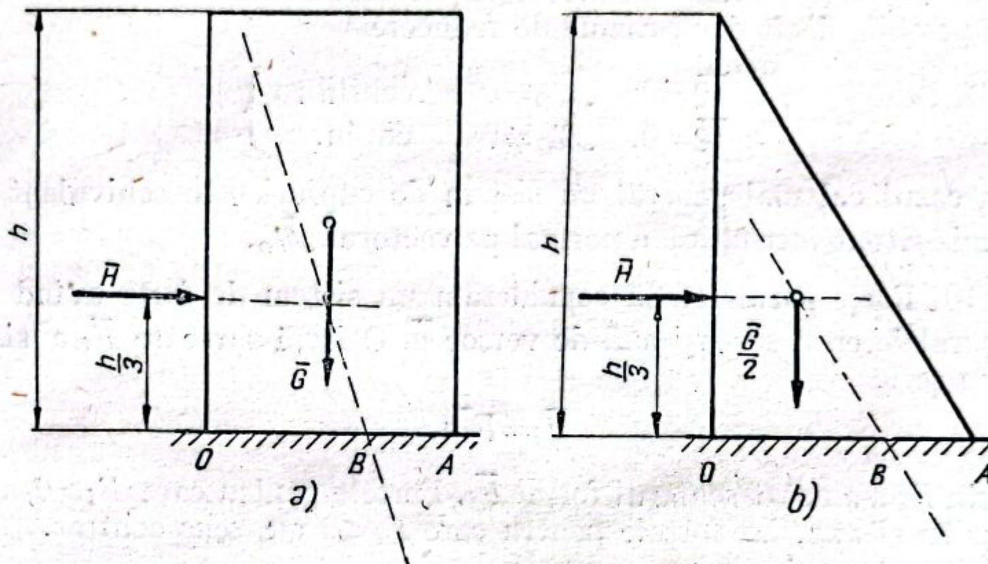


Fig. 4.5

greutatea G aplicată la distanța $\frac{b}{2}$ de muchia ce se proiectează în O și un al doilea zid avînd secțiunea transversală triunghiulară care este acționat de o forță $\frac{G}{2}$ aplicată la distanța $\frac{b}{3}$ de aceeași muchie. Ce forță orizontală H poate suporta primul zid și ce forță H poate suporta cel de-al doilea zid astfel încît axa centrală a sistemului de forțe date să intersecteze baza OA în punctul B $\left(OB=\frac{2}{3}\,b\right)$. Discuție.

R e z o l v a r e. Deoarece axa centrală trece prin B vom reduce sistemul de forțe în raport cu acest punct. Momentul rezultant în raport cu B trebuie să fie nul, căci, în raport cu un punct de pe axa centrală un sistem de forțe plane se reduce întotdeauna la o forță unică. Rezultă atunci:

în cazul zidului de secțiune dreptunghiulară

$$G\left(\frac{2\,b}{3}-\frac{b}{2}\right)-H\frac{h}{3}=0,\ \text{de unde}\ H=\frac{Gb}{2h};$$

în cazul zidului de secțiune triunghiulară

$$\frac{G}{2}\left(\frac{2\,b}{3}-\frac{b}{3}\right)-H\,\frac{h}{3}=0,\ \text{de unde}\ H=\frac{G\,b}{2\,h}.$$

Se observă că s-a obținut aceeași valoare pentru forța H. De aici se poate trage concluzia că cele două ziduri de sprijin se comportă la fel. Zidul de secțiune triunghiulară este mai avantajos fiind, evident, mai economic.

§ 9. **Cupluri.** Dacă asupra unui rigid acționează simultan mai multe cupluri $(\bar{F}_1, -\bar{F}_1)$, $(\bar{F}_2, -\bar{F}_2)$, ..., $(\bar{F}_i, -\bar{F}_i)$, ..., $(\bar{F}_n, -\bar{F}_n)$, vom observa că

rezultanta fiecărui cuplu în parte fiind nulă și rezultanta întregului sistem de cupluri va fi de asemenea nulă. Momentul rezultant $\mathcal{M}_O$ al sistemului de cupluri este egal cu suma momentelor cuplurilor. Deci

$$\bar{\mathcal{R}}=0, \qquad \bar{\mathcal{M}}_O=\Sigma\bar{\mathcal{M}}_i, \tag{4.18}$$

unde prin $\bar{\mathcal{M}}_i$ am notat momentul cuplului $(\bar{F}_i, -\bar{F}_i)$.

Din expresiile (4.18) deducem că în cazul unui sistem de cupluri nu sînt posibile decît două cazuri de reducere

$$\left.\begin{array}{lll}\bar{\mathcal{R}}=0, & \bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{echilibru}\\ \bar{\mathcal{R}}=0, & \mathcal{M}_O\neq 0 & \text{cuplu.}\end{array}\right\} \tag{4.19}$$

Deci în cazul cel mai general un sistem de cupluri este echivalent cu un cuplu unic situat într-un plan normal pe vectorul $\bar{\mathcal{M}}_O$.

§10. **Forțe paralele.** Să considerăm un sistem de forțe avînd suporturile paralele cu o aceeași axă de versor $\bar{u}$. O forță oarecare $\bar{F}_i$ a sistemului se va scrie

$$\bar{F}_i=F_i\bar{u}, \tag{4.20}$$

unde prin F_i s-a notat scalarul forței $\bar{F}_i$. Forțele pentru care $F_i>0$ au același sens ca și axa, iar forțele pentru care $F_i<0$ au, sens contrar.

Vectorul rezultant are expresia

$$\bar{\mathcal{R}}=\Sigma\bar{F}_i=\Sigma F_i\bar{u}=\bar{u}\,\Sigma F_i. \tag{4.21}$$

Vectorul moment rezultant se poate pune sub forma

$$\bar{\mathcal{M}}_O=\Sigma\bar{r}_i\times\bar{F}_i=\Sigma\bar{r}_i\times F_i\bar{u}=\Sigma F_i\bar{r}_i\times\bar{u}=(\Sigma F_i\bar{r}_i)\times\bar{u}. \tag{4.22}$$

Din expresiile (4.21) și (4.22) rezultă că vectorul $\bar{\mathcal{R}}$ este paralel cu $\bar{u}$, iar $\bar{\mathcal{M}}_O$ este ortogonal pe $\bar{u}$, fiind produsul vectorial dintre $\bar{u}$ și un alt vector. Deci $\bar{\mathcal{M}}_O\perp\bar{\mathcal{R}}$, de unde deducem $\bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0$. În consecință, un sistem de forțe paralele nu se poate reduce niciodată la o dinamă (torsor minim, răsucitor). Rămîn numai trei cazuri posibile

$$\left.\begin{array}{llll}\text{a)} & \bar{\mathcal{R}}=0, & \bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{echilibru}\\ \text{b)} & \bar{\mathcal{R}}=0, & \mathcal{M}_O\neq 0 & \text{cuplu}\\ \text{c)} & \bar{\mathcal{R}}\neq 0, & \bar{\mathcal{R}}\cdot\bar{\mathcal{M}}_O=0 & \text{forță unică}\end{array}\right\} \tag{4.23}$$

Deoarece în cazul cel mai general posibil sistemul de forțe paralele se reduce la o forță unică, pentru determinarea axei centrale vom utiliza ca și în cazul forțelor plane teorema lui Varignon sub forma (4.16):

$$\bar{r}\times\bar{\mathcal{R}}=\bar{\mathcal{M}}_O,$$

în care, înlocuind $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{M}}_O$ cu expresiile (4.21) și (4.22) obținem

$$\bar{r}\times\bar{u}\cdot\Sigma F_i=(\Sigma F_i\bar{r}_i)\times\bar{u},$$

sau

$$\overline{r}(\sum F_i)\times\overline{u}=(\sum F_i\overline{r}_i)\times\overline{u},$$

$$[(\sum F_i)\overline{r}-\sum F_i\overline{r}_i]\times\overline{u}=0.$$

Din această ultimă relație deducem paralelismul celor doi vectori $[(\Sigma F_i)\overline{r}-\Sigma F_i\overline{r}_i]$ și $\overline{u}$, deci

$$(\sum F_i)\overline{r}-\sum F_i\overline{r}_i=\mu\cdot\overline{u},$$

unde μ este un parametru variabil. De aici deducem pentru $\overline{r}$ expresia

$$\overline{r}=\frac{\sum F_i\overline{r}_i}{\sum F_i}+\frac{\mu}{\sum F_i}\overline{u},$$

sau încă

$$\overline{r}=\overline{\rho}+\lambda\overline{u}, \tag{4.24}$$

unde am notat cu $\overline{\rho}$ expresia

$$\overline{\rho}=\frac{\sum F_i\overline{r}_i}{\sum F_i}, \tag{4.25}$$

iar cu λ un alt parametru variabil care se deduce din parametrul μ prin împărțire cu scalarul ΣF_i.

Ecuația (4.24) este ecuația axei centrale. Sub această formă se recunoaște ușor că axa centrală trece prin punctul C, de vector de poziție $\overline{\rho}$, și are aceeași direcție ca și forțele.

Punctul C definit de vectorul $\overline{\rho}$ se bucură de o proprietate remarcabilă. Astfel, dacă se presupune că, fără a schimba punctele de aplicație ale forțelor și nici mărimile lor scalare, le rotim în așa fel încît în noua lor poziție forțele să devină paralele cu o altă axă de versor $\overline{u}'$, se constată că noua ecuație a axei centrale este

$$\overline{r}=\overline{\rho}+\lambda\overline{u}'$$

căci vectorul de poziție $\overline{\rho}$ nu s-a schimbat.

De aici se trage concluzia că în aceste condiții *axa centrală trece prin punctul fix C*. Acest punct remarcabil poartă numele de *centru al sistemului de forțe paralele*.

Coordonatele ξ, η și ζ ale punctului C se obțin proiectînd pe axe relația (4.25). Se obține

$$\xi=\frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i},\quad \eta=\frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i},\quad \zeta=\frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \tag{4.26}$$

Expresia (4.25) a vectorului de poziție al centrului forțelor paralele permite să se deducă următoarele proprietăți ale acestuia:

a) *Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de direcția forțelor* [expresia (4.25) este independentă de $\overline{u}$].

b) *Poziția centrului forțelor paralele nu se schimbă dacă toate forțele se măresc sau se micșorează în același raport k.* Într-adevăr înlocuind F_i cu kF_i se obține

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum k F_i \bar{r}_i}{\sum k F_i} = \frac{k \sum F_i \bar{r}_i}{k \sum F_i} = \frac{\sum F_i \bar{r}_i}{\sum F_i} .$$

c) *Poziția centrului forțelor paralele nu depinde de sistemul de referință, el fiind un element intrinsec al sistemului de forțe.*

Într-adevăr, să presupunem că se schimbă sistemul de referință. Fie O' noua origine. Să notăm $\overline{O'O} = \bar{r}_0$. Rezultă că vectorul de poziție $\bar{r}_i'$ al unui punct A_i față de noul sistem este legat de vectorul de poziție $\bar{r}_i$ al aceluiași punct față de vechiul sistem prin relația

$$\bar{r}_i' = \bar{r}_0 + \bar{r}_i. \tag{4.27}$$

Centrul C al forțelor paralele va avea față de noul sistem vectorul de poziție: $\bar{r}_0 + \bar{\rho}$.

Dacă centrul forțelor paralele s-ar schimba, atunci cînd s-ar trece la noul sistem de referință, notînd cu C' noua sa poziție și cu $\bar{\rho}'$ vectorul de poziție corespunzător, am avea

$$\bar{\rho}' = \bar{r}_0 + \bar{\rho} + \overline{CC'}. \tag{4.28}$$

Pe de altă parte, ținînd seama de (4.25) și de (4.27), vectorul de poziție $\bar{\rho}'$ va avea expresia

$$\bar{\rho}' = \frac{\sum F_i (\bar{r}_0 + \bar{r}_i)}{\sum F_i} = \frac{\bar{r}_0 \sum F_i + \sum F_i \bar{r}_i}{F_i} = \bar{r}_0 + \bar{\rho}. \tag{4.28}$$

Comparînd acum relațiile (4.28) și (4.29) deducem că $\overline{CC'} = 0$, de unde $C' \equiv C$, deci poziția centrului maselor nu depinde de sistemul de referință, el fiind un element intrinsec al sistemului de forțe.

Aplicații. 4°. Să se determine centrul forțelor paralele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ aplicate în punctele $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Folosind formulele (4.26) obținem

$$\xi = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}, \qquad \eta = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} \qquad \zeta = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2}{F_1 + F_2} .$$

Dacă notăm raportul $\frac{F_2}{F_1} = k$, expresiile coordonatelor centrului forțelor paralele devin

$$\xi = \frac{x_1 + k x_2}{1 + k},$$

$$\eta = \frac{y_1 + k y_2}{1 + k},$$

$$\zeta = \frac{z_1 + k z_2}{1 + k}.$$

În această formă se recunosc coordonatele unui punct care împarte segmentul A_1A_2 în raportul k. Deci

$$\frac{CA_1}{CA_2}=k=\frac{F_2}{F_1}.$$

Din această relație rezultă că, în cazul a două forțe paralele centrul lor C împarte segmentul A_1A_2 în raportul invers raportului scalarilor forțelor. Deci, punctul C este mai apropiat de forța al cărei modul este mai mare.

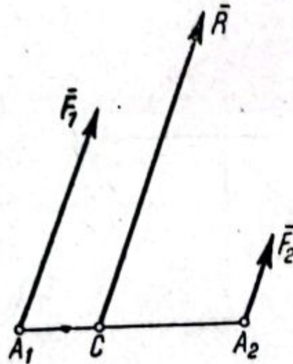


Fig. 4.6

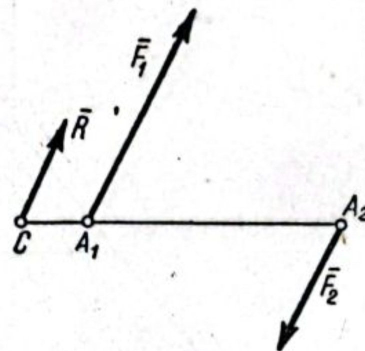


Fig. 4.7

Mai rezultă că dacă forțele F_1 și F_2 au același sens, $k>0$ și C se găsește în interiorul segmentului A_1A_2 (fig. 4.6), iar dacă F_1 și F_2 au sensuri opuse, $k<0$ și C se găsește în exteriorul segmentului A_1A_2, de partea forței celei mai mari (fig. 4.7).

5°. Să se determine rezultanta forțelor paralele din fig. 4.8.

R e z o l v a r e. Vom aplica teorema lui Varignon. Vom scrie că suma momentelor forțelor, de exemplu în raport cu punctul A, este egală cu momentul rezultantei sistemului, calculat în raport cu același punct. Scalarul rezultantei, presupusă dirijată în jos, va fi

$$\mathcal{R}=P+P-2P+3P-2P+4P=5P.$$

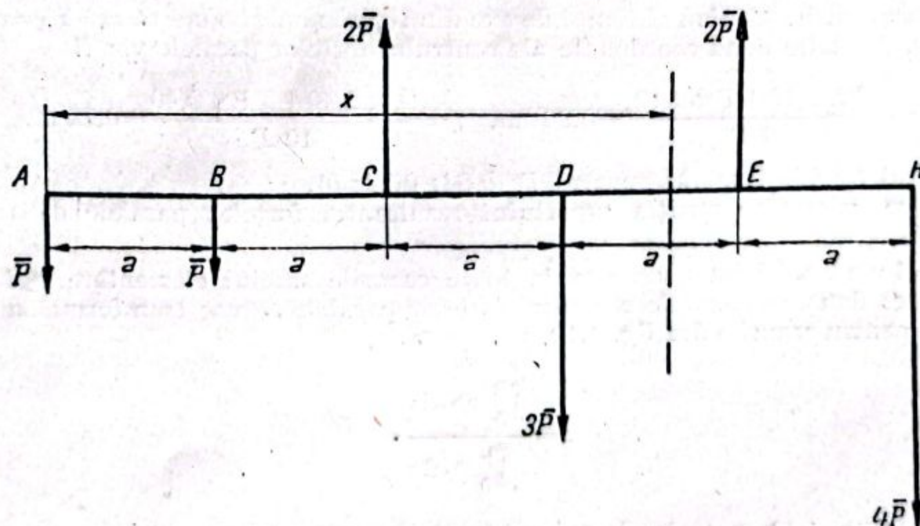


Fig. 4.8

Am obținut un scalar pozitiv, deci rezultanta este într-adevăr dirijată în jos, așa cum s-a presupus. Fie x distanța de la A la suportul rezultantei, presupus situat la dreapta punctului A. Teorema lui Varignon se scrie

$$-Pa+2P\cdot 2a-3P\cdot 3a+2P\cdot 4a-4P\cdot 5a=-5P\cdot x.$$

Scanned with CamScanner

Această ecuaţie se mai scrie

$$-18\,Pa=-5\,Px,\ \text{de unde}\ x=3{,}6\,a.$$

6°. O placă dreptunghiulară $OABC$ de dimensiuni $2{,}10\times 2{,}40\ \text{m}^2$ este acţionată de patru forţe verticale, egale respectiv cu P, $2P$, $3P$ şi $4P$ (fig. 4.9). În ce punct trebuie suspendată placa cu un fir, astfel încît ea să rămînă în echilibru, în poziţie orizontală?

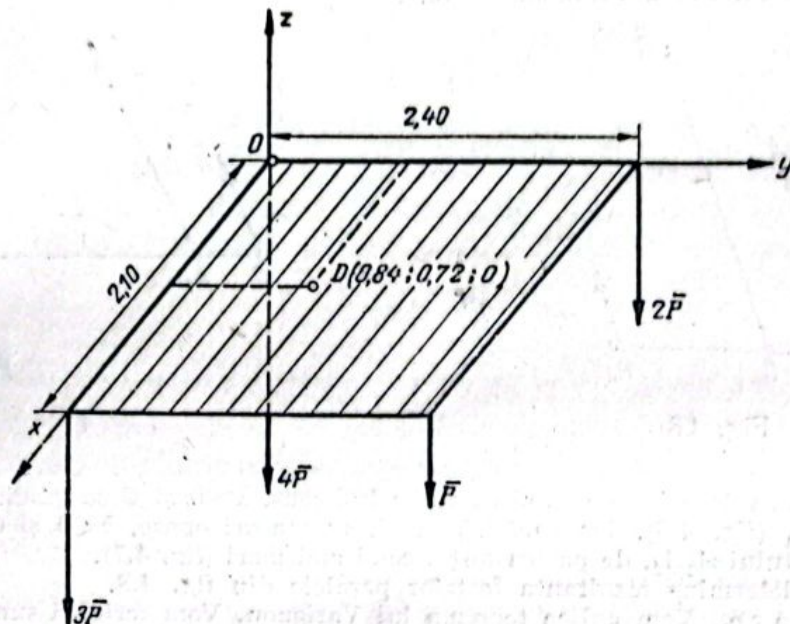


Fig. 4.9

Rezolvare. Tensiunea din fir trebuie să echilibreze rezultanta celor patru forţe paralele. Rezultanta acţionează în centrul acestor forţe paralele, deci şi firul trebuie legat de placă în acest centru. Alegînd sistemul de axe din figură şi observînd că $z_0=z_A=z_B=z_C=0$, deducem $h=0$. Celelalte două coordonate ale centrului forţelor paralele vor fi

$$\xi=\frac{3\,P\times 2{,}10+P\times 2{,}10}{10\,P}=0{,}84\ \text{m},\quad \eta=\frac{P\times 2{,}40+2\,P\times 2{,}40}{10\,P}=0{,}72\ \text{m}.$$

Deci firul trebuie legat în punctul D (0,84; 0,72; 0).

7°. Să se determine poziţia suportului rezultantei forţelor paralele distribuite din fig. 4.10, *a*, *b*, *c*, *d*.

Rezolvare. Vom considera în toate cazurile sarcini elementare $p_x\mathrm{d}x$. Sumele din formulele ce dau coordonatele centrului forţelor paralele se vor transforma în integrale. În particular, pentru cazurile din fig. 4.10, vom avea

$$\xi=\frac{\int_0^a xp_x\mathrm{d}x}{\int_0^a p_x\mathrm{d}x}.$$

Pentru cazul din fig. 4.10, *a*, acela al unei sarcini uniform distribuite, avem $p_x=p$ (constant) şi

$$P=\int_0^a p_x\mathrm{d}x=\int_0^a p\mathrm{d}x=pa,\quad \xi=\frac{\int_0^a xp\mathrm{d}x}{\int_0^a p\mathrm{d}x}=\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a}{\left.x\right|_0^a}=\frac{\frac{a^2}{2}}{a}=\frac{a}{2}.$$

Deci o sarcină uniform distribuită este echivalentă cu o sarcină concentrată $P=pa$, aplicată la mijlocul porţiunii încărcate.

Pentru cazul din fig. 4.10, *b* (sarcină triunghiulară) $p_x = p\frac{x}{a}$ și rezultă

$$P = \int_0^a p_x \mathrm{d}x = \int_0^a p\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{p}{a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{pa}{2},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x \mathrm{d}x}{\int_0^a p_x \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x p\frac{x}{a}\mathrm{d}x}{\int_0^a p\frac{x}{a}\mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a} = \frac{2}{3}a.$$

Deci o sarcină distribuită triunghiular este echivalentă cu o sarcină concentrată $P = \frac{1}{2}pa$, *aplicată la o distanță de* $\frac{2}{3}a$ *de una din extremități și* $\frac{1}{3}a$ *de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.*

Pentru cazul din fig. 4.10, *c* (sarcină parabolică), $p_x = p\frac{x^2}{a^2}$ și rezultă

$$P = \int_0^a p_x \mathrm{d}x = \int_0^a p\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x = \frac{p}{a^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{pa}{3},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a x p_x \mathrm{d}x}{\int_0^a p_x \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a x p\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x}{\int_0^a p\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^a}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a} = \frac{3a}{4}.$$

Deci o sarcină parabolică de forma celei din fig. 4.10, c se poate înlocui cu o sarcină concentrată $P = \frac{pa}{3}$ *(a treia parte din aria dreptunghiului circumscris) și este aplicată la o distanță de* $\frac{3}{4}a$ *de una din extremități și* $\frac{a}{4}$ *de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.*

Pentru cazul din figura 4.10, *d* (sarcină parabolică) $p_x = \left[2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right]$ și rezultă

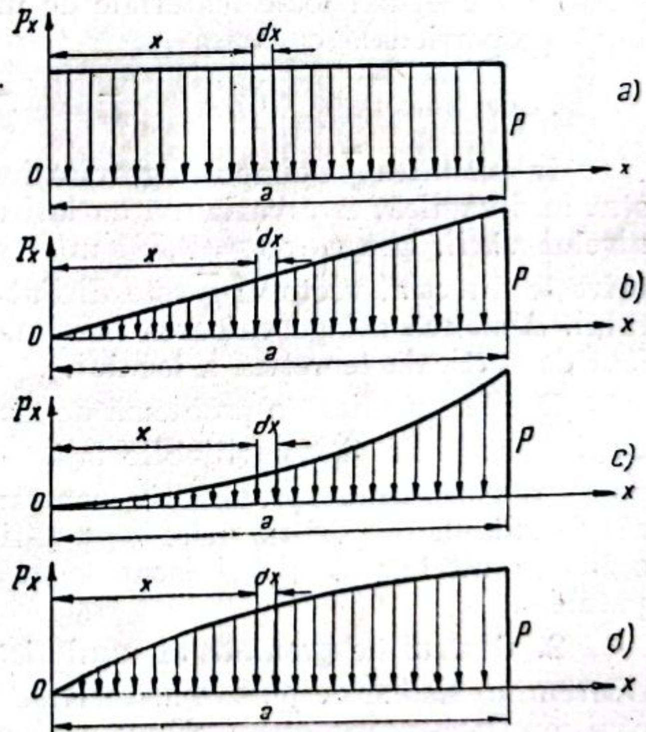


Fig. 4.10

$$p = \int_0^a p_x \mathrm{d}x = \int_0^a p\left[2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right]\mathrm{d}x = \frac{2p}{a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a - \frac{p}{a^2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{2pa}{3},$$

$$\xi = \frac{\int_0^a p_x x \,\mathrm{d}x}{\int_0^a p_x \mathrm{d}x} = \frac{\int_0^a p\left[2\frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2}\right]\mathrm{d}x}{\int_0^a p\left[2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right]\mathrm{d}x} = \frac{\frac{2p}{a}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a - \frac{p}{a^2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^a}{\frac{2pa}{3}} = \frac{5a}{8}.$$

Deci o sarcină parabolică de forma celei din fig. 4.10., d este echivalentă cu o sarcină concentrată $P=\frac{2}{3}pa$ *(două treimi din aria dreptunghiului circumscris) aplicată la o distanță de* $\frac{5}{8}a$ *de una din extremități și* $\frac{3}{8}a$ *de cealaltă extremitate a porțiunii încărcate.*

V. CENTRUL MASELOR
(Centrul de greutate)

§ 1. **Greutatea corpurilor.** Toate corpurile situate la suprafața Pămîntului sînt grele, adică sînt supuse unei forțe numită *greutate*. Aceasta dovedeşte că la suprafaţa Pămîntului există un cîmp de intensitate $\bar{g}$; acest cîmp poartă numele de cîmp gravitaţional terestru şi se manifestă prin aceea că asupra unei particule materiale de masă m se exercită în acest cîmp o forţă proporţională cu masa

$$\bar{G}=m\,\bar{g}. \tag{5.1}$$

Intensitatea $\bar{g}$ a cîmpului gravitaţional terestru, aşa cum se va demonstra în dinamică, este variabilă cu latitudinea şi cu altitudinea. Astfel, la nivelul mării, la ecuator $g=9{,}781$ m/s² şi la pol $g=9{,}831$ m/s². În ceea ce priveşte direcţia, vectorul $\bar{g}$ este dirijat aproximativ către centrul Pămîntului. Abaterea atinge valoarea maximă de circa 6′ la latitudinea de 45° faţă de verticala teoretică a locului.

Dacă se studiază o problemă de mecanică care afectează o regiune ale cărei dimensiuni sînt neglijabile faţă de acelea ale Pămîntului, cîmpul $\bar{g}$ poate fi considerat aproximativ constant. Ca o consecinţă, greutăţile $\bar{G}_i$ ale diferitelor corpuri de mase m_i pot fi socotite *forţe paralele* şi li se pot aplica rezultatele studiului făcut în capitolul precedent relativ la forţele paralele.

§ 2. **Centrul de greutate al unui sistem de puncte materiale.** Să considerăm un sistem de puncte materiale P_i de mase m_i. Fie $\bar{r}_i$ vectorii lor de poziţie. Dacă presupunem că un asemenea sistem se găseşte la suprafaţa Pămîntului, deci în cîmpul gravitaţional terestru, şi are dimensiuni neglijabile în raport cu ale Pămîntului, atunci greutăţile punctelor materiale P_i sînt paralele între ele şi egale cu

$$\bar{G}_i=m_i\bar{g}.$$

Aplicînd în acest caz rezultatele stabilite la cap. IV, § 10, ajungem uşor la concluzia că sistemul de forţe $\bar{G}_i$ poate fi înlocuit cu o forţă unică

$$\bar{G}=\sum\bar{G}_i=\sum m_i\bar{g}=M\bar{g} \tag{5.2}$$

denumită greutatea sistemului de puncte materiale (*greutatea corpului*). În formula (5.2) s-a notat

$$\sum m_i = M \tag{5.3}$$

M fiind *masa sistemului de puncte materiale*.

Rezultanta $\overline{G}$ a forțelor $\overline{G}_i$ este aplicată în centrul acestor forțe. *Centrul forțelor $\overline{G}_i$ este, prin definiție, centrul de greutate al sistemului de puncte materiale*. Poziția lui este dată de vectorul de poziție [v. cap IV, § 10, formula (4.25)]

$$\overline{\rho} = \frac{\sum G_i \overline{r}_i}{\sum G_i}. \tag{5.4}$$

Dar

$$G_i = m_i g$$

și relația (5.4) devine

$$\overline{\rho} = \frac{\sum m_i g \overline{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{g \sum m_i \overline{r}_i}{g \sum m_i} = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{\sum m_i}. \tag{5.5}$$

Coordonatele centrului de greutate vor fi

$$\xi = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \tag{5.6}$$

§ 3. Centrul maselor. Analizînd formulele (5.5) și (5.6) se poate trage concluzia că poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale depinde exclusiv de distribuția maselor m_i. Deci, centrul de greutate poate fi considerat ca un element *geometric* al sistemului de puncte materiale și ar putea fi definit independent de greutatea punctelor materiale care alcătuiesc sistemul, ca fiind punctul al cărui vector de poziție este dat de (5.5)

$$\overline{\rho} = \frac{\sum m_i \overline{r}_i}{\sum m_i}.$$

În modul acesta se ajunge la o noțiune mai cuprinzătoare, aceea de *centru al maselor*, care are sens (spre deosebire de centrul de greutate) chiar la corpuri care nu sînt situate la suprafața Pămîntului. Astfel, se poate vorbi de centrul maselor în cazul sistemului solar; folosirea denumirii de centru de greutate ar fi improprie pentru acest din urmă caz.

§ 4. Proprietățile centrului de greutate. a) *Centrul de greutate se găsește în interiorul oricărei suprafețe convexe* (σ) *care conține în interiorul ei toate punctele sistemului*.

Într-adevăr să considerăm planul (II) tangent suprafeței (σ) într-un punct oarecare P. Suprafața (σ) fiind convexă se găsește în întregime de

aceeaşi parte a planului (Π). Să alegem un sistem de axe astfel încît planul xOy să coincidă cu planul (Π) iar sensul pozitiv al axei Oz să fie către regiunea din spaţiu în care se găseşte suprafaţa (σ). Atunci cotele z_i ale tuturor punctelor sistemului sînt pozitive. Rezultă $\sum m_i z_i > 0$ şi $\zeta = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} > 0$, deci centrul de greutate al sistemului se află de aceeaşi parte a planului tangent ca şi suprafaţa (σ). Cum punctul P este un punct oarecare pe suprafaţa (σ) rezultă că centrul de greutate trebuie să se găsească în interiorul suprafeţei.

b) *Dacă punctele unui sistem se află pe o linie dreaptă, centrul de greutate se află pe acea dreaptă.* Într-adevăr, considerînd un sistem de axe a cărui axă Ox coincide cu dreapta dată, rezultă $y_i=0$, $z_i=0$, deci $\sum m_i y_i=0$, $\sum m_i z_i=0$ şi prin urmare $\eta=0$ şi $\zeta=0$, ceea ce justifică afirmaţia.

c) *Dacă punctele unui sistem se află într-un plan, centrul de greutate al sistemului se află în acel plan.* Într-adevăr, considerînd un triedru ale cărui axe Ox şi Oy să fie în planul dat, rezultă $z_i=0$ deci $\sum m_i z_i=0$ şi $\zeta=0$, ceea ce justifică afirmaţia făcută.

d) *Dacă un sistem de puncte materiale admite un plan* (Π) *diametral conjugat în raport cu o direcție* (Δ), *centrul de greutate se găseşte în planul* (Π). Un sistem de puncte materiale admite un plan diametral conjugat unei direcţii dacă se bucură de proprietatea că la fiecare punct P_i de masă m_i corespunde întotdeauna un punct P_j de aceeaşi masă, astfel încît dreapta P_iP_j este paralelă cu (Δ) şi mijlocul segmentului P_iP_j se află în planul (Π).

În particular, dacă direcţia (Δ) este normală pe planul (Π) acesta din urmă poartă numele de *plan de simetrie*.

Să demonstrăm acum teorema. Pentru aceasta să presupunem un triedru $Oxyz$ avînd axele Ox şi Oy în planul (Π). Faţă de planul (Π) punctele sistemului se împart în trei grupe:

— Puncte P_i situate de o parte a planului (Π) pentru care $z_i>0$.

— Puncte P_j situate de partea cealaltă a planului (Π) pentru care $z_j<0$.

— Puncte P_k situate, eventual, chiar în planul (Π) pentru care $z_k=0$.

Dat fiind caracterul particular al sistemului rezultă $z_i=-z_j$ şi $m_i=m_j$. Atunci, pentru întregul sistem

$$\sum m_\nu z_\nu = \sum m_i z_i + \sum m_j z_j + \sum m_k z_k = \sum m_i z_i - \sum m_i z_i = 0$$

căci $\sum m_j z_j = -\sum m_i z_i$, iar $\sum m_k z_k = 0$. Rezultă atunci $\zeta=0$ ceea ce justifică teorema.

e) *Dacă un sistem de puncte materiale admite o axă de simetrie* (*sau un centru de simetrie*), *centrul de greutate al sistemului se află pe acea axă* (*respectiv în acel centru*). Într-adevăr să presupunem că Oz este axa de simetrie. Se înţelege prin aceasta că la un punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i corespunde întotdeauna un punct $P_j(-x_i, -y_i, z_i)$ de aceeaşi masă m_i. Urmînd calea de la punctul d) se poate arăta că $\sum m_\nu x_\nu=0$, şi $\sum m_\nu y_\nu=0$, deci $\xi=\zeta=0$ ceea ce justifică teorema.

În cazul cînd sistemul are un centru de simetrie vom presupune că originea triedrului de referinţă se află în acest punct. Din condiţia de sime-

trie rezultă că la un punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$ de masă m_i corespunde un punct $P_j(-x_i, -y_i, -z_i)$ de aceeaşi masă m_i. Procedînd analog ca mai sus se deduce în acest caz $\sum m_\nu x_\nu=0$, $\sum m_\nu y_\nu=0$, $\sum m_\nu z_\nu=0$ deci $\xi=\eta=\zeta=0$ ceea ce justifică teorema.

f) *Dacă un sistem de puncte materiale* (S) *se compune dintr-un număr* p *de sisteme* (S_1), (S_2), ..., (S_n) *ale căror mase* M_1, M_2, ..., M_p *şi centre de greutate* C_1, C_2, ..., C_p *se cunosc, poziţia centrului său de greutate se poate determina cu formula*

$$\bar{\rho}=\frac{M_1\bar{\rho}_1+M_2\bar{\rho}_2+\cdots M_p\bar{\rho}_p}{M_1+M_2+\cdots+M_p}. \tag{5.7}$$

Într-adevăr, pentru sistemele (S_1), (S_2), ..., (S_p) rezultă relaţiile

$$\bar{\rho}_1=\frac{\sum\limits_{(S_1)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_1)} m_i},\quad \bar{\rho}_2=\frac{\sum\limits_{(S_2)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_2)} m_i},\ldots,\bar{\rho}_p=\frac{\sum\limits_{(S_p)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_p)} m_i},$$

care mai pot fi scrise

$$\sum_{(S_1)} m_i\bar{r}_i=M_1\bar{\rho}_1,\quad \sum_{(S_2)} m_i\bar{r}_i=M_2\bar{\rho}_2,\ldots,\quad \sum_{(S_p)} m_i\bar{r}_i=M_p\bar{\rho}_p.$$

Apoi pentru sistemul (S)

$$\bar{\rho}=\frac{\sum\limits_{(S)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S)} m_i}=\frac{\sum\limits_{(S_1)} m_i\bar{r}_i+\sum\limits_{(S_2)} m_i\bar{r}_i+\cdots+\sum\limits_{(S_p)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_1)} m_i+\sum\limits_{(S_2)} m_i+\cdots+\sum\limits_{(S_p)} m_i}=\frac{M_1\bar{\rho}_1+M_2\bar{\rho}_2+\cdots+M_p\bar{\rho}_p}{M_1+M_2+\cdots+M_p},$$

astfel încît teorema este demonstrată.

g) *Dacă un sistem de puncte materiale* (S) *poate fi considerat ca rezultînd dintr-un sistem* (S_1) *din care lipseşte un sistem* (S_2) *şi dacă se cunosc masele* M_1 *şi* M_2 *şi centrele de greutate* C_1 *şi* C_2 *ale acestor două sisteme, atunci vectorul de poziţie al centrului de greutate* C *al sistemului* (S) *se poate determina cu formula*

$$\bar{\rho}=\frac{M_1\bar{\rho}_1-M_2\bar{\rho}_2}{M_1-M_2} \tag{5.8}$$

Demonstraţia este analogă celei de la punctul precedent. Referitor la sistemele (S_1) şi (S_2) putem scrie

$$\bar{\rho}_1=\frac{\sum\limits_{(S_1)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_1)} m_i}\quad \text{şi}\quad \bar{\rho}_2=\frac{\sum\limits_{(S_2)} m_i\bar{r}_i}{\sum\limits_{(S_2)} m_i},$$

relații care mai pot fi scrise încă:

$$\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i = M_1 \bar{\rho}_1, \quad \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i = M_2 \bar{\rho}_2.$$

Apoi, pentru sistemul (S)

$$\bar{\rho} = \frac{\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S)} m_i} = \frac{\left(\sum_{(S)} m_i \bar{r}_i + \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i\right) - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\left(\sum_{(S)} m_i + \sum_{(S_2)} m_i\right) - \sum_{(S_2)} m_i} = \frac{\sum_{(S_1)} m_i \bar{r}_i - \sum_{(S_2)} m_i \bar{r}_i}{\sum_{(S_1)} m_i - \sum_{(S_2)} m_i} = \frac{M_1 \bar{\rho}_1 - M_2 \bar{\rho}_2}{M_1 - M_2}.$$

§ 5. **Moment static.** Se numește moment static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan (Π) suma produselor dintre masele punctelor materiale care alcătuiesc sistemul și distanțele de la aceste puncte la planul (Π).

Planul (Π) împarte spațiul în două semispații. Se convine ca distanțele de la punctele sistemului la planul (Π) să fie socotite *pozitive*, atunci cînd punctele se află într-unul dintre semispații și *negative* cînd se află în celălalt semispațiu.

Dacă se consideră planele formate de axele de coordonate Ox, Oy, Oz atunci sumele

$$\sum m_i x_i, \quad \sum m_i y_i, \quad \sum m_i z_i$$

reprezintă momentele statice ale sistemului de puncte materiale respectiv în raport cu planele yOz, zOx, xOy.

Din formulele (5.6) care dau coordonatele centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale deducem

$$\left.\begin{aligned} \sum m_i x_i &= \xi \sum m_i = M \cdot \xi \\ \sum m_i y_i &= M \eta \\ \sum m_i z_i &= M \zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Aceste relații permit formularea teoremei generale a momentelor statice:

Momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este egal cu produsul dintre masa întregului sistem și distanța de la centrul de greutate al sistemului la acel plan.

O b s e r v a ț i e. Rezultă din această teoremă că pentru calculul momentelor statice, un sistem de puncte materiale poate fi redus la un punct material, centrul de greutate, în care s-a concentrat întreaga masă a sistemului.

O consecință a teoremei momentelor statice este următoarea:

Dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu un plan este nul, centrul de greutate al sistemului se găsește în acel plan.

Într-adevăr momentul static fiind egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul de greutate al sistemului la plan, cum masa sistemului nu este nulă, rezultă că distanța este nulă, adică centrul de greutate se găsește în plan.

În cazul cînd sistemul de puncte materiale este plan se definește ca moment static în raport cu o axă din plan, suma produselor dintre masele punctelor materiale ale sistemului și distanțele lor la axă. Axa împarte planul în două semiplane. Se convine ca distanțele să fie socotite pozitive cînd punctele sistemului se găsesc într-unul din semiplane și negative cînd se găsesc în celălalt semiplan. Dacă planul în care se găsește sistemul de puncte materiale este planul xOy, atunci sumele $\sum m_i x_i$ și $\sum m_i y_i$ reprezintă momentele statice în raport cu axele Oy și respectiv Ox.

Teorema enunțată pentru cazul sistemelor spațiale se regăsește și în cazul sistemelor plane sub forma: *momentul static al unui sistem plan de puncte materiale în raport cu o axă din planul sistemului este egal cu produsul dintre masa sistemului și distanța de la centrul de greutate al sistemului la acea dreaptă.*

De asemenea corolarul ei:

dacă momentul static al unui sistem de puncte materiale în raport cu o dreaptă din planul său este nul, centrul de greutate al sistemului se găsește pe acea dreaptă.

Demonstrațiile sînt analoge.

§ 6. **Centrele de greutate ale corpurilor.** Un corp material poate fi conceput ca un sistem cu foarte multe puncte materiale. Mai comod pentru calcule este să se folosească conceptul de *mediu continuu.* În baza acestui concept se admite că nu există în interiorul unui corp nici un volum, oricît de mic, în care să nu se găsească materie. Să considerăm un volum foarte mic Δv_i din corp și să notăm cu Δm_i masa sa. Centrul de greutate al acestui volum C_i este situat în interiorul său. Să notăm cu $\bar{r}_i$ vectorul lui de poziție. Vectorul de poziție al centrului de greutate al întregului corp este

$$\bar{\rho}=\frac{\sum \bar{r}_i\,\Delta m_i}{\sum \Delta m_i}\,.$$

Făcînd pe Δv_i să tindă către zero și Δm_i va tinde către zero, iar numărul volumelor va tinde către ∞; atunci sumele $\Sigma \bar{r}_i\,\Delta m_i$ și $\Sigma \Delta m_i$ vor tinde respectiv către $\int \bar{r}\,dm$ și $\int dm$, integralele fiind extinse la intregul corp Prin. urmare

$$\bar{\rho}=\frac{\int \bar{r}\,dm}{\int dm}\,. \qquad (5.10)$$

Coordonatele centrului de greutate vor fi

$$\xi=\frac{\int x\,dm}{\int dm}\,,\quad \eta=\frac{\int y\,dm}{\int dm}\,,\quad \zeta=\frac{\int z\,dm}{\int dm}\,. \qquad (5.11)$$

§ 7. Masă specifică. Corpuri omogene. Centre de greutate geometrice. Să considerăm volumul foarte mic Δv_i a cărui masă am notat-o cu Δm_i şi raportul

$$\frac{\Delta m_i}{\Delta v_i}.$$

Vom numi acest raport *densitate medie* sau *masă specifică medie* a volumului Δv_i. Să facem acum $\Delta v_i \to 0$. Atunci şi $\Delta m_i \to 0$ şi raportul de mai înainte va tinde în general către o valoare limită pe care o notăm cu

$$\mu = \frac{dm}{dv} \tag{5.12}$$

şi o numim *densitate* sau *masă specifică a corpului* în punctul considerat. Mărimea μ definită de relaţia (5.12) are întotdeauna o valoare finită şi pozitivă.

Cunoscînd legea de variaţie a masei specifice $\mu = \mu(x, y, z)$ în interiorul unui corp se poate calcula masa sa cu formula

$$M = \int dm = \int \mu dv. \tag{5.13}$$

În cazul cînd densitatea μ este aceeaşi în toate punctele unui corp se zice că acel corp este *omogen*, de exemplu un corp executat din acelaşi material. În cazul unui corp omogen vectorul de poziţie al centrului de greutate este dat de expresia

$$\bar{\rho} = \frac{\int \bar{r} \mu\, dv}{\int \mu\, dv} = \frac{\mu \int \bar{r}\, dv}{\mu \int dv} = \frac{\int \bar{r}\, dv}{\int dv}. \tag{5.14}$$

Coordonatele sale sînt date de formulele

$$\xi = \frac{\int x\, dv}{\int dv}, \quad \eta = \frac{\int y\, dv}{\int dv}, \quad \zeta = \frac{\int z\, dv}{\int dv}. \tag{5.15}$$

În cazul cînd corpul are una dintre dimensiuni — grosimea — foarte mică în raport cu celelalte două, se numeşte *placă*. În cazul plăcilor se ia în consideraţie *densitatea superficială* sau *masa specifică superficială* într-un punct, definită ca limita către care tinde raportul dintre masa Δm_i şi suprafaţa ΔA_i a unui element de placă, cînd $\Delta A_i \to 0$, adică

$$\mu' = \lim_{\Delta A_i \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta A_i} = \frac{dm}{dA}. \tag{5.16}$$

Ca şi mai înainte, cunoaşterea legii de variaţie a densităţii superficiale permite să se determine masa M a plăcii cu formula

$$M = \int \mu' dA. \tag{5.17}$$

În cazul cînd $\mu' = \text{const}$, placa se zice omogenă. Aceasta se realizează de exemplu în cazul unei plăci executate din acelaşi material şi avînd gro-

sime uniformă. Poziția centrului de greutate este determinată atunci prin vectorul

$$\bar{\rho}=\frac{\int \bar{r}\,dA}{\int dA}, \tag{5.18}$$

iar coordonatele sale sînt

$$\xi=\frac{\int x\,dA}{\int dA}, \quad \eta=\frac{\int y\,dA}{\int dA}, \quad \zeta=\frac{\int z\,dA}{\int dA}. \tag{5.19}$$

În cazul cînd corpul material este o bară (sau un fir), adică secțiunea sa transversală are dimensiuni neglijabile în raport cu lungimea, se definește densitatea liniară sau masa specifică liniară într-un punct ca fiind limita raportului dintre masa Δm_i și lungimea Δs_i a unui element de bară

$$\mu''=\lim_{\Delta s_i\to 0}\frac{\Delta m_i}{\Delta s_i}=\frac{dm}{ds}. \tag{5.20}$$

Cunoscînd legea de variație a densității liniare în lungul barei $\mu''=\mu''(s)$ se poate calcula masa barei cu formula

$$M=\int \mu''\,ds. \tag{5.21}$$

In cazul cînd $\mu''=\text{const}$, bara se zice omogenă: de exemplu cazul unei bare executate din același material și avînd secțiunea transversală constantă. În cazul barelor omogene poziția centrului de greutate este determinată prin vectorul de poziție

$$\bar{\rho}=\frac{\int \bar{r}\,ds}{\int ds}, \tag{5.22}$$

iar coordonatele sale sînt date de formulele

$$\xi=\frac{\int x\,ds}{\int ds}, \quad \eta=\frac{\int y\,ds}{\int ds}, \quad \zeta=\frac{\int z\,ds}{ds}. \tag{5.23}$$

Analizînd formulele (5.14), (5.18) și (5.22) valabile respectiv pentru corpuri omogene, plăci omogene și bare omogene se constată că în ele nu intervine masa corpului, ci volume, arii și lungimi. În modul acesta se ajunge la noțiunea de *centru de greutate geometric*.

În multe probleme apar aceste centre de greutate geometrice. Legătura cu centrul de greutate al unui corp este aceea că poziția centrului de greutate geometric coincide cu aceea a centrului de greutate al unui corp, plăci sau bare omogene. Centrul de greutate geometric poate fi definit însă și ca atare, adică prin formulele (5.14), (5.18), (5.22).

Aplicații. 1°. *Bară rectilinie omogenă.* Mijlocul barei este centrul de simetrie, deci centrul de greutate, trebuind să coincidă cu centrul de simetrie, va fi la mijlocul barei.

2°. *Bară omogenă în formă de arc de cerc* (fig. 5.1). Notăm unghiul la centru al arcului cu 2α și raza cu R. Alegem ca axă Ox bisectoarea unghiului, iar axa Oy în planul arcului.

Bara fiind plană $\zeta=0$. Axa Ox fiind axă de simetrie $\eta=0$. Pentru determinarea abscisei ξ se aplică formula (5.23)

$$\xi=\frac{\int x\,ds}{\int dx}.$$

Elementul de arc $ds=R\,d\theta$, iar $x=R\cos\theta$. Rezultă

$$\xi=\frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\cos\theta\cdot R\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R\,d\theta}=\frac{R\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha}d\theta}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

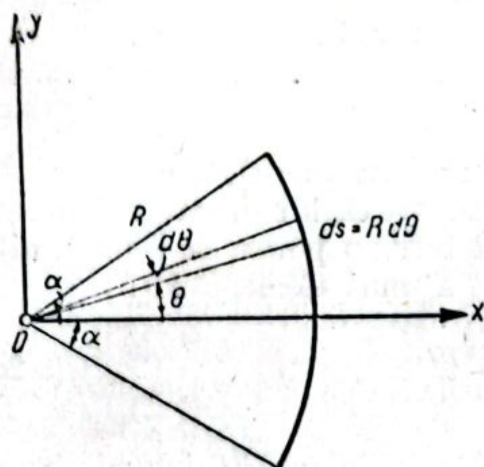


Fig. 5.1

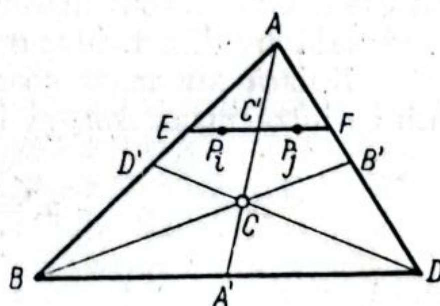


Fig. 5.2

3°. *Placă omogenă dreptunghiulară*. Punctul de intersecție al diagonalelor este centrul de simetrie pentru dreptunghi. Deci centrul de greutate al unei plăci omogene dreptunghiulare este în punctul de intersecție al diagonalelor.

4°. *Placă omogenă triunghiulară* (fig. 5.2). Placa are trei plane diametral conjugate direcțiilor laturilor triunghiului și anume planele care conțin medianele triunghiului.

Într-adevăr fie (Π) unul dintre plane, care conține de exemplu mediana AA'. Fie EF un segment de dreaptă paralel cu BD. Acest segment este împărțit în două părți egale de mediana AA'. Rezultă $EC'=C'F$. Oricărui punct P_i de pe segmentul EC' îi corespunde un punct P_j pe segmentul $C'F$ de aceeași masă și astfel încît $P_iP_j \parallel BD$ și $P_iC'=C'P_j$. Planul Π este deci un plan diametral conjugat direcției BD.

Centrul de greutate al plăcii va trebui să se găsească deci în planul (Π). Pentru că placa triunghiulară este plană, centrul de greutate trebuie să se găsească în planul ABD, deci pe mediana AA'. Utilizînd același raționament pentru celelalte două plane diametrale, se ajunge la concluzia că centrul de greutate al unei plăci omogene triunghiulare este la intersecția medianelor sale.

5°. *Placă omogenă în formă de sector circular*. Notăm unghiul la centru cu 2α și raza cu R (fig. 5.3). Bisectoarea unghiului este axă de simetrie. O alegem ca axă Ox, axa Oy fiind în planul figurii. Rezultă $\zeta=0$, $\eta=0$ iar pentru ξ folosim formula (5.19)

$$\xi=\frac{\int x\,dA}{\int dA}.$$

Folosind coordonatele polare $x=\rho\cos\theta$ și $dA=\rho\,d\rho\,d\theta$ încît

$$\xi=\frac{\iint \rho\cos\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta}{\iint \rho\,d\rho\,d\theta}=\frac{\int_0^R \rho^2 d\rho\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_0^R \rho\,d\rho\int_{-\alpha}^{+\alpha}d\theta}=\frac{\frac{R^3}{3}\cdot 2\sin\alpha}{\frac{R^2}{2}\cdot 2\alpha}=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

În cazul unui semicerc $\alpha=\frac{\pi}{2}$ și rezultă

$$\xi=\frac{4R}{3\pi}.$$

6°. *Placă omogenă sferică.* Să considerăm o porţiune $ABCD$ dintr-o sferă de rază R mărginită de două cercuri meridiane şi de două cercuri paralele. Vom presupune că unul dintre meridiane este chiar în planul xOz (fig. 5.4), ceea ce nu particularizează problema. Vom aplica formulele (5.19) observînd că, dacă se folosesc drept coordonate longitudinea θ şi latitudinea φ, atunci

$$x=R\cos\varphi\cos\theta,\ y=R\cos\varphi\sin\theta;\ z=R\sin\varphi \text{ şi } dA=R^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

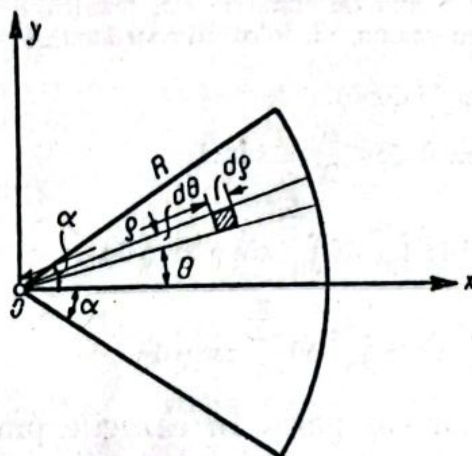


Fig. 5.3

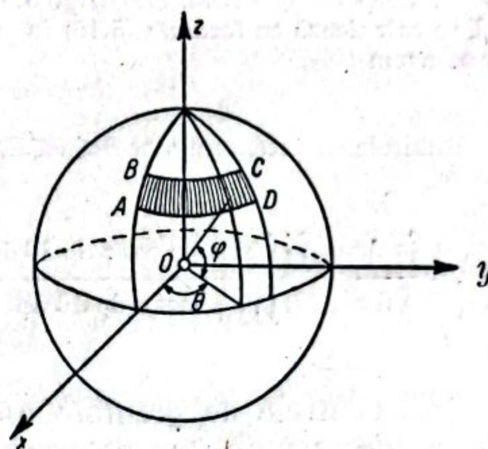


Fig. 5.4

Formulele (5.19) devin

$$\xi=\frac{\int x\,dA}{\int dA}=\frac{\iint R^3\cos^2\varphi\cos\theta\, d\varphi\, d\theta}{\iint R^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta}=R\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\theta}\cos\theta\, d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\, d\varphi\int_0^{\theta}d\theta}=$$

$$=\frac{R}{2}\cdot\frac{\sin\theta\left[\varphi_2-\varphi_1+\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]}{\theta(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)}$$

$$\eta=\frac{\int y\,dA}{\int dA}=\frac{\iint R^3\cos^2\varphi\sin\theta\, d\varphi\, d\theta}{\iint R^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta}=\frac{R\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\, d\varphi\int_0^{\theta}d\theta}=$$

$$=\frac{R}{2}\cdot\frac{(1-\cos\theta)\left[\varphi_2-\varphi_1+\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]}{\theta(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)}$$

$$\zeta=\frac{\int z\,dA}{\int dA}=\frac{\iint R^3\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta}{\iint R^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta}=R\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\int_0^{\theta}d\theta}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta\int_0^{\theta}d\theta}=$$

$$=\frac{R}{2}\cdot\frac{\sin^2\varphi_2-\sin^2\varphi_1}{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}=\frac{R}{2}(\sin\varphi_2+\sin\varphi_1).$$

Dînd valori particulare limitelor de integrare θ, φ_1 şi φ_2 obţinem cazul diferitelor plăci sferice. Pentru $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ obţinem un octant sferic, mărginit de ecuator şi de două meridiane. Aplicînd formulele de mai sus, coordonatele centrului său de greutate vor fi

$$\xi=\frac{R}{2},\ \eta=\frac{R}{2},\ \zeta=\frac{R}{2},$$

adică centrul de greutate se va găsi pe intersecția celor trei plane bisectoare ale diedrelor unghiului solid corespunzător octantului la distanța $R\sqrt{3}/2$ de centrul sferei.

Pentru $\theta=2\pi$ se obține o zonă sferică. Coordonatele centrului ei de greutate vor fi

$$\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=\frac{R}{2}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2),$$

adică centrul de greutate se află pe axa de simetrie (Oz) la mijlocul înălțimii zonei.

7°. *Corp omogen semisferic* (fig. 5.5). Avînd o axă de simetrie Oz, rezultă $\xi=\eta=0$. Cota ζ se calculează cu formula (5.15) în care ținem seama că, folosind coordonatele sferice ρ, θ, φ, avem

$$z=\rho\sin\varphi,\ dv=\rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Limitele de integrare sînt $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. Atunci

$$\zeta=\frac{\int z\, dv}{\int dv}=\frac{\iiint \rho^3\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}{\iiint \rho^2\cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi}=\frac{\int_0^R\rho^3 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\int_0^R\rho^2 d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi}=\frac{3R}{8}.$$

§ 8. Centrele de greutate ale figurilor compuse. În cazurile practice se pune adesea problema determinării centrului de greutate al unei figuri care poate fi descompusă în două sau mai multe figuri simple, ale căror centre de greutate se cunosc. Se poate arăta că în acest caz nu este necesar să se utilizeze calculul integral, ci se pot folosi rezultatele deja obținute pentru figurile simple componente.

Într-adevăr, așa cum s-a arătat (§ 5) momentul static al unui corp nu se modifică, dacă acesta se înlocuiește cu centrul său de greutate, în care s-a concentrat întreaga masă a corpului.

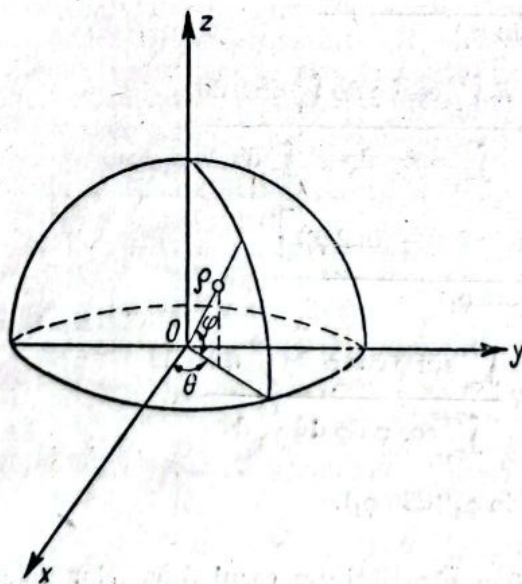


Fig. 5.5

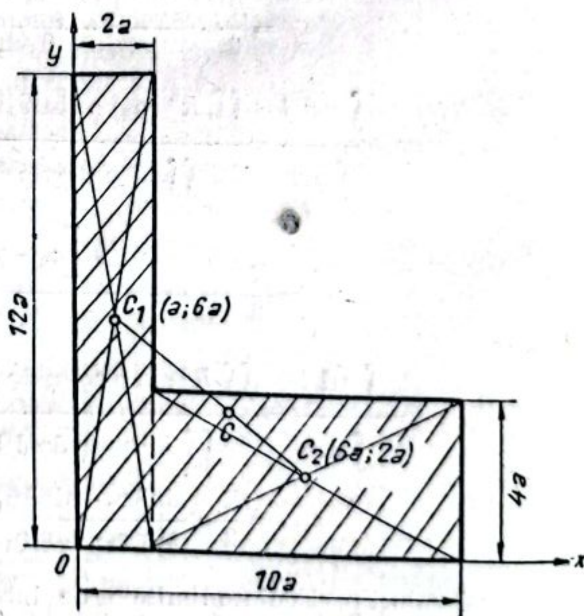


Fig. 5.6

De aici rezultă următorul procedeu practic pentru determinarea centrului de greutate al unei figuri compuse: se descompune această figură în figuri simple. În centrul de greutate al fiecărei figuri se concentrează masa

ei. Se obţine astfel un sistem de puncte materiale. Centrul de greutate al acestui sistem coincide cu centrul de greutate al figurii compuse.

În cazul cînd figura compusă rezultă prin eliminarea unei figuri simple, atunci în centrul de greutate al acesteia se va concentra o masă negativă egală cu masa figurii simple.

Aplicaţii. 8°. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene avînd forma şi dimensiunile din fig. 5.6.

Rezolvare. Placa poate fi descompusă în două plăci dreptunghiulare, ale căror centre de greutate C_1 şi C_2 se cunosc. În raport cu sistemul de axe ales, coordonatele acestor centre de greutate sînt $C_1(a; 6a)$ şi $C_2(6a; 2a)$. Ariile celor două plăci dreptunghiulare sînt $A_1=2a\times 12a=24a^2$ şi $A_2=8a\times 4a=32a^2$. Rezultă atunci următoarele coordonate pentru centrul de greutate al întregii figuri:

$$\xi=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A_1+A_2}=\frac{24\,a^2\cdot a+32\,a^2\cdot 6\,a}{24\,a^2+32\,a^2}\approx 3{,}86\,a,$$

$$\eta=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=\frac{24\,a^2\cdot 6\,a+32\,a^2\cdot 2\,a}{24\,a^2+32\,a^2}\approx 3{,}71\,a.$$

9°. Să se determine centrul de greutate al plăcii omogene avînd forma şi dimensiunile din fig. 5.7.

Rezolvare. Placa se compune dintr-o placă semicirculară de rază $2a$ căreia i se alipeşte o placă semicirculară de rază a şi din care se scoate o placă semicirculară de rază a. Centrul de greutate al unei plăci semicirculare se află pe axa de simetrie la distanţa $OC=\frac{4R}{3\pi}$ de centrul O al cercului din care face parte semicercul (vezi aplicaţia 18).

Folosind acest rezultat, deducem cu uşurinţă coordonatele centrelor de greutate C_1, C_2, C_3 ale celor trei semicercuri în raport cu sistemul de axe xOy şi anume

$$C_1\left(2a,\ \frac{8\,a}{3\pi}\right),\ C_2\left(3\,a,\ -\frac{4\,a}{3\pi}\right),\ C_3\left(a,\ \frac{4\,a}{3\pi}\right).$$

Ariile respective vor fi

$$A_1=\frac{\pi(2\,a)^2}{2}=2\,\pi a^2,\ A_2=\frac{\pi a^2}{2},\ \ A_3=-\frac{\pi a^2}{2}.$$

Aria A_3 s-a luat cu semnul minus, deoarece acest semicerc lipseşte. Obţinem pentru coordonatele centrului de greutate al plăcii haşurate

$$\xi=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{A_1+A_2+A_3}=$$

$$=\frac{2\pi a^2\cdot 2\,a+\frac{\pi\,a^2}{2}\cdot 3a-\frac{\pi\,a^2}{2}\cdot a}{2\,\pi a^2+\frac{\pi\,a^2}{2}-\frac{\pi a^2}{2}}=\frac{5\,a}{2}=2{,}5a,$$

$$\eta=\frac{A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3}{A_1+A_2+A_3}=$$

$$=\frac{2\pi a^2\frac{8\,a}{3\pi}+\frac{\pi\,a^2}{2}\cdot\left(-\frac{4\,a}{3\pi}\right)+\left(-\frac{\pi a^2}{2}\right)\frac{4\,a}{3\pi}}{2\,\pi\,a^2+\frac{\pi a^2}{2}-\frac{\pi a^2}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}a\approx 0{,}64\,a.$$

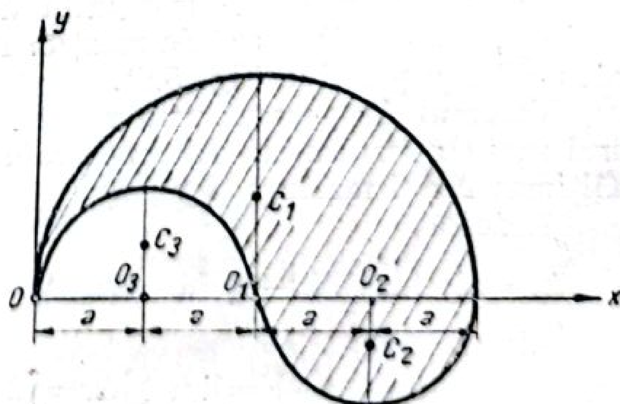


Fig. 5.7

§ 9. Teoremele Guldin-Pappus. Teorema I. *Aria suprafeţei generate de un arc de curbă plană care se roteşte în jurul unei axe din planul curbei, arcul fiind situat în întregime de aceeaşi parte a axei, este egală cu lungimea*

arcului de curbă multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al curbei date, presupuse omogene.

Să raportăm arcul de curbă la sistemul de axe Oxy, axa Ox fiind axă de rotaţie (fig. 5.8). Vom presupune $y=f(x)$ ecuaţia curbei, $f(x)$ fiind o funcţie uniformă în intervalul (a, b). Un element de arc $MM'=\Delta s$ al curbei,

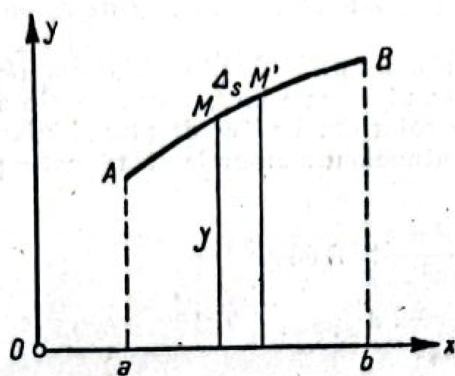


Fig. 5.8

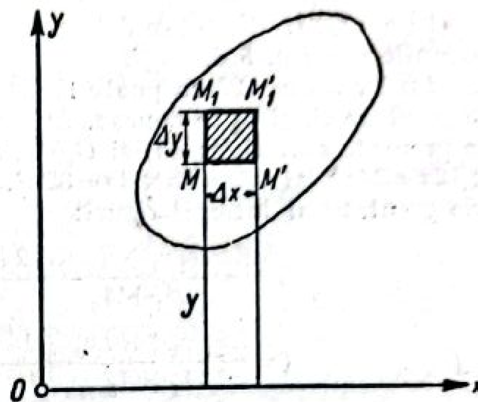


Fig. 5.9

generează prin rotaţie o suprafaţă care poate fi asimilată cu suprafaţa laterală a unui trunchi de con avînd generatoarea ds şi raza medie y. Rezultă aria:

$$\Delta A=2\pi y\Delta s$$

şi

$$A=\lim_{\Delta s\to 0}\Sigma\Delta A=2\pi\int y\,ds.$$

Dar $\int y\,ds=\eta l$, unde l este lungimea arcului de curbă dat, deci

$$A=2\pi\eta l. \tag{5.24}$$

T e o r e m a a II-a. *Volumul generat prin rotirea unei arii plane în jurul unei axe din planul ei, aria fiind în întregime situată de aceeaşi parte a axei, este egal cu aria considerată, multiplicată cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al ariei, presupusă omogenă.*

Să considerăm aria A mărginită de o curbă închisă raportată la axele Ox şi Oy, axa Ox fiind axă de rotaţie. Presupunem curba situată de partea ordonatelor y pozitive (fig. 5.9).

Volumul Δv generat prin rotirea elementului de arie $MM'M_1M_1'$ în jurul axei Ox rezultă din diferenţa volumelor generate de doi cilindri avînd înălţimea Δx şi razele y şi $y+\Delta y$.

Rezultă

$$\Delta v=\pi(y+\Delta y)^2dx-\pi y^2dx=2\pi y\Delta x\Delta y+\pi\Delta y^2\Delta x=2\pi y\Delta A+\pi\Delta y^2\Delta x.$$

Atunci

$$V=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\Delta v=\int 2\pi y\,dA=2\pi\int y\,dA.$$

Dar

$$\int y\,dA=\eta\cdot A,$$

încît

$$V=2\pi\eta\cdot A. \tag{5.25}$$

Observație. Teoremele Guldin-Pappus rămîn valabile și cînd rotația se face cu un unghi $\alpha<2\pi$, în care caz formulele (5.24) și (5.25) devin respectiv (α în radiani)

$$A=\alpha\cdot\eta\cdot l \quad \text{și} \quad V=\alpha\cdot\eta\cdot A.$$

Aceste teoreme servesc fie la determinarea ariilor și volumelor, fie la determinarea centrelor de greutate.

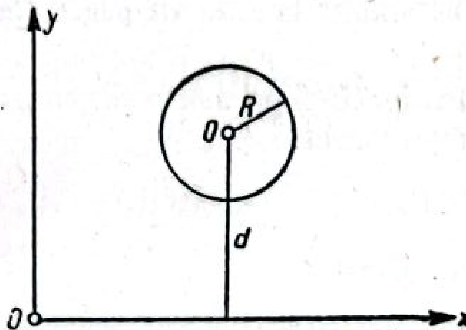


Fig. 5.10

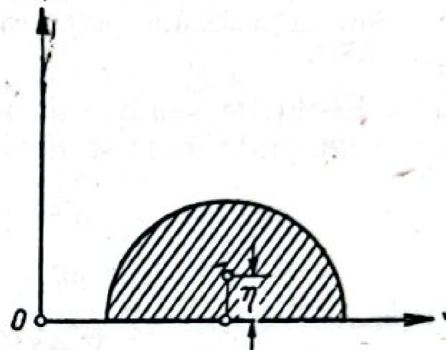


Fig. 5.11

Aplicații. 10°. Să se determine aria și volumul unui tor generat prin rotația unui cerc de rază R în jurul unei axe din planul său situată la distanța $d(d>R)$ de centrul cercului (fig. 5.10). Aplicînd formulele lui Guldin, obținem

$$A=2\,\pi d\cdot 2\,\pi R=4\,\pi^2 Rd,\ \ V=2\,\pi d\cdot\pi R^2=2\pi^2R^2d.$$

11°. Să se găsească poziția centrului de greutate al suprafeței unui semicerc (fig. 5.11). Prin rotire în jurul axei Ox semicercul generează o sferă. Volumul sferei se cunoaște: $V=\frac{4\,\pi\,R^3}{3}$. Aria semicercului este $A=\frac{\pi\,R^2}{2}$. Din a doua teoremă a lui Guldin deducem

$$\eta=\frac{V}{2\,\pi\,A}=\frac{\frac{4\,\pi\,R^3}{3}}{2\,\pi\cdot\frac{\pi\,R^2}{2}}=\frac{4\,R}{3\,\pi}.$$

VI. SOLIDUL RIGID LIBER

§ 1. Condițiile de echilibru ale unui sistem de forțe care acționează asupra unui solid rigid liber. S-a văzut că dacă un sistem de forțe, acționînd asupra unui solid rigid liber, are într-un punct din spațiu $\overline{\mathcal{R}}=0$ și $\overline{\mathcal{M}}_O=0$, sistemul este echivalent cu zero.

Se înțelege prin solid rigid liber un solid rigid care poate ocupa orice poziție în spațiu. Poziția pe care o ocupă este determinată de sistemul de forțe.

În cap. IV (§ 6) s-a arătat că dacă un sistem de forțe are $\overline{\mathcal{R}}=0$ și $\overline{\mathcal{M}}_O=0$, el este echivalent cu zero. Deci condiția $\overline{\mathcal{R}}=0$, $\overline{\mathcal{M}}_O=0$ este suficientă pentru echilibru.

În Dinamică se arată că această condiție este și necesară.

Rezultă următoarea teoremă: *condiția necesară și suficientă ca un sistem de forțe, acționînd asupra unui solid rigid liber să fie în echilibru este ca, într-un punct arbitrar din spațiu*

$$\overline{\mathcal{R}}=0 \text{ și } \overline{\mathcal{M}}_O=0. \tag{6.1}$$

Observație. Punctul în care se scrie condiția (6.1) este arbitrar, căci dacă este îndeplinită într-un punct din spațiu, condiția este îndeplinită în orice alt punct din spațiu [cap. IV, (4.5)].

§ 2. Ecuațiile scalare de echilibru. Proiectînd pe axele de coordonate ecuațiile vectoriale (6.1) se obțin șase ecuații scalare

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0,$$

$$\mathfrak{M}_x=0,\ \mathfrak{M}_y=0,\ \mathfrak{M}_z=0.$$

Cum însă

$$X=\sum X_i,\ Y=\sum Y_i,\ Z=\sum Z_i$$

$$\mathfrak{M}_x=\sum(y_iZ_i-z_iY_i),\ \mathfrak{M}_y=\sum(z_iX_i-x_iZ_i),\ \mathfrak{M}_z=\sum(x_iY_i-y_iX_i).$$

Condițiile de echilibru se scriu

$$\left.\begin{array}{l}\sum X_i=0,\ \sum Y_i=0,\ \sum Z_i=0,\\ \sum(y_iZ_i-z_iY_i)=0,\ \sum(z_iX_i-x_iZ_i)=0,\ \sum(x_iY_i-y_iX_i)=0.\end{array}\right\} \tag{6.2}$$

În cazul sistemelor particulare de forțe numărul ecuațiilor de echilibru se reduce.

În cazul *sistemelor de forțe plane*, presupunînd că planul în care acționează forțele este planul xOy, rezultă că $Z_i=0$, $z_i=0$ și trei dintre ecuațiile (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn trei ecuații de echilibru și anume:

$$\sum X_i=0,\ \sum Y_i=0,\ \sum(x_iY_i-y_iX_i)=0, \tag{6.3}$$

adică două ecuații de proiecție în raport cu axele din plan și o ecuație de momente în raport cu axa normală pe plan.

În cazul *sistemelor de cupluri* primele trei ecuații din sistemul (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn trei ecuații scalare

$$\sum(y_iZ_i-z_iY_i)=0,\ \sum(z_iX_i-x_iZ_i)=0,\ \sum(x_iY_i-y_iX_i)=0, \tag{6.4}$$

adică ecuațiile de momente în raport cu trei axe.

În cazul sistemelor de forțe paralele, de exemplu cu axa Ox, rezultă $Y_i=0$, $Z_i=0$ și trei dintre ecuațiile (6.2) sînt identic satisfăcute. Rămîn numai trei ecuații

$$\sum X_i=0,\ \sum z_iX_i=0,\ \sum y_iX_i=0, \tag{6.5}$$

adică o ecuație de proiecție pe direcția forțelor și două ecuații de momente în raport cu axele normale pe direcția forțelor.

§ 3. Ecuațiile de echilibru în coordonate omogene. Fie X, Y, Z, $\mathcal{M}_{Ox}$, $\mathcal{M}_{Oy}$, $\mathcal{M}_{Oz}$ cele șase componente scalare ale torsorului unui sistem de forțe ce acționează asupra unui rigid și u, v, w, l, m, n coordonatele

omogene (plükeriene) ale unei drepte. Condiţia ca momentul rezultant al sistemului de forţe în raport cu această dreaptă să fie nul se scrie [v. cap. I, §39, formula (1.116) şi Observaţia 1]

$$uM_{Ox}+vM_{Oy}+wM_{Oz}+lX+mY+nZ=0. \tag{6.6}$$

Sub această formă, condiţiile de echilibru (6.2) apar toate ca ecuaţii de momente în raport cu şase drepte, dintre care trei sînt la distanţă finită (axele Ox, Oy, şi Oz) şi trei la distanţă infinită (dreptele de la infinit ale planelor yOz, zOx, xOy). Într-adevăr, coordonatele plükeriene ale acestor şase drepte sînt

$$\begin{aligned}
&Ox\colon u=\text{arbitrar},\ v=0,\ w=0,\ l=0,\ m=0,\ n=0;\\
&Oy\colon u=0,\ v=\text{arbitrar},\ w=0, l=0,\ m=0,\ n=0;\\
&Oz\colon u=0,\ v=0,\ w=\text{arbitrar},\ l=0,\ m=0,\ n=0;\\
&D_\infty\ (yOz)\colon u=0,\ v=0,\ w=0,\ l=\text{arbitrar},\ m=0,\ n=0;\\
&D_\infty\ (zOx)\colon u=0,\ v=0,\ w=0,\ l=0,\ m=\text{arbitrar},\ n=0;\\
&D_\infty\ (xOy)\colon u=0,\ v=0,\ w=0,\ l=0,\ m=0,\ n=\text{arbitrar}.
\end{aligned}$$

Aceste coordonate, înlocuite pe rînd în (6.6), reproduc condiţiile de echilibru (6.2). *Aşadar, ecuaţiile de proiecţie sînt echivalente cu ecuaţiile de momente scrise în raport cu drepte de la infinit ale spaţiului*, deci un caz particular de ecuaţii de momente.

Este atunci firesc să ne întrebăm dacă nu există posibilitatea să poată fi exprimate condiţiile de echilibru ale unui sistem de forţe prin şase ecuaţii de momente scrise în raport cu şase drepte oarecare. Notînd cu u_1, v_1, w_1, l_1, m_1, n_1, ..., u_6, v_6, w_6, l_6, m_6, n_6 coordonatele omogene ale celor şase drepte, ecuaţiile de momente devin

$$\left.\begin{aligned}
u_1M_{Ox}+v_1M_{Oy}+w_1M_{Oz}+l_1X+m_1Y+n_1Z=0,\\
u_2M_{Ox}+v_2M_{Oy}+w_2M_{Oz}+l_2X+m_2Y+n_2Z=0,\\
u_3M_{Ox}+v_3M_{Oy}+w_3M_{Oz}+l_3X+m_3Y+n_3Z=0,\\
u_4M_{Ox}+v_4M_{Oy}+w_4M_{Oz}+l_4X+m_4Y+n_4Z=0,\\
u_5M_{Ox}+v_5M_{Oy}+w_5M_{Oz}+l_5X+m_5Y+n_5Z=0,\\
u_6M_{Ox}+v_6M_{Oy}+w_6M_{Oz}+l_6X+m_6Y+n_6Z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

Pentru ca sistemul de ecuaţii (6.7) să fie echivalent cu condiţiile (6.2), va trebui ca el să nu admită decît soluţiile banale $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, $M_{Ox}=0$, $M_{Oy}=0$, $M_{Oz}=0$. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca determinantul format cu coeficienţii necunoscutelor, respectiv cu coordonatele omogene ale celor şase drepte, să fie diferit de zero, adică

$$\Delta=\begin{vmatrix}
u_1 & v_1 & w_1 & l_1 & m_1 & n_1\\
u_2 & v_2 & w_2 & l_2 & m_2 & n_2\\
u_3 & v_3 & w_3 & l_3 & m_3 & n_3\\
u_4 & v_4 & w_4 & l_4 & m_4 & n_4\\
u_5 & v_5 & w_5 & l_5 & m_5 & n_5\\
u_6 & v_6 & w_6 & l_6 & m_6 & n_6
\end{vmatrix}\neq 0. \tag{6.8}$$

Folosind noţiunile corespunzătoare din teoria mulţimilor de drepte vom spune că este necesar şi suficient ca mulţimea celor şase drepte să fie de rang 6. Dacă rangul mulţimii acestor drepte este 5, $\Delta=0$ şi ecuaţiile de momente (6.7) nu mai condiţionează echilibrul. În acest caz se ştie că cele şase drepte aparţin aceluiaşi complex de gradul întîi (v. cap I, § 42). Aceasta ne permite să formulăm o condiţie negativă privitoare la configuraţia celor şase drepte şi anume: *Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţiile de momente în raport cu şase drepte să conducă la echilibrul unui sistem de forţe ce acţionează asupra unui rigid liber este ca aceste drepte să nu aparţină aceluiaşi complex de gradul întîi.*

Practic, nu este necesar totdeauna să se examineze configuraţia celor şase drepte. Este suficient să se constate de exemplu că cinci dintre drepte alcătuiesc o mulţime de rang 4, respectiv că aparţin aceleiaşi congruenţe de gradul întîi, sau că patru dintre drepte alcătuiesc o mulţime de rang 3, respectiv că aparţin aceleiaşi serii de drepte sau că trei dintre drepte alcătuiesc o mulţime de rang 2, respectiv că aparţin aceluiaşi fascicul plan sau, în sfîrşit, că două dintre drepte alcătuiesc o mulţime de rang 1, respectiv că sînt confundate. În aceste cazuri este sigur că totalitatea celor şase drepte aparţin aceluiaşi complex de gradul întîi, deoarece, în oricare din situaţiile de mai înainte, există cel puţin o combinaţie liniară cu coeficienţii diferiţi de zero între elementele liniilor determinantului Δ, combinaţie care este identic nulă, fapt care atrage evident, anularea determinantului.

Pentru practică prezintă interes în special cazurile particulare de configuraţii de drepte (complexe, congruente, serii, fascicule) care au fost analizate la capitolul I, § 42 şi tabela 1. Aici menţionăm rezultatele obţinute, adaptîndu-le la problema care face obiectul acestui paragraf.

Ecuaţiile de momente în raport cu şase axe nu sînt independente, deci nu condiţionează echilibrul unui sistem de forţe dacă:

a) *trei dintre ele sînt concurente şi coplanare în acelaşi timp;*

b) *trei dintre ele sînt paralele şi coplanare în acelaşi timp;*

c) *două dintre ele sînt paralele şi o a treia este dreapta de la infinit a planului determinat de primele două.* Folosind observaţia cu privire la echivalenţa dintre o ecuaţie de proiecţie şi o ecuaţie de momente în raport cu o dreaptă de la infinit, vom trage concluzia că *ecuaţia de proiecţie pe o direcţie este o consecinţă a ecuaţiilor de momente în raport cu două axe paralele dintr-un plan normal pe acea direcţie;*

d) *trei dintre ele sînt drepte de la infinit concurente.* Folosind aceeaşi echivalenţă dintre o ecuaţie de momente faţă de o dreaptă de la infinit şi o ecuaţie de proiecţie, conchidem că *într-un acelaşi plan nu se pot scrie trei ecuaţii de proiecţie independente;*

e) *patru dintre ele sînt concurente în spaţiu;*

f) *patru dintre ele sînt paralele în spaţiu;*

g) *trei dintre ele sînt paralele şi necoplanare, iar a patra este una din dreptele de la infinit ale spaţiului, paralelă cu primele trei.* Folosind echivalenţa dintre o ecuaţie de momente în raport cu o dreaptă de la infinit şi o ecuaţie de proiecţie, conchidem că *o ecuaţie de proiecţie pe o direcţie oarecare*

dintr-un plan este o consecință a ecuațiilor de momente scrise în raport cu trei axe necoplanare, normale pe plan;

h) *două dintre ele sînt paralele, iar celelalte două sînt drepte de la infinit ale spațiului, paralele cu primele două.* Folosind aceeaşi echivalenţă ca la punctul precedent, conchidem că *dat fiind un plan, nu se pot scrie două ecuații de proiecție pe două direcții din plan și două ecuații de momente în raport cu două axe normale pe plan, toate patru independente între ele;*

i) *patru dintre ele sînt coplanare;*

j) *trei dintre ele sînt coplanare și a patra este dreapta de la infinit a primelor trei.* Folosind echivalenţa de la punctul c) conchidem că *ecuația de proiecție pe o direcție normală la un plan este consecința ecuațiilor de momente scrise în raport cu trei drepte oarecare din acel plan;*

k) *patru dintre ele sînt drepte de la infinit ale spațiului.* Folosind echivalenţa de la punctul c) conchidem că *nu se pot scrie patru ecuații de proiecție distincte;*

l) *patru dintre ele sînt generatoare din aceeași familie a unei cuadrice riglate:*

m) *cinci dintre ele întîlnesc două drepte date;*

n) *cinci dintre ele întîlnesc o aceeași dreaptă și sînt în același timp paralele cu un plan;*

p) *cele șase axe întîlnesc o aceeași dreaptă;*

q) *trei dintre ele sînt concurente într-un punct și celelalte trei sînt concurente în alt punct;*

r) *trei dintre ele sînt concurente într-un punct și celelalte trei sînt paralele;*

s) *trei dintre ele sînt paralele cu o direcție și celelalte trei sînt paralele cu o altă direcție;*

t) *toate șase sînt paralele cu un același plan (normale pe aceeași direcție).*

C a z u r i   p a r t i c u l a r e   i m p o r t a n t e.

Forțe plane. În cazul forţelor plane se folosesc de obicei ecuaţiile de momente în raport cu trei axe normale pe planul forţelor sau, ceea ce este acelaşi lucru, momentele în raport cu trei puncte A, B, C, din planul forţelor. Rezultă următoarele restricţii pentru cele trei puncte:

— punctele A, B şi C nu trebuie să fie coliniare;

— dacă se scriu numai două ecuaţii de momente în raport cu punctele A şi B şi o ecuaţie de proiecţie, direcţia pe care se proiectează trebuie să fie diferită de normala la AB;

— nu se pot scrie trei ecuaţii de proiecţie.

Forțe paralele. În acest caz se obişnuieşte a se scrie ecuaţii de momente în raport cu trei axe dintr-un plan normal pe direcţia forţelor. Rezultă următoarele restricţii:

— axele nu trebuie să fie concurente;

— axele nu trebuie să fie paralele;

— dacă se scriu două ecuaţii de momente şi o ecuaţie de proiecţie pe direcţia forţelor, axele nu trebuie să fie paralele;

— nu se poate scrie mai mult decît o ecuaţie de proiecţie.

§ 4. Condiţii pentru configuraţia suporturilor forţelor unui sistem în echilibru. În cazul unui sistem cu $n=1, \ldots, 6$, forţe, echilibrul nu este în general posibil decît dacă suporturile forţelor au o anumită configuraţie.

Într-adevăr dacă se consideră cele şase ecuaţii scalare de echilibru şi se presupun ca necunoscute scalarii forţelor, sistemul astfel obţinut fiind omogen, nu admite soluţii diferite de zero decît dacă matricea coeficienţilor necunoscutelor are un rang mai mic decît numărul forţelor. Aceasta atrage o serie de condiţii pentru aceşti coeficienţi, respectiv pentru configuraţia suporturilor celor n forţe. Într-adevăr coeficienţii necunoscutelor sînt coordonate omogene ale celor n suporturi, căci ecuaţiile de echilibru se pot scrie, de exemplu în funcţie de cosinusurile directoare $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ale suporturilor forţelor şi de coordonatele x, y, z ale punctelor lor de aplicaţie sub forma

$$\left.\begin{aligned}
&F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2+\cdots+F_n\cos\alpha_n=0,\\
&F_1\cos\beta_1+F_2\cos\beta_2+\cdots+F_n\cos\beta_n=0,\\
&F_1\cos\gamma_1+F_2\cos\gamma_2+\cdots+F_n\cos\gamma_n=0,\\
&F_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1)+F_2(z_2\cos\alpha_2-x_2\cos\gamma_2)+\\
&\qquad+\cdots+F_n(z_n\cos\alpha_n-x_n\cos\gamma_n)=0,\\
&F_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)+F_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)+\\
&\qquad+\cdots+F_n(x_n\cos\beta_n-y_n\cos\alpha_n)=0,\\
&F_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)+F_2(y_2\cos\gamma_2-z_2\cos\beta_2)+\\
&\qquad+\cdots+F_n(y_n\cos\gamma_n-z_n\cos\beta_n)=0.
\end{aligned}\right\}\quad(6.9)$$

În general observăm că

$$\cos\alpha_i,\ \cos\beta_i,\ \cos\gamma_i,$$
$$(z_i\cos\alpha_i-x_i\cos\gamma_i),\ (x_i\cos\beta_i-y_i\cos\alpha_i),\ (y_i\cos\gamma_i-z_i\cos\beta_i)$$

constituie un sistem de coordonate omogene pentru suportul forţei $\bar{F}_i$, coordonate pe care le notăm cu

$$u_i,\ v_i,\ w_i,\ l_i,\ m_i,\ n_i.$$

Sistemul (6.9) poate fi transcris, cu aceste notaţii sub forma

$$\left.\begin{aligned}
&F_1u_1+F_2u_2+\cdots+F_nu_n=0,\\
&F_1v_1+F_2v_2+\cdots+F_nv_n=0,\\
&F_1w_1+F_2w_2+\cdots+F_nw_n=0,\\
&F_1l_1+F_2l_2+\cdots+F_nl_n=0,\\
&F_1m_1+F_2m_2+\cdots+F_nm_n=0,\\
&F_1n_1+F_2n_2+\cdots+F_nn_n=0.
\end{aligned}\right\}\quad(6.10)$$

În sistemul (6.10) s-a presupus $n<6$. Pentru ca sistemul să admită soluţii diferite de zero pentru necunoscutele $F_1, \ldots, F_n$ este necesar şi suficient ca rangul matricii

$$\left\|\begin{matrix}
u_1 & u_2 & \ldots & u_n\\
v_1 & v_2 & \ldots & v_n\\
w_1 & w_2 & \ldots & w_n\\
l_1 & l_2 & \ldots & l_n\\
m_1 & m_2 & \ldots & m_n\\
n_1 & n_2 & \ldots & n_n
\end{matrix}\right\| \qquad (6.11)$$

să fie cel mult egal cu $(n-1)$, deci cele n drepte trebuie să aparţină unei mulţimi liniare de rang cel mult $r=n-1$ (v. cap. I, § 42).

Aplicînd teoria mulţimilor liniare de drepte (v. cap. I, § 42 şi tabela 1) tragem următoarele concluzii:

a) *Un sistem alcătuit dintr-o singură forţă nu se poate găsi în echilibru*, deoarece pentru $n=1$, rezultă $r=0$ (mulţimea vidă).

b) *Pentru ca un sistem de două forţe acţionînd asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca forţele să aibă acelaşi suport*, deoarece pentru $n=2$ rezultă $r=1$ (mulţimea dreptelor confundate). În plus, vom constata că, deoarece rezultanta lor trebuie să fie nulă, forţele trebuie să fie egale în modul şi opuse.

c) *Pentru ca un sistem de trei forţe acţionînd asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forţelor să fie concurente şi coplanare sau paralele şi coplanare*, deoarece pentru $n=3$ rezultă $r=2$ (mulţimea dreptelor unui fascicul plan).

d) *Pentru ca un sistem de patru forţe acţionînd asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forţelor să fie concurente în spaţiu, sau paralele în spaţiu, sau să fie generatoare din aceeaşi familie ale unei cuadrice riglate, sau, în general, să aparţină aceleiaşi serii liniare de drepte*, deoarece pentru $n=4$, $r=3$ (mulţimea dreptelor dintr-o serie liniară).

e) *Pentru ca un sistem de cinci forţe acţionînd asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forţelor să aparţină aceleiaşi congruenţe de gradul întîi, în particular, de exemplu să întîlnească două drepte date sau să întîlnească o dreaptă şi să fie în acelaşi timp paralele cu un plan dat.*

f) *pentru ca un sistem de şase forţe acţionînd asupra unui rigid să fie în echilibru este necesar ca suporturile forţelor să aparţină aceluiaşi complex de gradul întîi, în particular, de exemplu să întîlnească o aceeaşi dreaptă sau să fie paralele cu un acelaşi plan.*

§ 5. **Problemele staticii solidului rigid liber.** Acestea pot fi grupate în două categorii:

a) Probleme în care se cunosc forţele care acţionează asupra solidului şi se cere să se determine poziţia lui de echilibru.

b) Probleme în care se cunoaşte poziţia de echilibru şi se cere să se determine forţele care acţionează asupra solidului.

Pentru rezolvarea acestor probleme dispunem de ecuaţiile (6.2), deci de şase ecuaţii scalare. Pentru ca o asemenea problemă să poată fi rezolvată, este necesar ca ea să nu aibă mai mult de şase necunoscute scalare. Condiţia aceasta nu este suficientă, căci este posibil ca un sistem de şase ecuaţii cu şase necunoscute să fie nedeterminat sau imposibil.

O problemă din prima categorie are şase necunoscute. Într-adevăr, pentru a fixa poziţia unui solid este suficient să se fixeze poziţiile P_1, P_2, P_3 pe care le ocupă în spaţiu trei puncte A_1, A_2 şi A_3 necoliniare ale lui. Va trebui deci să se cunoască de exemplu coordonatele carteziene (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) şi (x_3, y_3, z_3) ale punctelor P_1, P_2 şi P_3 faţă de un triedru $Oxyz$. Coordonatele acestor puncte nu pot fi însă arbitrare. Dat fiind că solidul

este rigid, distanțele dintre punctele din spațiu P_1, P_2 și P_3 trebuie să fie egale cu distanțele dintre punctele corpului A_1, A_2 și A_3 adică

$$P_1P_2=A_1A_2,\quad P_2P_3=A_2A_3,\quad P_3P_1=A_3A_1.$$

Scriind aceste relații în funcție de coordonatele punctelor P_1, P_2 și P_3 obținem

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}&=A_1A_2\\ \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}&=A_2A_3\\ \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}&=A_3A_1.\end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Relațiile (6.12) arată că numai șase dintre cele nouă coordonate sînt independente. Se spune că *un solid rigid liber are șase grade de libertate*[1]. Pentru determinarea celor șase necunoscute independente dispunem, așa cum s-a văzut, de șase ecuații deci, în general, problemele din prima categorie sînt determinate.

Problemele din a doua categorie sînt în general determinate dacă numărul necunoscutelor scalare necesare pentru aflarea forțelor este cel mult șase.

În cazul sistemelor de forțe plane avem trei ecuații scalare de echilibru, date de (6.3): solidul rigid cu un plan fix are trei grade de libertate. Într-adevăr, pentru a determina poziția unui asemenea solid este suficient să i se fixeze două puncte A_1 și A_2 în două puncte P_1 și P_2 din spațiu. Punctele P_1 și P_2 trebuind să fie într-un plan, pentru definirea lor este nevoie de patru coordonate (x_1, y_1) și (x_2, y_2). Deoarece distanța dintre punctele P_1 și P_2 trebuie să fie egală cu distanța dintre punctele A_1 și A_2 rezultă

$$P_1P_2=A_1A_2 \text{ sau } \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=A_1A_2. \qquad (6.13)$$

Între cele patru coordonate existînd o relație, numai trei dintre ele sînt independente. Un rigid cu un plan fix are, deci, trei grade de libertate. Pentru determinarea lor dispunem de trei ecuații de echilibru. Deci și în acest caz problemele din prima categorie sînt în general determinate.

Problemele din a doua categorie pot fi, în general, rezolvate dacă nu comportă determinarea a mai mult de trei necunoscute scalare.

VII. STATICA SOLIDULUI RIGID SUPUS LA LEGĂTURI

A. SOLIDUL RIGID SUPUS LA LEGĂTURI FĂRĂ FRECARE

§ 1. **Legături.** Ecuațiile (6.2) au fost stabilite pentru un solid rigid liber, adică pentru un solid care poate ocupa orice poziție în spațiu. Sub acțiunea forțelor, el ar putea ocupa o anumită poziție de echilibru. Această

[1] Aceste șase grade de libertate pot fi, de exemplu, coordonatele unui punct O al rigidului și unghiurile lui Euler corespunzătoare (v. cap. XXVIII, § 2).

poziţie însă este determinată exclusiv de sistemul de forţe, nu şi de alte condiţii geometrice, cum ar fi de exemplu obligaţia unui punct al solidului de a rămîne pe o suprafaţă, pe o curbă sau într-un punct fix din spaţiu, sau obligaţia ca două puncte ale solidului să rămînă fixe (solidul cu o axă fixă) etc.

O problemă de echilibru a unui solid rigid supus la legături se rezolvă folosind aceeaşi axiomă a legăturilor (principiul forţelor de legătură) în virtutea căreia fiecare legătură geometrică poate fi înlocuită cu o forţă, numită *forţă de legătură* sau *reacţiune*.

Se ajunge astfel la situaţia unui solid rigid liber acţionat de două sisteme de forţe:

a) forţele exterioare, care acţionează asupra solidului rigid,

b) forţele de legătură.

Să notăm cu $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}_O)$ torsorul forţelor aplicate în raport cu un punct O şi cu $(\bar{R}, \bar{M}_O)$ torsorul reacţiunilor în raport cu acelaşi punct. Solidul rigid putînd fi considerat liber, condiţia sa de echilibru se scrie:

$$\bar{\mathcal{R}}+\bar{R}=0, \quad \bar{\mathcal{M}}_O+\bar{M}_O=0. \tag{7.1}$$

Ecuaţiile sînt echivalente cu şase ecuaţii scalare. O problemă de echilibru al unui solid rigid supus la legături, care are mai mult de şase necunoscute scalare este în general nedeterminată: fie că există o infinitate de poziţii de echilibru, fie că există o infinitate de valori posibile pentru forţele de legătură, fie ambele posibilităţi.

§ 2. **Reazemul simplu.** Să presupunem că singura legătură a unui solid rigid constă în aceea că un punct al său A_1 este obligat să rămînă pe o suprafaţă fixă lucie. Se spune că în punctul A_1 este un *reazem simplu* sau un *reazem mobil*.

Pentru determinarea poziţiei de echilibru a unui asemenea solid sînt necesari cinci parametri. Într-adevăr, în acest caz pe lîngă relaţiile (6.12) coordonatele punctului P_1 din spaţiu cu care coincide A_1 trebuie să satisfacă şi ecuaţia suprafeţei $f(x, y, z)=0$, pe care este obligat să rămînă, deci

$$f(x_1, y_1, z_1)=0. \tag{7.2}$$

Relaţiile (6.12) şi (7.2) reprezintă în total patru relaţii între nouă coordonate, deci numai cinci coordonate sînt independente. *Deci, un reazem simplu suprimă unui solid rigid un grad de libertate.*

În virtutea axiomei legăturilor, un reazem simplu poate fi înlocuit cu o reacţiune normală pe suprafaţa de sprijin, aşa cum s-a arătat în statica punctului material obligat să rămînă pe o suprafaţă lucie.

Dacă se cunoaşte poziţia de echilibru a solidului rigid, deci şi coordonatele punctului P_1, direcţia reacţiunii fiind cunoscută (normală la suprafaţă), pentru completa determinare a ei este nevoie să se afle o singură necunoscută: *scalarul reacţiunii*.

În cazul unui sistem de forțe plane, se spune că un solid rigid este simplu rezemat într-un punct P_1, dacă punctul P_1 al solidului este obligat să rămînă pe o curbă din planul forțelor.

Se poate arăta și în acest caz că un reazem simplu suprimă solidului un grad de libertate. Într-adevăr la ecuația (6.13) se adaugă în acest caz ecuația

$$f(x_1, y_1)=0 \tag{7.3}$$

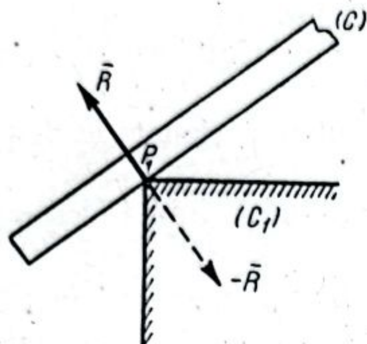


Fig. 7.1

care exprimă obligația ca punctul P_1 să rămînă pe curbă. În total există două relații între patru coordonate, deci numai două dintre ele sînt independente. Solidul a pierdut deci un grad de libertate.

Se poate arăta de asemenea că determinarea reacțiunii echivalează cu găsirea *unei necunoscute*: scalarul ei; într-adevăr direcția ei trebuie să fie în planul forțelor și normală la curbă, deci este cunoscută.

Observații. 1°. Dacă suprafața de sprijin are în P_1 un punct singular, atunci reacțiunea are direcția normalei la suprafața corpului (C) (fig. 7.1). Aceasta rezultă imediat dacă se aplică principiul acțiunii și reacțiunii considerînd că există două corpuri (C) și (C_1) care se sprijină unul pe altul și observînd că acțiunea $(-\bar{R})$ trebuie să fie normală pe suprafața care mărginește corpul (C). Aceeași direcție trebuie să o aibă și reacțiunea $\bar{R}$.

2°. Dacă un reazem simplu suprimă unui corp un grad de libertate, rezultă că pentru a imobiliza un solid rigid este nevoie de șase reazeme în cazul general și de trei reazeme în cazul forțelor plane.

Nu însă întotdeauna un solid rigid poate fi imobilizat în modul acesta. Să cercetăm ce condiții trebuie să îndeplinească cele șase reazeme ale unui solid rigid pentru a-l imobiliza *față de orice sistem de forțe*.

Să considerăm un rigid avînd șase reazeme simple și să notăm cu $N_1, N_2, \ldots, N_6$ scalarii reacțiunilor normale, cu $u_i, v_i, w_i, l_i, m_i, n_i (i=1, 2, \ldots, 6)$ coordonatele plükeriene ale versorilor acestor reacțiuni (cap. I, § 42) și cu $X, Y, Z, \mathcal{M}_{Ox}, \mathcal{M}_{Oy}, \mathcal{M}_{Oz}$ proiecțiile rezultantei și ale momentului rezultant al forțelor date. Ecuațiile de echilibru ale rigidului se vor scrie:

$$\left.\begin{array}{l}
N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3+N_4u_4+N_5u_5+N_6u_6+X=0\\
N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3+N_4v_4+N_5v_5+N_6v_6+Y=0\\
N_1w_1+N_2w_2+N_3w_3+N_4w_4+N_5w_5+N_6w_6+Z=0\\
N_1l_1+N_2l_2+N_3l_3+N_4l_4+N_5l_5+N_6l_6+\mathcal{M}_{Ox}=0\\
N_1m_1+N_2m_2+N_3m_3+N_4m_4+N_5m_5+N_6m_6+\mathcal{M}_{Oy}=0\\
N_1n_1+N_2n_2+N_3n_3+N_4n_4+N_5n_5+N_6n_6+\mathcal{M}_{Oz}=0.
\end{array}\right\} \tag{7.4}$$

Pentru ca sistemul să fie compatibil, este necesar și suficient ca matricea formată cu coeficienții necunoscutelor să aibă același rang cu matricea formată cu coeficienții necunoscutelor și cu termenii liberi, $X, Y, Z, \mathcal{M}_{Ox}, \mathcal{M}_{Oy}, \mathcal{M}_{Oz}$. Pentru ca aceste două matrici să aibă același rang, *oricare ar fi*

sistemul de forţe date, deci oricare ar fi termenii liberi, este necesar şi suficient ca matricea formată cu coeficienţii necunoscutelor

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{matrix} \right\| \tag{7.5}$$

să aibă rangul 6. Utilizînd rezultatele de la cap. I, § 65 şi tabela 1, rezultă următoarele condiţii negative pentru suporturile celor şase reacţiuni:

a) suporturile a două reacţiuni nu trebuie să coincidă;

b) suporturile a trei reacţiuni nu trebuie să fie coplanare şi concurente sau coplanare şi paralele;

c) suporturile a patru reacţiuni nu trebuie să fie concurente, paralele, sau să aparţină aceleiaşi familii de generatoare a unui hiperboloid cu o pînză;

d) suporturile a cinci reacţiuni nu trebuie să întîlnească două drepte sau să întîlnească o dreaptă şi să fie paralele cu un plan şi în general să nu aparţină unei congruenţe de gradul I;

e) suporturile a şase reacţiuni nu trebuie să întîlnească aceeaşi dreaptă, să fie paralele cu acelaşi plan şi, în general, să aparţină aceluiaşi complex liniar de gradul I.

În cazul cînd una dintre aceste condiţii nu este îndeplinită sistemul de ecuaţii (7.4) nu mai este *în general* compatibil, respectiv rigidul nu mai este imobilizat. Pentru *anumite* sisteme de forţe, rigidul ar putea fi imobilizat de cele şase reazeme, dar, în acest din urmă caz, rangul matricii (7.5) fiind mai mic decît 6, sistemul de ecuaţii (7.4) este nedeterminat. Dacă se consideră o poziţie infinit vecină şi dacă în această poziţie rangul matricii (7.5) continuă să fie inferior lui 6, se spune că *rigidul nu este imobilizat*; dacă rangul matricii (7.5) în poziţia infinit vecină este 6, atunci imobilizarea rigidului este realizată numai pentru mişcări infinitezimale, nu şi pentru deplasări finite. Se zice că legăturile rigidului sînt *critice* sau că *rigidul nu este strict imobilizat*.

§ 3. **Articulaţia.** Să presupunem că singura legătură a unui solid rigid este obligaţia de a avea un punct al său A_1 într-un punct fix P_1 din spaţiu. Se zice că solidul rigid are în A_1 o *articulaţie sferică*.

Pentru determinarea poziţiei de echilibru a unui asemenea solid sînt necesari trei parametri. Într-adevăr, în acest caz pe lîngă ecuaţiile (6.12) coordonatele punctului P_1 din spaţiu cu care coincide A_1 trebuie să satisfacă şi ecuaţiile

$$x_1=a, \quad y_1=b, \quad z_1=c, \tag{7.6}$$

unde a, b, şi c sînt trei constante. Relaţiile (6.12) şi (7.6) alcătuiesc în total şase ecuaţii între nouă coordonate. Rezultă că numai trei dintre ele sînt independente.

Deci, *o articulaţie sferică suprimă unui solid trei grade de libertate. O articulaţie sferică poate fi înlocuită cu o reacţiune de direcţie necunoscută, aşa cum s-a arătat în cazul punctului material obligat* să ocupe o poziţie fixă în spaţiu [v. formula (3.15)].

O articulaţie introduce într-o problemă de statică trei necunoscute: proiecţiile reacţiunii pe trei direcţii necoplanare, de exemplu pe axele Ox, Oy şi Oz ale unui sistem de axe cartezian ortogonal.

În cazul cînd unui solid rigid acţionat de un sistem de forţe plane i se imobilizează un punct P_1 din planul forţelor, se zice că solidul are în acest punct o *articulaţie cilindrică*. În acest caz pentru determinarea poziţiei de echilibru este necesar un singur parametru. Într-adevăr la ecuaţia (6.13) se adaugă în acest caz ecuaţiile

$$x_1=a, \ y_1=b, \tag{7.7}$$

care exprimă obligaţia ca punctul P_1 să rămînă fix în plan. În total există deci trei relaţii între patru coordonate. *O articulaţie cilindrică suprimă unui solid rigid două grade de libertate. O articulaţie cilindrică poate fi înlocuită cu o reacţiune al cărei suport este situat în planul forţelor şi a cărei direcţie este necunoscută.*

O articulaţie cilindrică introduce într-o problemă de statică două necunoscute scalare: proiecţiile reacţiunii pe două direcţii din planul forţelor, de exemplu pe axele Ox şi Oy ale unui sistem de referinţă cartezian ortogonal.

Observaţii. 1°. O articulaţie sferică poate fi asimilată cu trei reazeme simple avînd suporturile reacţiunilor concurente şi necoplanare, iar o articulaţie cilindrică, poate fi asimilată cu două reazeme simple avînd suporturile reacţiunilor în planul forţelor.

2°. În baza observaţiei de mai înainte şi a celor stabilite la § 2 se poate afirma că:

a) Un solid rigid nu poate fi imobilizat cu ajutorul a două articulaţii sferice pentru orice sistem de forţe, deoarece rangul mulţimii celor şase reacţiuni echivalente ar fi $r=5$, ele formînd două stele de drepte concurente (v. cap. I, § 42, tabela 1).

b) Un solid rigid nu poate fi imobilizat cu o articulaţie sferică şi trei reazeme simple dacă suporturile reacţiunilor din reazeme sînt concurente sau paralele, sau dacă suportul uneia dintre cele trei reacţiuni din reazeme trece prin articulaţie, sau, în sfîrşit, dacă suporturile reacţiunilor din reazemele simple sînt întîlnite de o aceeaşi dreaptă care trece prin articulaţie.

c) Un solid rigid acţionat de un sistem de forţe plane este imobilizat cu două articulaţii, dar problema este nedeterminată (patru necunoscute şi trei ecuaţii de echilibru).

d) Un solid rigid acţionat de un sistem de forţe plane nu este imobilizat cu o articulaţie şi un reazem simplu dacă suportul reacţiunii din reazem trece prin articulaţie.

§ 4. **Încastrarea.** Să presupunem o grindă rigidă care nu are altă legătură decît obligaţia ca una dintre extremităţi să fie fixată într-un masiv (fig. 7.2). *Se zice că grinda este încastrată* la acea extremitate. *O încastrare suprimă corpului toate gradele sale de libertate. O grindă rigidă încastrată este imobilă.*

Să ne închipuim o secţiune $a-a$ făcută normal pe axa grinzii în dreptul încastrării. Fiecare punct A_i al acestei secţiuni este fix. În virtutea axiomei legăturilor asupra sa acţionează o forţă de legătură $\overline{p}_i$ de direcţie necunoscută.

Determinarea forțelor $\overline{p}_i$ nu poate fi făcută în mod unic cu ajutorul ecuațiilor mecanicii, din cauza numărului foarte mare al acestor forțe. Este nevoie de ipoteze suplimentare bazate pe deformarea corpurilor. În cadrul staticii ne vom mulțumi să determinăm numai torsorul forțelor $\overline{p}_i$, în raport cu un punct. Se obișnuiește să se aleagă ca punct de reducere centrul de greutate O al secțiunii din dreptul încastrării. Fie $\overline{r}_i$ vectorul de poziție al punctului A_i în care se aplică forța $\overline{p}_i$. Torsorul forțelor $\overline{p}_i$ în O are componentele

$$\overline{R}=\Sigma\overline{p}_i, \quad \overline{M}_O=\Sigma\overline{r}_i\times\overline{p}_i.$$

Dacă notăm cu $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_O)$ torsorul forțelor care acționează asupra grinzii, calculat în raport cu punctul O, condițiile de echilibru se scriu

$$\overline{\mathcal{R}}+\overline{R}=0, \quad \overline{\mathcal{M}}_O+\overline{M}_O=0. \tag{7.8}$$

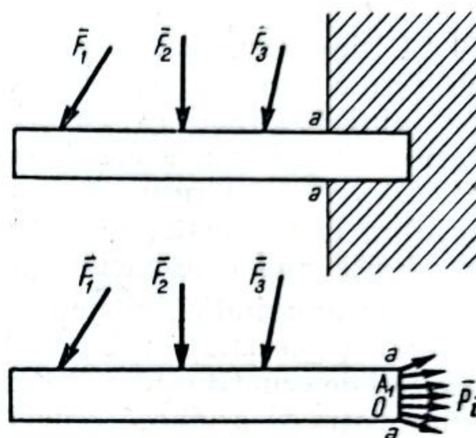


Fig. 7.2

Aceste ecuații permit determinarea torsorului forțelor $\overline{p}_i$.

Sistemul (7.8) este echivalent cu șase ecuații scalare în cazul general și cu trei ecuații scalare în cazul sistemelor de forțe plane.

O încastrare introduce deci într-o problemă de statică șase necunoscute scalare $(R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z)$ *în cazul unui sistem de forțe oarecare și trei necunoscute scalare* (R_x, R_y, M) *în cazul unui sistem de forțe plane.*

Observații. 1°. O grindă încastrată nu mai are nevoie de nici un alt reazem pentru a fi imobilizată. Dacă o grindă încastrată mai are și alte reazeme, problema determinării reacțiunilor admite o infinitate de soluții.

2°. În afară de reazemele studiate, care sînt cele mai des folosite în tehnică, există multe altele. Orice alt mod de rezemare se poate obține ca o combinație a reazemelor de mai sus.

Astfel grinda din fig. 7.3 are la capătul din dreapta un mod de rezemare care, în plan vertical, se comportă ca o articulație, iar în plan orizontal ca o încastrare plană. Rezultă că torsorul în centrul de greutate al secțiunii va avea patru componente R_x, R_y, R_z, M_z.

§ 5. **Solidul cu o axă fixă.** Să presupunem că imobilizăm două puncte O și O' ale unui solid rigid prin două articulații sferice. În acest caz se imobilizează axa OO'. Să alegem un sistem de referință solidar cu corpul avînd originea în O și axa Oz coincizînd cu axa fixă OO' (fig. 7.4).

În O și O' vor acționa două reacțiuni $\overline{R}$ și $\overline{R}'$ de direcții necunoscute. Dacă $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_O)$ este torsorul forțelor aplicate solidului rigid, atunci condițiile de echilibru se scriu

$$\overline{\mathcal{R}}+\overline{R}+\overline{R}'=0, \quad \overline{\mathcal{M}}_O+\overline{M}_O(\overline{R})+\overline{M}_O(\overline{R}')=0. \tag{7.9}$$

Observăm că $\overline{M}_O(\overline{R})=0$ fiindcă reacțiunea R este aplicată în O. Notînd $OO'=h$, cu X, Y, Z proiecțiile pe axe ale vectorului $\overline{\mathcal{R}}$ și cu $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$

proiecţiile pe axe ale vectorului $\overline{\mathcal{M}}_O$, cu R_x R_y, R_z, R'_x, R'_y, R'_z proiecţiile vectorilor $\overline{R}$ şi $\overline{R}'$, sistemul de ecuaţii (7.9) este echivalent cu şase ecuaţii scalare

$$\left.\begin{aligned} X+R_x+R'_x=0, \quad & \mathcal{M}_x-R'_y h=0,\\ Y+R_y+R'_y=0, \quad & \mathcal{M}_y+R'_x h=0,\\ Z+R_z+R'_z=0, \quad & \mathcal{M}_z=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Ultima ecuaţie este independentă de reacţiuni. Ea defineşte poziţia de echilibru a solidului (de exemplu, din rezolvarea ei, poate rezulta valoarea unghiului θ format de axa Ox solidară cu corpul, cu o axă Ox_1 fixă din spaţiu). După cum această ecuaţie este compatibilă şi determinată, compatibilă şi nedeterminată sau incompatibilă, solidul admite poziţii de echilibru determinate, sau este în echilibru în orice poziţie, sau în sfîrşit, nu admite nici o asemenea poziţie.

Presupunînd că ultima ecuaţie este compatibilă, rămîn pentru determinarea proiecţiilor reacţiunilor celelalte cinci ecuaţii. Este evident că sistemul de ecuaţii este nedeterminat, căci sînt şase proiecţii de determinat. Din a patra şi a cincea ecuaţie se pot deduce proiecţiile R'_x şi R'_y, apoi din prima şi a doua ecuaţie se pot deduce proiecţiile R_x şi R_y. Rămîne o singură ecuaţie, a treia, care conţine proiecţiile R_z şi R'_z. Aceste proiecţii rămîn astfel nedeterminate. Singura condiţie se impune pentru suma lor

$$R_z+R'_z=-Z. \tag{7.11}$$

Aceste reacţiuni nu pot fi determinate dacă nu se renunţă la ipoteza rigidităţii, căci dacă se presupune că printr-un mijloc oarecare ele ar putea

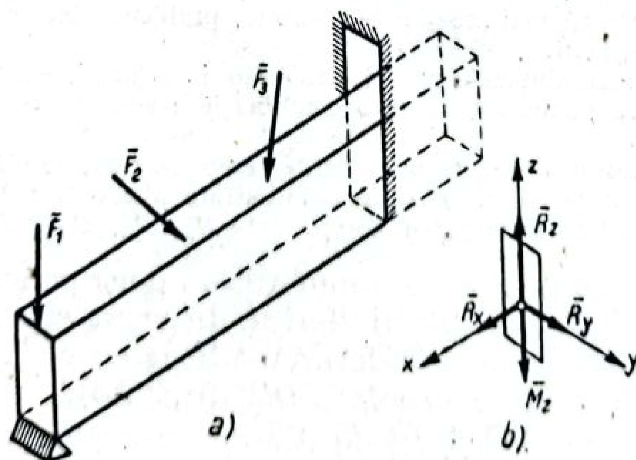


Fig. 7.3

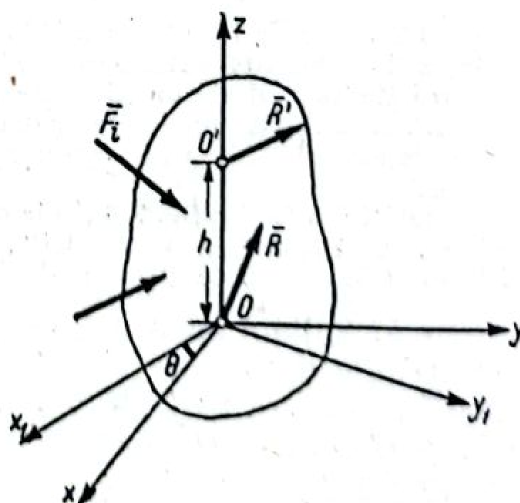


Fig. 7.4

fi totuşi determinate, valorile obţinute se modifică dacă în lungul axei Oz, în O şi O' se introduc două forţe egale şi de sens opus, deşi acestea nu modifică evident, torsorul $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\mathcal{M}}_O)$.

Se spune că reacţiunile R_z şi R'_z sînt static nedeterminate.

§ 6. **Solidul rezemat pe un plan fix.** Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n puncte de reazem ale unui solid rigid pe un plan (Π) şi $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}_O)$ torsorul sistemului de forţe care acţionează asupra solidului, reducerea făcîndu-se în raport cu un punct O din planul (Π) (fig. 7.5). Alegînd punctul O ca origine a unui sistem de axe de coordonate avînd Ox şi Oy în planul (Π) şi notînd ca de obicei cu $X, Y, Z, \mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z$ proiecţiile torsorului forţelor care acţionează asupra solidului şi cu $\bar{R}_i$ una dintre reacţiuni care este normală la planul (Π), ecuaţiile de echilibru se scriu

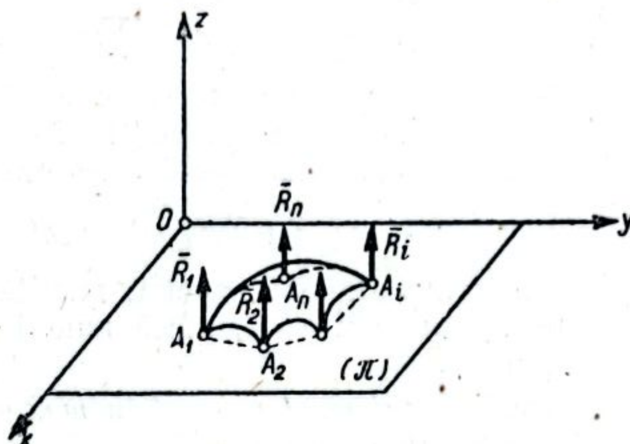


Fig. 7.5

$$\bar{\mathcal{R}}+\sum\bar{R}_i=0,$$
$$\bar{\mathcal{M}}_O+\sum\bar{M}_O(\bar{R}_i)=0, \quad (7.12)$$

sau, proiectate pe axe,

$$\left.\begin{aligned} &X=0, \quad Y=0,\\ &Z+\sum R_i=0,\\ &\mathcal{M}_x+\sum y_iR_i=0,\\ &\mathcal{M}_y-\sum x_iR_i=0, \quad \mathcal{M}_z=0.\end{aligned}\right\} \quad (7.13)$$

Ecuaţiile $X=0$, $Y=0$, $\mathcal{M}_z=0$ în care nu apar reacţiunile R_i, reprezintă trei condiţii pe care trebuie să le îndeplinească sistemul de forţe exterioare. Se recunoaşte uşor că sistemul acestor forţe trebuie să se reducă la o forţă unică, căci trinomul invariant

$$X\mathcal{M}_x+Y\mathcal{M}_y+Z\mathcal{M}_z$$

este identic nul. Forţa unică va avea valoarea Z şi va fi normală pe planul (Π). Pentru determinarea reacţiunilor rămîn ecuaţiile

$$\begin{aligned} &Z+\sum R_i=0,\\ &\mathcal{M}_x+\sum y_iR_i=0,\\ &\mathcal{M}_y-\sum x_iR_i=0.\end{aligned} \quad (7.14)$$

Se observă că dacă numărul punctelor de sprijin este $n>3$ problema este în general nedeterminată, deoarece numărul necunoscutelor este mai mare decît al ecuaţiilor. Deci, un solid rigid sprijinit pe un plan fix în mai mult de trei puncte constituie un sistem static nedeterminat.

Dacă $n=3$ relaţiile (7.12) devin

$$\left.\begin{aligned} &R_1+R_2+R_3=-Z,\\ &x_1R_1+x_2R_2+x_3R_3=\mathcal{M}_y,\\ &y_1R_1+y_2R_2+y_3R_3=-\mathcal{M}_x.\end{aligned}\right\} \quad (7.15)$$

Pentru ca sistemul să admită soluţii determinate este necesar ca determinantul coeficienţilor necunoscutelor să fie diferit de zero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} \neq 0. \quad (7.16)$$

Aceasta atrage după sine condiţia ca *punctele de sprijin* A_1, A_2 *şi* A_3 *să nu fie coliniare.*

În cazul cînd punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt coliniare putem presupune, fără a particulariza problema, că ele sînt situate pe axa Ox, adică $y_1=y_2=\ldots=y_n=0$. În acest caz condiţiile de echilibru devin

$$\left.\begin{array}{lll} X=0, & Y=0, & Z+\sum R_i=0, \\ \mathcal{M}_x=0, & \mathcal{M}_y-\sum x_i R_i=0, & \mathcal{M}_z=0. \end{array}\right\} \tag{7.17}$$

Rezultă că suportul forţei unice la care se reduce sistemul de forţe trebuie să fie normal pe planul (Π) şi să întîlnească axa Ox.

Ecuaţiile care rămîn pentru determinarea reacţiunilor sînt

$$Z+\Sigma R_i=0, \quad \mathcal{M}_y-\Sigma x_i R_i=0. \tag{7.18}$$

Fiind numai două ecuaţii, rezultă că sistemul admite soluţii determinate numai cînd $n=2$, adică numai cînd solidul rigid este sprijinit în două puncte.

Deci solidul rigid rezemat în mai mult de două puncte şi avînd suporturile reacţiunilor coplanare şi paralele reprezintă un sistem static nedeterminat.

Observaţie. Dacă se presupune că reazemele solidului rigid sînt legături unilaterale, cum se întîmplă de obicei, atunci mărimile R_i ale reacţiunilor în punctele A_i trebuie să fie toate pozitive

$$R_i>0. \tag{7.19}$$

Aceste reacţiuni constituie un sistem de forţe paralele, deci rezultanta lor trece prin centrul acestor forţe, ale cărui coordonate sînt

$$\xi=\frac{\Sigma R_i x_i}{\Sigma R_i}, \quad \eta=\frac{\Sigma R_i y_i}{\Sigma R_i}, \quad \zeta=0. \tag{7.20}$$

Cum $R_i>0$, formulele (7.20) arată că abscisa ξ este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare valoare x_i, iar ordonata η este cuprinsă între cea mai mică şi cea mai mare valoare y_i. Centrul forţelor paralele $\vec{R}_i$ se găseşte deci într-un poligon convex care conţine în interiorul sau pe conturul său punctele de sprijin A_i. Poligonul de arie minimă ce îndeplineşte această condiţie poartă numele de *poligon de sustentaţie*. Suportul rezultantei *forţelor exterioare trebuie să treacă prin centrul forţelor* $\vec{R}_i$, *deci trebuie să intersecteze planul* (Π) în interiorul poligonului de sustentaţie.

În particular, dacă corpul este supus numai la greutatea proprie, iar planul (Π) este orizontal, *verticala centrului de greutate trebuie să întîlnească planul* (Π) *într-un punct situat în interiorul poligonului de sustentaţie.*

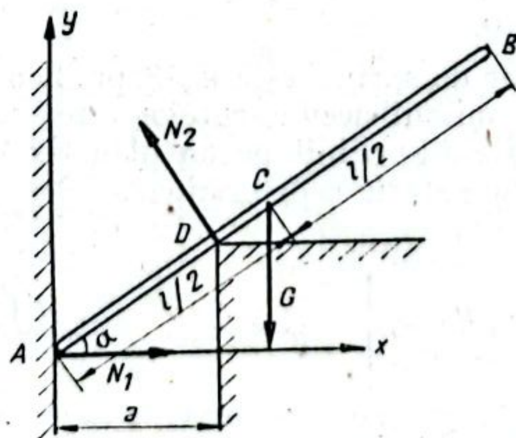


Fig. 7.6

Aplicaţii. 1°. O bară omogenă, de lungime l şi de greutate G se sprijină fără frecare în A pe un perete vertical şi în D pe un colţ (fig. 7.6). Cunoscînd distanţa a, se cere să se determine, unghiul α corespunzător poziţiei de echilibru şi modulele reacţiunilor din A şi D.

Rezolvare. În A suprafaţa de sprijin este aceea a peretelui, verticală, deci suportul reacţiunii N_1 va fi orizontal. În D suprafaţa de sprijin este aceea a barei căci

peretele prezintă un colţ (punct singular). Reacţiunea N_2 va fi normală pe bară. Scriind ecuaţiile de proiecţie pe direcţiile Ax şi Ay şi ecuaţia de momente în raport cu A, obţinem

$$N_1-N_2 \sin\alpha=0,\ N_2\cos\alpha-G=0,\ N_2\frac{a}{\cos\alpha}-G\frac{l}{2}\cos\alpha=0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, se găseşte

$$\cos\alpha=\sqrt[3]{\frac{2a}{l}},\quad N_2=G\sqrt[3]{\frac{l}{2a}},\quad N_1=G\sqrt[3]{\frac{l}{2a}}\cdot\sqrt{1-\sqrt[3]{\frac{4a^2}{l^2}}}.$$

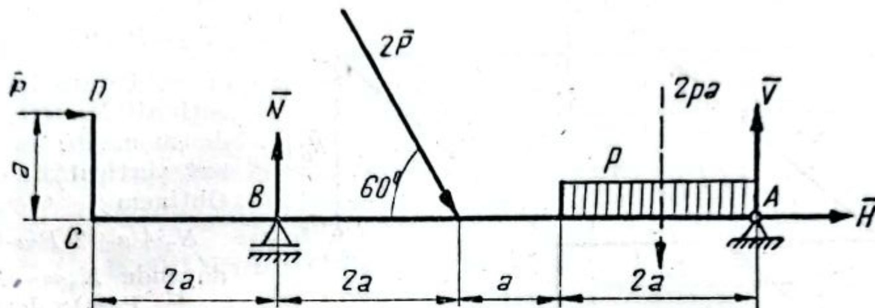


Fig. 7.7

2°. Să se determine reacţiunile din articulaţia A şi din reazemul simplu B pentru grinda cotită $ABCD$ încărcată aşa cum se arată în fig. 7.7. Discuţie.

Rezolvare. Se înlocuiesc: reazemul simplu B prin reacţiunea normală N şi articulaţia A prin reacţiunile H şi V. Sarcina uniform distribuită se înlocuieşte cu o sarcină concentrată $2pa$. Vom scrie o ecuaţie de proiecţii pe direcţia orizontală şi ecuaţii de momente în raport cu punctele B şi A. Obţinem

$$P+2\,P\cos 60°+H=0,$$
$$V\cdot 5\,a-Pa-2\,P\sin 60°\cdot 2\,a-p\cdot 2\,a\cdot 4\,a=0,$$
$$-N\cdot 5\,a-Pa+2\,P\sin 60°\cdot 3\,a+p\cdot 2\,a\cdot a=0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, se obţine

$$H=-2\,P,\quad V\approx 0{,}892\,P+1{,}6\,pa,\quad N\approx 0{,}838\,P+0{,}4\,pa.$$

Discuţie. Expresiile obţinute pentru V şi N sînt pozitive, deci sensurile indicate pe figură sînt cele reale. Scalarul reacţiunii H a rezultat negativ, deci sensul real este invers celui arătat în figură.

3°. Să se determine reacţiunile din încastrarea A a grinzii AB încărcată aşa cum se arată în fig. 7.8.

Rezolvare. Se înlocuieşte încastrarea cu reacţiunile H, V şi momentul $\mathcal{M}$. Vom înlocui şi sarcina uniform distribuită p cu o sarcină concentrată echivalentă $3\,pa$ aplicată la mijlocul porţiunii încărcate. Proiectînd pe o direcţie orizontală, apoi pe o direcţie verticală şi scriind o ecuaţie de momente în raport cu punctul A, se obţine sistemul:

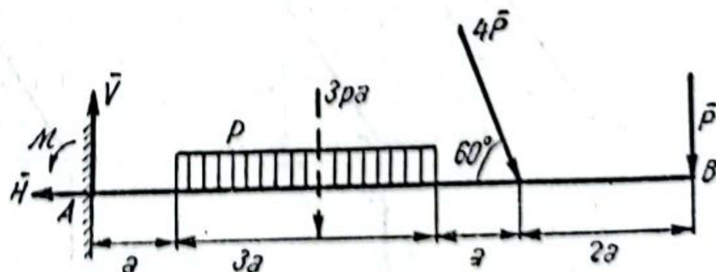


Fig. 7.8

$$-H+4\,P\cos 60°=0,\quad V-3\,pa-4\,P\sin 60°-P=0,$$
$$\mathcal{M}-3\,pa\cdot 2{,}5\,a-4\,P\sin 60°\cdot 5\,a-P\cdot 7\,a=0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii se obţine

$$H=2\,P,\quad V\approx 4{,}46\,P+3\,pa,\quad \mathcal{M}=23{,}4\,Pa+7{,}5\,pa^2.$$

Deoarece scalarii reacţiunilor au rezultat pozitivi, înseamnează că sensurile indicate în figură sînt cele reale.

4°. Se consideră placa omogenă pătrată de dimensiuni $4\,a \times 4\,a$ încărcată şi rezemată aşa cum se arată în fig. 7.9. Se cere să se determine cele şase reacţiuni $N_1, \ldots, N_6$.

Rezolvare. Pentru determinarea reacţiunii N_1 vom scrie o ecuaţie de momente în raport cu axa A_1A. Rezultă

$$P \cdot 2\,a - 2\,P \cdot 3\,a - N_1 \cdot 4\,a = 0, \text{ de unde } N_1 = -P.$$

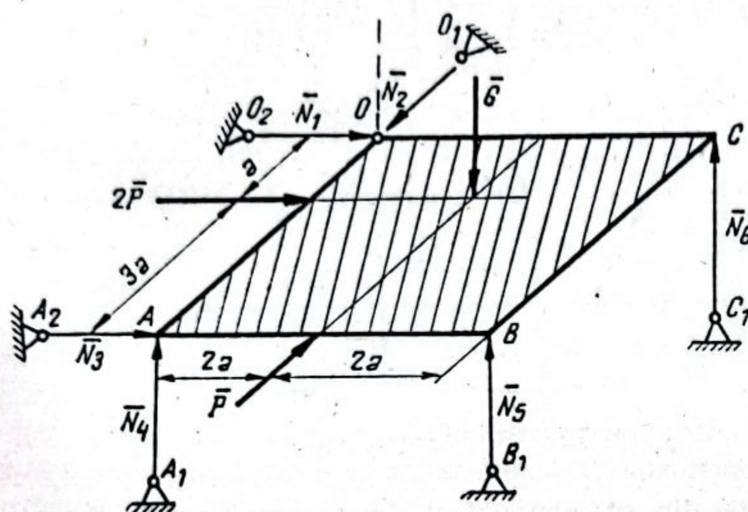


Fig. 7.9

Pentru determinarea reacţiunii N_2 proiectăm pe direcţia O_1O. Obţinem

$$N_2 - P = 0, \text{ de unde } N_2 = P.$$

Pentru determinarea reacţiunii N_3 scriem o ecuaţie de momente în raport cu o axă verticală trecînd prin O. Obţinem

$$N_3 \cdot 4\,a + 2\,P \cdot a + P \cdot 2\,a = 0,$$

de unde $N_3 = -P$.

Pentru determinarea reacţiunii N_4 scriem o ecuaţie de momente în raport cu axa BC. Obţinem

$$N_4 \cdot 4\,a - G \cdot 2\,a = 0, \text{ de unde } N_4 = \frac{G}{2}.$$

Pentru determinarea reacţiunii N_5 vom scrie o ecuaţie de momente în raport cu axa CA. Rezultă

$$N_5 \cdot 4\,a \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \text{ de unde } N_5 = 0.$$

Pentru determinarea reacţiunii N_6 vom scrie o ecuaţie de momente în raport cu axa AB. Se obţine

$$N_6 \cdot 4\,a - G \cdot 2\,a = 0, \text{ de unde } N_6 = \frac{G}{2}.$$

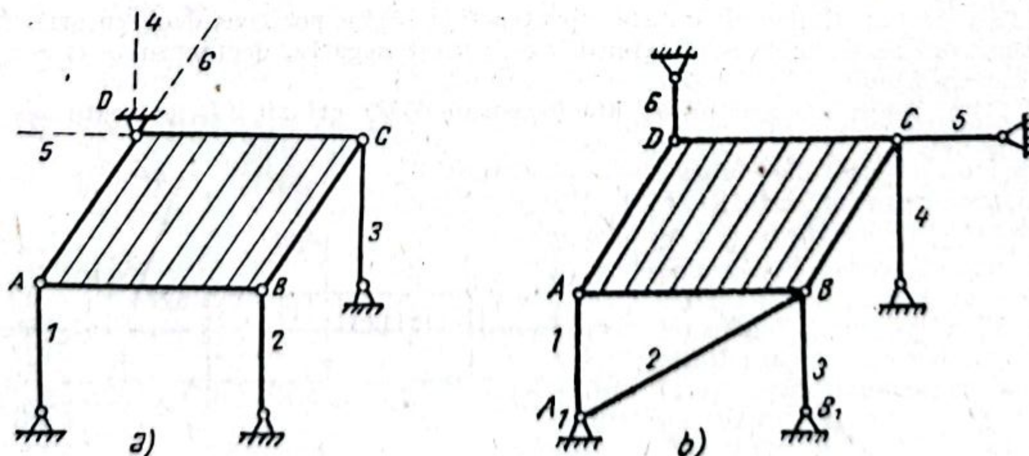


Fig. 7.10

Observaţie. Reacţiunile N_2, N_4, N_6, care au rezultat pozitive au sensurile indicate în figură, iar N_1 şi N_3 au sensuri contrarii celor indicate în fig. 7.9. Reacţiunea N_5 fiind nulă, bara B_1B ar putea fi înlăturată, bineînţeles numai pentru cazul încărcării arătate în figură.

5°. Să se arate că plăcile din fig. 7.10 nu se pot găsi în repaus pentru orice încărcare deoarece nu sînt *strict* imobilizate. Să se indice mişcările infinitezimale pe care le pot executa plăcile precum şi sistemele de forţe pentru care plăcile pot rămîne în repaus.

R e z o l v a r e. Placa din fig. 7.10, *a* nu este strict imobilizată, deoarece suporturile celor şase reacţiuni aparţin aceluiaşi complex de gradul I, ele fiind întîlnite la distanţă finită sau infinită de suportul reacţiunii N_4.

Rezultă că placa poate executa o mişcare de rotaţie infinitezimală în jurul acestei axe, neîmpiedicată de nici unul dintre reazeme. Placa rămîne în repaus pentru toate sistemele de forţe pentru care momentul rezultant în raport cu axa *4* este nul (de exemplu un sistem de forţe verticale). Reacţiunile rămîn însă nedeterminate.

Placa din fig. 7.10, *b* nu este strict imobilizată deoarece suporturile celor şase reacţiuni aparţin aceluiaşi complex de gradul I, ele fiind paralele cu un acelaşi plan ABA_1B_1. Rezultă că placa poate executa o mişcare de translaţie infinitezimală în direcţia normală pe acest plan, respectiv AD, mişcare ce nu este împiedicată de nici unul dintre reazeme. Placa rămîne în repaus pentru toate sistemele de forţe pentru care proiecţia rezultantei pe direcţia AD este nulă. Reacţiunile rămîn însă nedeterminate.

B. SOLIDUL SUPUS LA LEGĂTURI CU FRECARE

§ 7. **Frecările în cazul corpurilor rezemate.** În capitolul precedent au fost studiate legăturile fără frecare (ideale). În realitate apar întotdeauna frecări. Cauza este deformaţia corpurilor. Teoria frecărilor aparţine deci mecanicii corpurilor deformabile. În acest capitol vom studia numai aspectul general al problemei frecărilor.

Să considerăm un solid rigid care nu are altă legătură decît un reazem simplu în punctul O. Vom denumi punctul O, *punct teoretic de contact*. Sprijinul a două corpuri nu se poate face însă într-un singur punct. În realitate, în afară de punctul teoretic O mai există şi alte puncte A_i de contact în vecinătatea lui O, aceasta din cauza deformaţiei celor două corpuri (fig. 7.11).

Să aplicăm principiul forţelor de legătură pentru fiecare punct A_i în parte, înlocuind legătura geometrică în A_i cu o reacţiune $\bar{p}_i$.

Forţele de legătură $\bar{p}_i$ alcătuiesc un sistem al cărui torsor în raport cu punctul teoretic de contact O are componentele $(\bar{R}, \bar{M}_O)$. Să notăm cu $(\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{M}}_O)$ componentele torsorului forţelor exterioare calculat în raport cu acelaşi punct O.

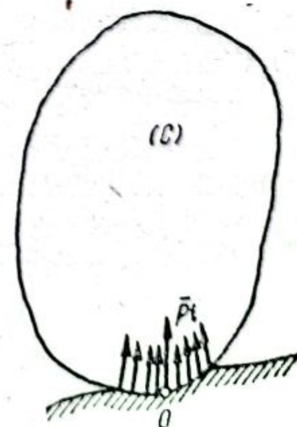


Fig. 7.11

Pentru echilibru este necesar ca

$$\bar{\mathcal{R}}+\bar{R}=0, \qquad \bar{\mathcal{M}}_O+\bar{M}_O=0. \qquad (7.21)$$

Să considerăm acum în punctul O un triedru ortogonal $Oxyz$ avînd axa Oz normală la suprafaţa teoretică de contact, iar axele Ox şi Oy în planul tangent la această suprafaţă. Să descompunem vectorii $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{M}}_O$ şi $\bar{R}$; $\bar{M}_O$ după axa Oz şi planul xOy.

Notăm componentele cu $\bar{\mathcal{R}}_z, \bar{\mathcal{R}}_t, \bar{\mathcal{M}}_z, \bar{\mathcal{M}}_t$ şi $\bar{R}_z, \bar{R}_t, \bar{M}_z, \bar{M}_t$.

Să analizăm rolul pe care-l îndeplineşte fiecare componentă în parte.

a) Componenta $\overline{\mathcal{R}}_z$ tinde să deplaseze solidul în direcţia axei Oz. Această tendinţă este împiedicată de componenta $\overline{R}_z$ pe care o vom denumi *reacţiune normală* şi o vom nota în cele ce urmează cu $\overline{N}$.

În cazul legăturii bilaterale, $\overline{N}$ poate avea orice sens. În cazul legăturii unilaterale, $\overline{N}$ nu poate avea decît un anumit sens. În ceea ce priveşte modulul acestei reacţiuni, se admite că poate fi oricît de mare (corpurile în contact sînt foarte rezistente). Reacţiunea normală este *caracteristică rezemării simple*, în sensul că nu se poate concepe o astfel de rezemare fără existenţa acestei reacţiuni.

b) Componenta $\overline{\mathcal{R}}_t$ are tendinţa de a deplasa corpul în planul tangent la suprafaţa de contact. Deplasarea aceasta poartă numele de *alunecare*.

Acestei tendinţe de deplasare i se opune o forţă $\overline{R}_t$ denumită *forţă de frecare de alunecare*. În cele ce urmează o vom nota cu $\overline{T}$.

Direcţia reacţiunii $\overline{T}$ este deci cuprinsă în planul tangent la suprafaţa teoretică de contact, sensul ei este invers tendinţei de alunecare. Experienţa arată că, pentru echilibru, mărimea ei nu poate depăşi o anumită valoare, T_{max}. Această valoare maximă depinde de natura suprafeţelor în contact şi de intensitatea reacţiunii normale $\overline{N}$. Ea poate fi exprimată sub forma stabilită anterior

$$|T_{max}|=\mu|N|, \tag{7.22}$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare. Acest coeficient nu are dimensiuni. Pentru echilibru, deci

$$|\overline{T}|\leqslant\mu|\overline{N}| \tag{7.23}$$

(v. şi cap. III, C. Statica punctului material supus la legături cu frecare).

c) Componenta $\overline{\mathcal{M}}_z$ reprezintă un cuplu care are tendinţa de a roti corpul în jurul unei axe normale la suprafaţa teoretică de contact. Această rotaţie poartă numele de *pivotare*. Tendinţei de pivotare i se opune un *cuplu* de moment $\overline{M}_z$, denumit *cuplu de frecare de pivotare*. Vom nota în cele ce urmează momentul acestui cuplu cu $\overline{M}_n$.

Experienţa arată că mărimea momentului $\overline{M}_n$ nu poate depăşi o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de natura suprafeţelor în contact şi de intensitatea reacţiunii normale $\overline{N}$. Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\overline{M}_{n\,max}|=\nu|\overline{N}|, \tag{7.24}$$

în care ν este *coeficientul de frecare de pivotare*. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\overline{M}_n|\leqslant\nu|\overline{N}|. \tag{7.25}$$

d) Componenta $\overline{\mathcal{M}}_t$ reprezintă un cuplu care are tendinţa de a roti corpul în jurul unei axe cuprinsă în planul tangent la suprafaţa de contact.

Această rotaţie poartă numele de *rostogolire*. Tendinţei de rostogolire i se opune un *cuplu* de moment $\overline{M}_t$ denumit *cuplu de frecare de rostogolire*.

Experienţa arată că mărimea momentului $\overline{M}_t$ nu poate depăşi o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de deformabilitatea suprafeţelor care mărginesc corpurile şi de intensitatea reacţiunii $\overline{N}$. Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\overline{M}_{t\,max}|=s\,|\overline{N}|, \tag{7.26}$$

în care s este *coeficientul de frecare de rostogolire*. Acest coeficient are dimensiunile unei lungimi. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\overline{M}_t|\leqslant s\,|\overline{N}|. \tag{7.27}$$

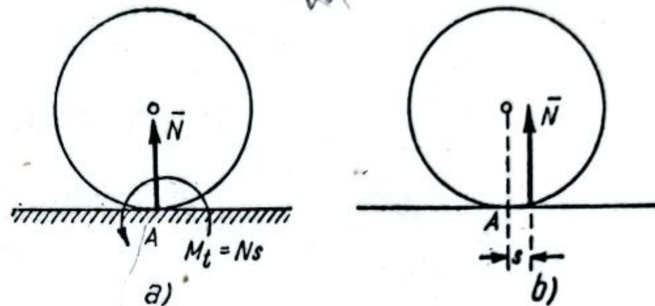


Fig. 7.12

O b s e r v a ţ i i. 1°. Coeficientul de frecare de rostogolire poate fi interpretat ca fiind distanţa maximă cu care se poate deplasa din punctul teoretic de contact suportul reacţiunii $\overline{N}$, paralel cu el însuşi, astfel încît solidul să nu se rostogolească. Această observaţie se bazează pe echivalenţa sistemelor de forţe din fig. 7.12, *a* şi *b*.

2°. Experienţele au arătat că valoarea coeficientului de frecare de rostogolire s depinde de raza roţii. Astfel, pentru cazul unei roţi rezemate pe un plan, $s=k\sqrt{r}$, adică acest coeficient este proporţional cu rădăcina pătrată a razei. După diferiţi cercetători, pentru oţel pe oţel, $k=0{,}0006-0{,}00066$. În formula de mai înainte r şi s se măsoară în metri. La roţile vehiculelor de cale ferată, pentru $r=0{,}5$ m, rezultă $s=0{,}05-0{,}055$ cm.

§ 8. **Frecarea în articulaţii şi lagăre.** Să considerăm fusul unui arbore care se reazemă într-un lagăr. Vom deosebi două cazuri, după cum lagărul este sau nu este strîns. În cazul cînd lagărul nu este strîns, contactul între fus şi lagăr se face, teoretic, într-un punct, iar practic pe o mică regiune în jurul punctului teoretic de contact; în cazul cînd lagărul este strîns, contactul între fus şi lagăr se face pe întreaga periferie.

a) *Lagărul nestrîns*. Să notăm cu r raza fusului şi cu A punctul teoretic de contact (fig. 7.13). Să presupunem că torsorul sistemului de forţe exterioare în raport cu punctul O, situat pe axa fusului roţii, are componentele $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}_O$; vom presupune că vectorul $\overline{\mathcal{R}}$ este situat într-un plan normal pe axa fusului, iar vectorul $\overline{\mathcal{M}}_O$ este dirijat chiar în lungul acestei axe.

Să considerăm şi torsorul forţelor de legătură în punctul teoretic de contact A între fus şi lagăr. Fie $\overline{N}$ reacţiunea normală, $\overline{T}$ forţa de frecare şi $\overline{\mathcal{M}}_t$ momentul cuplului de frecare de rostogolire. Vom scrie condiţiile de echilibru proiectînd pe Ax, Ay şi scriind ecuaţia de momente în raport cu punctul A

$$\left.\begin{aligned} &T-\mathcal{R}\sin\alpha=0,\\ &N-\mathcal{R}\cos\alpha=0,\\ &-\mathcal{M}_O+M_t+\mathcal{R}r\sin\alpha=0,\\ &M_t\leqslant Ns,\\ &T\leqslant\mu N. \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Din primele relații scoatem

$$T=\mathcal{R}\sin\alpha,\ N=\mathcal{R}\cos\alpha,\ M_t=\mathcal{M}_O-\mathcal{R}r\sin\alpha, \tag{7.29}$$

încît ultimele două inegalități se scriu

$$\mathcal{M}_O-\mathcal{R}r\sin\alpha\leqslant\mathcal{R}s\cos\alpha,\ \mathcal{R}\sin\alpha\leqslant\mu\mathcal{R}\cos\alpha, \tag{7.30}$$

sau

$$\mathcal{M}_O\leqslant\mathcal{R}r\left(\sin\alpha+\frac{s}{r}\cos\alpha\right),\ \operatorname{tg}\alpha\leqslant\mu. \tag{7.31}$$

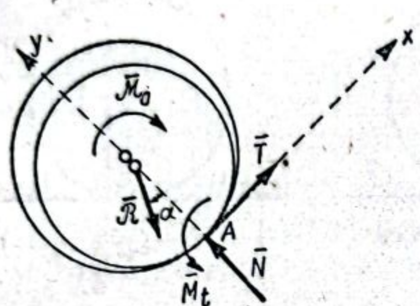


Fig. 7.13

La limită

$$\operatorname{tg}\alpha=\mu,\ \sin\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

și formula (7.31) devine

$$\mathcal{M}_O\leqslant\frac{\mu+\frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdot r\cdot\mathcal{R}, \tag{7.32}$$

sau încă, notînd:

$$\frac{\mu+\frac{s}{r}}{\sqrt{1+\mu^2}}=\mu', \tag{7.33}$$

se obține

$$\mathcal{M}_O\leqslant\mu' r\mathcal{R}, \tag{7.34}$$

unde μ' este *coeficientul de frecare în lagăr*.

Ținînd seama că $\bar{\mathcal{R}}=-\bar{R}$ și că în cazul unei articulații cilindrice

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2},$$

iar în cazul unei articulații sferice

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2},$$

expresia (7.32) a momentului cuplului de frecare în lagăr se mai scrie

$$\mathcal{M}_O\leqslant\mu' r\sqrt{R_x^2+R_y^2} \tag{7.35}$$

în cazul lagărelor și articulațiilor cilindrice, și

$$\mathcal{M}_O\leqslant\mu' r\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} \tag{7.36}$$

în cazul articulațiilor sferice.

b) *Lagărul strîns*. În acest caz, în fiecare punct de contact între fus și lagăr se va naște o reacțiune normală $\bar{N}_i$ și o reacțiune tangențială $\bar{T}_i$ (forță de frecare). Momentul de frecare în lagăr este

$$M_f=\Sigma T_i r=\Sigma\mu N_i r=\mu r\,\Sigma N_i=\mu\frac{\Sigma N_i}{R}\,rR=\mu' rR.$$

Pentru echilibru va trebui ca momentul motor $\mathcal{M}_O$ să îndeplinească condiția

$$\mathcal{M}_O \leqslant \mu' r R, \tag{7.37}$$

unde, de data aceasta

$$\mu' = \frac{\Sigma N_i}{R} \mu. \tag{7.38}$$

Relația dintre coeficientul de frecare în lagăr μ' și coeficientul de frecare μ depinde de legea de variație a reacțiunilor N_i în lungul regiunii de contact.

Observații. 1°. Frecarea în lagăre este un fenomen foarte complex. Studiul ei complet poate fi făcut în cadrul mecanicii corpurilor deformabile și în mecanica fluidelor, deoarece ea este într-o mare măsură un fenomen hidrodinamic, producîndu-se între pelicula de ulei care acoperă fusul și pelicula de ulei care acoperă lagărul. Ca atare, formulele date sînt cu totul aproximative și nu pot fi aplicate decît în cazurile cînd coeficientul de frecare μ' a fost determinat experimental. Trebuie să menționăm că acest coeficient variază mult cu viteza de rotație a lagărului.

2°. Se poate asimila frecarea în lagăr cu o deplasare a reacțiunii $\overline{R}$, paralelă cu ea însăși, cu o distanță egală cu μr. Cercul de rază μr, cu centrul în articulație, poartă numele de *cerc de frecare*. Pentru echilibru este deci necesar ca reacțiunea $\overline{R}$ să intersecteze sau, la limită, să fie tangentă cercului de frecare.

Aplicații. 6°. *Problema scării.* O bară AB grea situată într-un plan vertical se reazemă cu o extremitate A pe un plan orizontal și cu cealaltă extremitate B pe un plan vertical. Să se determine unghiul α pentru poziția de echilibru. Coeficienții de frecare de alunecare se vor lua μ_A și μ_B.

Vom alege axele Ox și Oy așa cum se arată în fig. 7.14, *a*. Se introduc în A și B reacțiunile normale $\overline{N}_A$ și $\overline{N}_B$ și forțele de frecare de alunecare $\overline{T}_A$ și $\overline{T}_B$. Condițiile de echilibru devin

$$\left.\begin{aligned} & N_B - T_A = 0, \\ & N_A + T_B - G = 0, \\ & Gl\cos\alpha - 2\,lN_B\sin\alpha - 2\,lT_B\cos\alpha = 0, \\ & T_A \leqslant \mu_A N_A, \quad T_B \leqslant \mu_B N_B. \end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

Din primele trei ecuații (7.39), exprimînd trei dintre necunoscute, de exemplu N_A, T_A și T_B în funcție de celelalte două (N_B și α), obținem

$$N_A = \frac{G}{2} + N_B \operatorname{tg}\alpha, \quad T_A = N_B, \quad T_B = \frac{G}{2} - N_B \operatorname{tg}\alpha. \tag{7.40}$$

Introducînd expresiile (7.40) în ultimele două inegalități din (7.39), obținem

$$N_B \leqslant \mu_A \left(\frac{G}{2} + N_B \operatorname{tg}\alpha\right), \quad \frac{G}{2} - N_B \operatorname{tg}\alpha \leqslant \mu_B N_B$$

care mai pot fi scrise sub forma

$$(1 - \mu_A \operatorname{tg}\alpha) N_B \leqslant \mu_A \frac{G}{2}, \quad \frac{G}{2} \leqslant (\mu_B + \operatorname{tg}\alpha) N_B. \tag{7.41}$$

Înmulţind inegalitatea a doua cu μ_A şi adunînd-o cu prima obţinem

$$(1-\mu_A \operatorname{tg}\alpha)\, N_B \leqslant \mu_A (\mu_B+\operatorname{tg}\alpha)\, N_B, \text{ de unde } \operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1-\mu_A\mu_B}{2\mu_A}. \tag{7.42}$$

Dacă notăm cu α_0 unghiul definit prin relaţia

$$\operatorname{tg}\alpha_0=\frac{1-\mu_A\mu_B}{2\mu_A} \tag{7.43}$$

putem avea următoarele cazuri:

$\alpha>\alpha_0$ echilibru, $\alpha<\alpha_0$ neechilibru; $\alpha=\alpha_0$ echilibru limită.

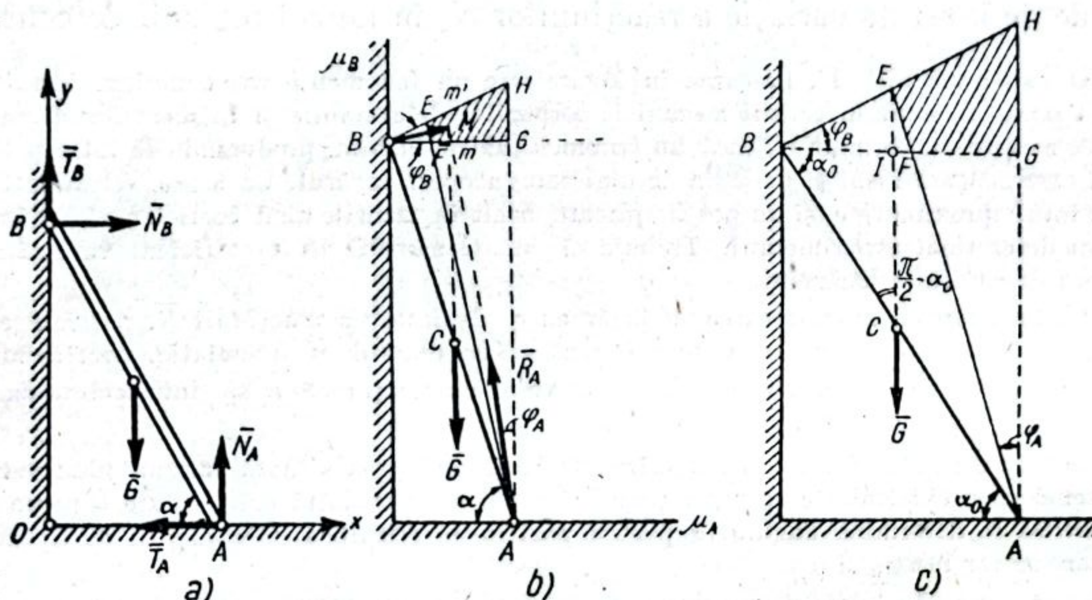


Fig. 7.14

Observaţie. Se poate da şi o soluţie grafică acestei probleme folosind noţiunea de unghi de frecare (v. cap. III, § 13). Să considerăm bara într-o poziţie oarecare; voim să verificăm dacă ea se găseşte în echilibru (fig. 7.14, *b*). Se duc normalele în *A* şi *B* şi două drepte *AF* şi *BH* care fac cu normalele în *A* şi *B* respectiv unghiurile de frecare φ_A şi φ_B definite prin relaţiile

$$\operatorname{tg}\varphi_A=\mu_A \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\varphi_B=\mu_B.$$

Ţinînd seama de tendinţa de alunecare a barei şi de sensurile forţelor de frecare, dreapta *AF* se va duce în stînga normalei din *A* şi dreapta *BH* se va duce deasupra normalei în *B*. Aceste drepte închid între ele un patrulater denumit *patrulaterul frecărilor* (haşurat în fig. 7.14, *b* şi *c*) care se bucură de proprietatea remarcabilă că, după cum este traversat sau nu de suportul greutăţii $\overline{G}$, bara este sau nu în echilibru.

Într-adevăr, să presupunem că suportul greutăţii $\overline{G}$ traversează patrulaterul (fig. 7.14, *b*). Alegînd un punct arbitrar *M* pe segmentul *mm'* putem descompune forţa $\overline{G}$ după direcţiile *MA* şi *MB*. Cele două componente, cu sens opus, $\overline{R}_A$ şi $\overline{R}_B$, pot fi reacţiuni în *A* şi *B* deoarece suporturile lor fac cu normalele respective unghiuri mai mici decît unghiurile de frecare, φ_A şi φ_B. Problema determinării reacţiunilor admite o infinitate de soluţii, deoarece există o infinitate de puncte *M* pe segmentul *mm'*.

Dacă suportul reacţiunii nu traversează patrulaterul frecărilor, atunci nu se poate găsi nici un punct *M* pe suportul greutăţii $\overline{G}$ astfel încît *MA* şi *MB* să facă cu normalele în *A* şi *B* unghiuri mai mici decît φ_A şi φ_B, deci echilibrul este imposibil.

Cazul limită de echilibru se află cînd suportul forţei $\overline{G}$ trece prin vîrful *E* al patrulaterului (fig. 7.14, *c*). În acest caz putem determina unghiul limită observînd relaţiile

$$BE\cos\varphi_B + AE\sin\varphi_A = l\cos\alpha_0 \quad \text{şi} \quad AE\cos\varphi_A - BE\sin\varphi_B = 2\,l\sin\alpha_0$$

rezultate din proiecţia conturului ABE pe axele Ox şi Oy. Apoi

$$2\ \mathrm{tg}\ \alpha_0=\frac{AE\cos\varphi_A-BE\sin\varphi_B}{BE\cos\varphi_B}=\frac{AE\cos\varphi_A}{BE\cos\varphi_B}-\mathrm{tg}\ \varphi_B=\frac{\cos\varphi_B\cos\varphi_A}{\sin\varphi_A\cos\varphi_B}-\mathrm{tg}\ \varphi_B,$$

sau

$$2\ \mathrm{tg}\ \alpha_0=\mathrm{cotg}\ \varphi_A-\mathrm{tg}\ \varphi_B=\frac{1}{\mu_A}-\mu_B=\frac{1-\mu_A\mu_B}{\mu_A},\quad \mathrm{tg}\ \alpha_0=\frac{1-\mu_A\mu_B}{2\mu_A}.$$

Am regăsit astfel rezultatul stabilit pe cale analitică (7.43).

7°. *Problema roţilor*. Să studiem echilibrul unor roţi pe un plan înclinat, cunoscînd raza r a roţilor şi coeficienţii de frecare de alunecare μ şi de rostogolire s. Considerăm, pe rînd, cazul roţii trase şi cazul roţii motoare.

a) *Roata trasă* (fig. 7.15). Introducem în punctul teoretic de contact forţa de frecare $\overline{T}$ şi cuplul de frecare de rostogolire de moment $\overline{M}_t$. Condiţiile de echilibru sînt

$$F-G\sin\alpha-T=0,\quad N-G\cos\alpha=0,\quad -Fr+Gr\sin\alpha+M_t=0,\quad T\leqslant\mu N,\quad M_t\leqslant Ns.$$

Din primele trei ecuaţii deducem $T=F-G\sin\alpha$, $N=G\cos\alpha$, $M_t=(F-G\sin\alpha)r$. Condiţiile de echilibru devin

$$F-G\sin\alpha\leqslant\mu G\cos\alpha,\quad (F-G\sin\alpha)\,r\leqslant Gs\cos\alpha,$$

sau

$$F\leqslant G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha),\quad F\leqslant G\left(\sin\alpha+\frac{s}{r}\cos\alpha\right). \tag{7.44}$$

Să admitem

$$G(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)>G\left(\sin\alpha+\frac{s}{r}\cos\alpha\right)$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru,

$$\mu>\frac{s}{r}. \tag{7.45}$$

Cînd F creşte, roata îşi va pierde echilibrul rostogolindu-se. Dacă $\mu<\frac{s}{r}$, roata îşi va pierde echilibrul alunecînd, iar dacă $\mu=\frac{s}{r}$, roata va părăsi poziţia de echilibru alunecînd şi rostogolindu-se în acelaşi timp.

Mt + GrΛsinα − Fr = 0

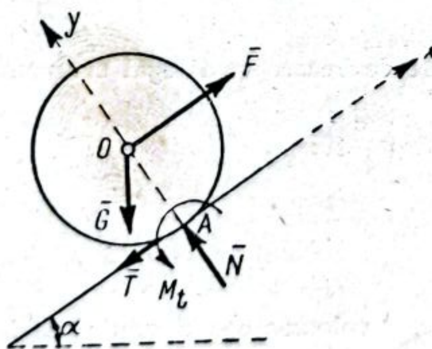


Fig. 7.15

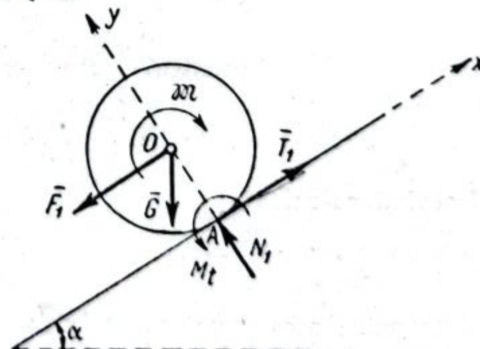


Fig. 7.16

Observaţie. Pentru valorile practice $\mu>\frac{s}{r}$, se citează totuşi cazuri cînd, pentru r foarte mic, corpul alunecă: de exemplu dacă se dă drumul unui ac pe un plan înclinat acesta va aluneca înainte de a începe să se rostogolească.

b) *Roata motoare* (fig. 7.16). Introducem în punctul teoretic de contact reacţiunea normală $\overline{N}_1$, forţa de frecare $\overline{T}_1$ şi cuplul de frecare de rostogolire de moment $\overline{M}_t$. Forţa

de frecare este dirijată în sensul pozitiv al axei Ox, deoarece tendinţa de alunecare este în sensul negativ al axei, din cauza forţei de tracţiune $\bar{F}_1$. Sensul de înaintare al roţii este în sensul pozitiv al axei Ox. S-a notat cu $\mathfrak{M}$ momentul cuplului motor.

Condiţiile de echilibru sînt

$$T_1-F_1-G_1 \sin \alpha=0, \quad N_1-G_1 \cos \alpha=0,$$
$$F_1 r+G_1 r \sin \alpha+M_t-\mathfrak{M}=0, \tag{7.46}$$
$$T_1 \leqslant \mu N_1, \quad M_t \leqslant s N_1.$$

Din primele trei ecuaţii deducem

$$T_1=F_1+G_1 \sin \alpha; \; N_1=G_1 \cos \alpha, \; M_t=\mathfrak{M}-(F_1+G_1+\sin \alpha) r.$$

Atunci condiţiile de echilibru devin

$$F_1+G_1 \sin \alpha \leqslant \mu G_1 \cos \alpha, \qquad \mathfrak{M}-(F_1+G_1 \sin \alpha) r \leqslant s G_1 \cos \alpha,$$

sau încă

$$F_1 \leqslant G_1(\mu \cos \alpha-\sin \alpha), \qquad \mathfrak{M} \leqslant F_1 r+G_1(r \sin \alpha+s \cos \alpha). \tag{7.47}$$

Presupunînd prima condiţie îndeplinită şi admiţînd că $\mathfrak{M}$ creşte, roata motoare se va pune în mişcare rostogolindu-se fără să alunece. Dacă însă prima condiţie nu este îndeplinită roata motoare se va pune în mişcare alunecînd şi rostogolindu-se în acelaşi timp (va ,,patina").

8°. **Frecare de pivotare în cazul unui arbore vertical.** Să considerăm un arbore cilindric de rază r şi de greutate G (fig. 7.17). Presupunem coeficientul de frecare μ, între arbore şi lagăr, acelaşi pe întreaga suprafaţă de rezemare şi admitem că presiunea pe suprafaţa de rezemare a arborelui este constantă. Rezultă

$$p=\frac{G}{\pi r^2}.$$

Pe un element de suprafaţă $dA=\rho d\rho \cdot d\theta$ se va exercita o forţă normală

$$p dA=\frac{G}{\pi r^2} \rho d\rho \, d\theta$$

şi o forţă de frecare, tangentă la un cerc de rază ρ

$$\mu p \, dA=\frac{\mu G}{\pi r^2} \rho d\rho \, d\theta.$$

Momentul faţă de centrul O al tuturor acestor forţe de frecare va fi egal cu momentul cuplului de pivotare

$$M_n=\iint \rho \mu p \, dA=\frac{\mu G}{\pi r^2} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta,$$

sau, efectuînd calculele,

$$M_n=\frac{2}{3} \mu G r. \tag{7.48}$$

Comparînd acest rezultat cu formula (7.25) deducem valoarea coeficientului de frecare de pivotare pentru un arbore de secţiune circulară

$$\nu=\frac{2}{3} \mu r. \tag{7.49}$$

Observaţii. 1°. În cazul unui arbore gol în interior, notînd cu r_1 şi r_2 cele două raze, în urma efectuării calculelor rezultă

$$M_n=\frac{2}{3} \mu G \frac{r_2^3-r_1^3}{r_2^2-r_1^2}, \tag{7.50}$$

deci

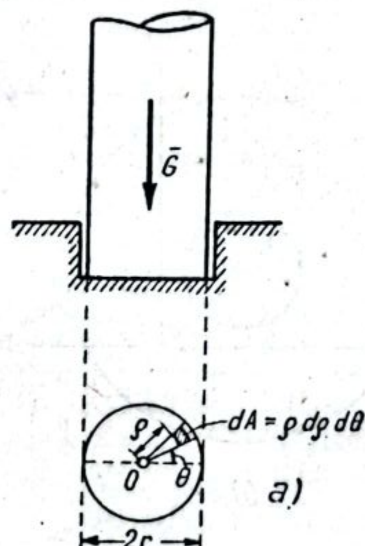
$$\nu=\frac{2}{3}\mu\,\frac{r_2^3-r_1^3}{r_2^2-r_1^2}\,. \qquad (7.51)$$

2°. Ipotezele care au stat la baza stabilirii formulelor (7.49) şi (7.51) pentru coeficientul de frecare de pivotare şi anume acelea privitoare la repartizarea uniformă a presiunilor pe suprafaţa de rezemare şi la invariabilitatea coeficientului de frecare de alunecare μ nu sînt îndeplinite riguros în practică.

Cauzele sînt: neregularităţile inevitabile ale suprafeţelor în contact, deformaţiile celor două corpuri în contact, variaţia coeficientului de frecare de alunecare μ cu viteza, prezenţa unui strat de lubrifiant între suprafeţele în contact etc.

Din această cauză, coeficientul de frecare de pivotare ν şi coeficientul mediu de frecare de alunecare μ trebuie determinaţi pe cale experimentală.

9°. Se consideră roata din fig. 7.18 de rază R acţionată de greutatea G şi de forţa orizontală F. Cunoscînd coeficientul de frecare μ_1 în lagăr şi raza r a fusului roţii, se cere să se determine limitele între care poate varia intensitatea forţei F, astfel încît roata să stea în repaus.



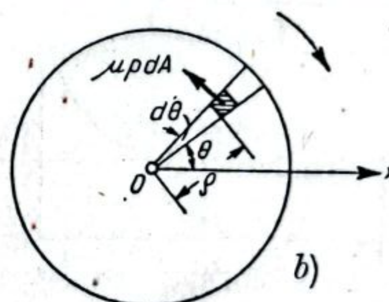


Fig. 7.17

Se va compara cu cazul cînd nu există frecare. Se va da şi o soluţie grafică, utilizînd cercul frecărilor.

R e z o l v a r e. Înlăturînd lagărul vom introduce o reacţiune orizontală H, una verticală V şi un cuplu de frecare, de moment M_f. Scriind ecuaţiile de proiecţii şi de momente şi condiţia de echilibru pentru momentul de frecare obţinem

$$-H+F=0,\ V-G=0,\ M_f+GR-FR=0,$$

$$-\mu_1 r_1\sqrt{H^2+V^2}\leqslant M_f\leqslant\mu_1 r\sqrt{H^2+V^2}.$$

S-a considerat o dublă inegalitate, deoarece există două posibilităţi pentru sensul de rotaţie.

Din primele trei ecuaţii deducem

$$H=F,\ V=G,\quad M_f=(F-G)R,$$

astfel încît dubla inegalitate devine

$$-\mu_1 r\sqrt{F^2+G^2}\leqslant(F-G)R\leqslant\mu_1 r\sqrt{F^2+G^2}.$$

Se obţine în cele din urmă inegalitatea

$$(F-G)^2R^2\leqslant\mu_1^2r^2(F^2+G^2),$$

sau

$$(R^2-\mu_1^2r^2)F^2-2\,GR^2F+(R^2-\mu_1^2r^2)G^2\leqslant 0.$$

Admițînd $R^2-\mu_1^2r^2>0$ (în caz contrar roata se blochează), rezultă

$$F_1 \leqslant F \leqslant F_2,$$

unde forța maximă F_2 și forța minimă F_1 au expresiile

$$F_2=\frac{R^2+\sqrt{\mu_1^2\, r^2(2R^2-\mu_1^2\, r^2)}}{R^2-\mu_1^2\, r^2}, \quad F_1=\frac{R^2-\sqrt{\mu_1^2\, r^2(2R^2-\mu_1^2\, r^2)}}{R^2-\mu_1^2\, r^2}.$$

Forța F_0 corespunzătoare cazului cînd se neglijează frecarea în lagăr se obține din expresia lui F_1 sau F_2, făcînd $\mu_1=0$. Rezultă $F_0=G$.

Fig. 7.18

Soluția grafică este arătată în fig. 7.18, *b*. Se prelungesc suporturile forțelor $\overline{F}$ și $\overline{G}$ pînă ce se întîlnesc în A. Se construiește cercul de frecare, cu centrul în O și avînd raza $\mu_1 r$. Pentru echilibru va trebui ca suportul rezultantei forțelor date, $\overline{F}$ și $\overline{G}$, să întîlnească cercul de frecare iar, la limită, să fie tangent acestui cerc. Din A se vor duce tangentele la cercul de frecare. Vom completa paralelogramul forțelor $\overline{F}$ și $\overline{G}$ (în cazul de față un dreptunghi) ducînd o paralelă la suportul lui $\overline{F}$, prin vîrful vectorului $\overline{G}$, apoi ducînd paralele la $\overline{G}$ prin vîrful vectorului rezultant. Considerînd pozițiile cînd vectorul rezultant este tangent cercului frecărilor și poziția cînd suportul vectorului rezultant trece prin centrul O, obținem pentru F valorile: maximă (F_2), minimă (F_1) și cea corespunzătoare cazului fără frecare (F_0).

VIII. STATICA SISTEMELOR

§ 1. Sisteme de puncte materiale. Forțe interioare și exterioare. Fie (A) un sistem de puncte materiale $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dacă aceste puncte interacționează mecanic, atunci (A) formează un sistem mecanic de puncte materiale. Ne vom ocupa în cele ce urmează de astfel de sisteme, pe care le vom numi pe scurt *sisteme de puncte materiale*.

Forțele care acționează sistemul (A) de puncte materiale, pot fi grupate în două categorii:

a) Componenta $\overline{\mathcal{R}}_z$ tinde să deplaseze solidul în direcția axei Oz. Această tendință este împiedicată de componenta $\overline{R}_z$ pe care o vom denumi *reacțiune normală* și o vom nota în cele ce urmează cu $\overline{N}$.

În cazul legăturii bilaterale, $\overline{N}$ poate avea orice sens. În cazul legăturii unilaterale, $\overline{N}$ nu poate avea decît un anumit sens. În ceea ce privește modulul acestei reacțiuni, se admite că poate fi oricît de mare (corpurile în contact sînt foarte rezistente). Reacțiunea normală este *caracteristică rezemării simple*, în sensul că nu se poate concepe o astfel de rezemare fără existența acestei reacțiuni.

b) Componenta $\overline{\mathcal{R}}_t$ are tendința de a deplasa corpul în planul tangent la suprafața de contact. Deplasarea aceasta poartă numele de *alunecare*.

Acestei tendințe de deplasare i se opune o forță $\overline{R}_t$ denumită *forța de frecare de alunecare*. În cele ce urmează o vom nota cu $\overline{T}$.

Direcția reacțiunii $\overline{T}$ este deci cuprinsă în planul tangent la suprafața teoretică de contact, sensul ei este invers tendinței de alunecare. Experiența arată că, pentru echilibru, mărimea ei nu poate depăși o anumită valoare, T_{max}. Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale $\overline{N}$. Ea poate fi exprimată sub forma stabilită anterior

$$|T_{max}|=\mu|N|, \tag{7.22}$$

în care μ este coeficientul de frecare de alunecare. Acest coeficient nu are dimensiuni. Pentru echilibru, deci

$$|\overline{T}|\leqslant\mu|\overline{N}| \tag{7.23}$$

(v. și cap. III, C. Statica punctului material supus la legături cu frecare).

c) Componenta $\overline{\mathcal{M}}_z$ reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe normale la suprafața teoretică de contact. Această rotație poartă numele de *pivotare*. Tendinței de pivotare i se opune un *cuplu* de moment $\overline{M}_z$, denumit *cuplu de frecare de pivotare*. Vom nota în cele ce urmează momentul acestui cuplu cu $\overline{M}_n$.

Experiența arată că mărimea momentului $\overline{M}_n$ nu poate depăși o anumită valoare maximă. Această valoare maximă depinde de natura suprafețelor în contact și de intensitatea reacțiunii normale $\overline{N}$. Ea poate fi exprimată sub forma

$$|\overline{M}_{n\,max}|=\nu|\overline{N}|, \tag{7.24}$$

în care ν este *coeficientul de frecare de pivotare*. Pentru echilibru este necesar ca

$$|\overline{M}_n|\leqslant\nu|\overline{N}|. \tag{7.25}$$

d) Componenta $\overline{\mathcal{M}}_t$ reprezintă un cuplu care are tendința de a roti corpul în jurul unei axe cuprinsă în planul tangent la suprafața de contact.

O legătură poate fi interioară sau exterioară unui sistem de puncte (A), după cum ambele puncte între care se exercită, sau numai unul dintre acestea, fac parte din sistemul (A).

Legăturile unui sistem (A) de n puncte materiale se pot exprima prin relații scalare între coordonatele acestor puncte. Fie m numărul acestor relații. Dacă aceste relații sînt independente între ele, numărul parametrilor independenți ai sistemului va fi egal cu $3n-m$. Se spune în acest caz, că sistemul (A) are $3n-m$ grade de libertate.

Legăturile pot fi înlocuite prin forțe de legătură, conform principiului forțelor de legătură, enunțat în cap. III, § 5.

§ 3. **Echilibrul sistemelor de puncte.** Un sistem de puncte materiale este în echilibru, dacă fiecare punct material este în echilibru.

Rezultă că sistemul (A) de puncte materiale va fi în echilibru dacă

$$\overline{F}_i+\sum_{j=1}^{n}\overline{F}_{ij}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots\ n;\ i\neq j), \tag{8.3}$$

unde cu $\overline{F}_i$ am notat forțele exterioare și cu $\overline{F}_{ij}$ forțele interioare.

Putem deosebi două categorii de probleme relativ la echilibrul sistemelor de puncte:

a) Fiind date pozițiile punctelor care formează un sistem (A) în echilibru, se cere să se determine forțele care acționează acest sistem.

b) Fiind date forțele care acționează sistemul (A) de puncte, să se determine poziția de echilibru a acestui sistem.

Condițiile (8.3) de echilibru sînt echivalente cu $3n$ relații scalare. În cazul sistemelor cu legături, numărul parametrilor geometrici este egal cu $3n-m$ dacă legăturile sînt date prin m relații scalare independente. Urmează că dintre cele $3n$ ecuații de echilibru, numai $3n-m$ vor servi la determinarea poziției sistemului, iar restul de m ecuații se vor utiliza pentru determinarea forțelor de legătură.

Se observă că problema, astfel enunțată în cazul cel mai general, este o problemă mixtă în raport cu clasificarea menționată anterior. Într-adevăr, în acest caz, este necesar să se determine atît poziția sistemului de puncte, cît și forțele de legătură respective.

Nu totdeauna sistemul de $3n$ ecuații liniare scalare, echivalent cu (8.3), este compatibil și determinat.

Un sistem de n puncte, pentru care cele $3n$ ecuații scalare de echilibru permit un sistem de $3n$ soluții finite și bine determinate, se numește *sistem static determinat*.

§ 4. **Teorema solidificării. Teorema echilibrului părților.** Relația (8.3) ne arată că toate forțele care acționează asupra punctelor sistemului (A) formează, în cazul echilibrului, un sistem de forțe, al cărui torsor este nul pentru orice punct al spațiului, adică

$$\tau(\overline{F}_i)+\tau(\overline{F}_{ij})=0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{8.4}$$

Scanned with CamScanner

Doarece însă torsorul forţelor interioare este nul, rezultă

$$\tau(\overline{F}_i)=0. \tag{8.5}$$

Urmează că torsorul forţelor exterioare, efectiv aplicate şi de legătură, care acţionează un sistem de puncte în echilibru, este nul.

În cazul rigidului, condiţia (8.5) era necesară şi suficientă pentru echilibru (v. cap. VI, § 1). În cazul unui sistem de puncte materiale ea este *necesară* deoarece a fost dedusă din condiţiile de echilibru (8.3). În general ea nu este şi suficientă. Rezultă următoarea teoremă:

Teorema solidificării. Condiţiile de echilibru ale rigidului sînt necesare şi pentru un sistem de puncte materiale. În general ele nu sînt şi suficiente.

Să considerăm că sistemul (A) de n puncte materiale este format din l subsisteme (A_h), $(h=1, 2, \ldots, l)$.

Conform definiţiei echilibrului unui sistem de puncte materiale, dacă sistemul (A) este în echilibru, atunci fiecare punct al său trebuie să fie în echilibru. Însă subsistemele (A_h) sînt formate din punctele sistemului (A). Rezultă că în acest caz şi fiecare subsistem (A_h) trebuie să fie în echilibru. Se poate deci enunţa următoarea *teoremă a echilibrului părţilor: dacă un sistem de puncte libere sau cu legături, se află în echilibru sub acţiunea unor forţe, atunci o parte oarecare din acest sistem va fi de asemenea în echilibru sub acţiunea forţelor corespunzătoare acestei părţi.*

§ 5. **Sisteme de corpuri rigide.** Un corp rigid poate fi considerat ca un sistem rigid de puncte materiale. Datorită rigidităţii sistemului, distanţa dintre două puncte oarecare ale acestui sistem rămîne constantă.

Un sistem (C) de corpuri rigide $C_i (i=1, 2, \ldots, n)$ poate fi considerat ca un sistem de puncte materiale, divizat în subsisteme rigide, fiecare dintre aceste subsisteme alcătuind unul dintre corpurile rigide C.

Forţele care acţionează sistemul (C) pot fi grupate în *forţe interioare*, reprezentînd interacţiunea mecanică dintre punctele diferitelor corpuri C_i şi în *forţe exterioare* sistemului (C). Forţele interioare vor satisface, bineînţeles, relaţiile (8.1) şi (8.2).

S-a arătat anterior că poziţia unui corp rigid liber depinde de şase parametri scalari (cap. VI, § 5). Urmează că poziţia sistemului, (C) de n corpuri libere, va fi determinată prin $6n$ parametri scalari. Un sistem de n corpuri rigide libere are deci $6n$ *grade de libertate*.

Legăturile între corpurile sistemului (C), exprimate prin relaţii între coordonatele punctelor corpurilor C_i, vor restrînge gradele de libertate ale sistemului de corpuri. Dacă aceste relaţii sînt independente şi sînt în număr de p, numărul gradelor de libertate ale sistemului (C) va fi $6n-p$.

Deoarece un corp rigid liber are şase grade de libertate, între punctele a două corpuri rigide nu pot exista mai mult de şase relaţii distincte de legătură. Aceste legături pot fi înlocuite cu forţe de legătură, pe baza axiomei forţelor de legătură.

Considerînd sistemul (C) de corpuri rigide ca un sistem de puncte materiale, format din toate punctele acestor corpuri, vom putea spune, pe baza teoremei echilibrului părţilor şi a relaţiei (8.3) că sistemul (C) este

în echilibru dacă torsorul forțelor, care acționează fiecare corp în parte, este nul pentru oricare punct al spațiului. Aceste condiții de echilibru sînt echivalente cu $6n$ ecuații scalare de echilibru.

Dacă cele $6n$ ecuații scalare de echilibru formează un sistem compatibil și determinat, sistemul respectiv de corpuri este un sistem static determinat.

Teorema solidificării și teorema echilibrului părților se pot enunța de asemenea pentru sistemele de corpuri rigide.

Aplicații. 1°. Să se determine reacțiunile din reazeme și forțele interioare din articulațiile grinzii din fig. 8.1 (grindă Gerber).

Rezolvare. Grinda este de fapt un sistem, care se poate descompune în patru grinzi independente așa cum se arată în fig. 8.1, *b*. Separînd grinzile vom introduce reacțiunile V_1, V_3, V_4, V_7, V_8, H_8 și forțele interioare V_2, H_2, V_5, H_5, V_6, H_6 (fig. 8,1, *c*). Scriind ecuațiile de proiecții și de momente pentru fiecare grindă în parte vom obține

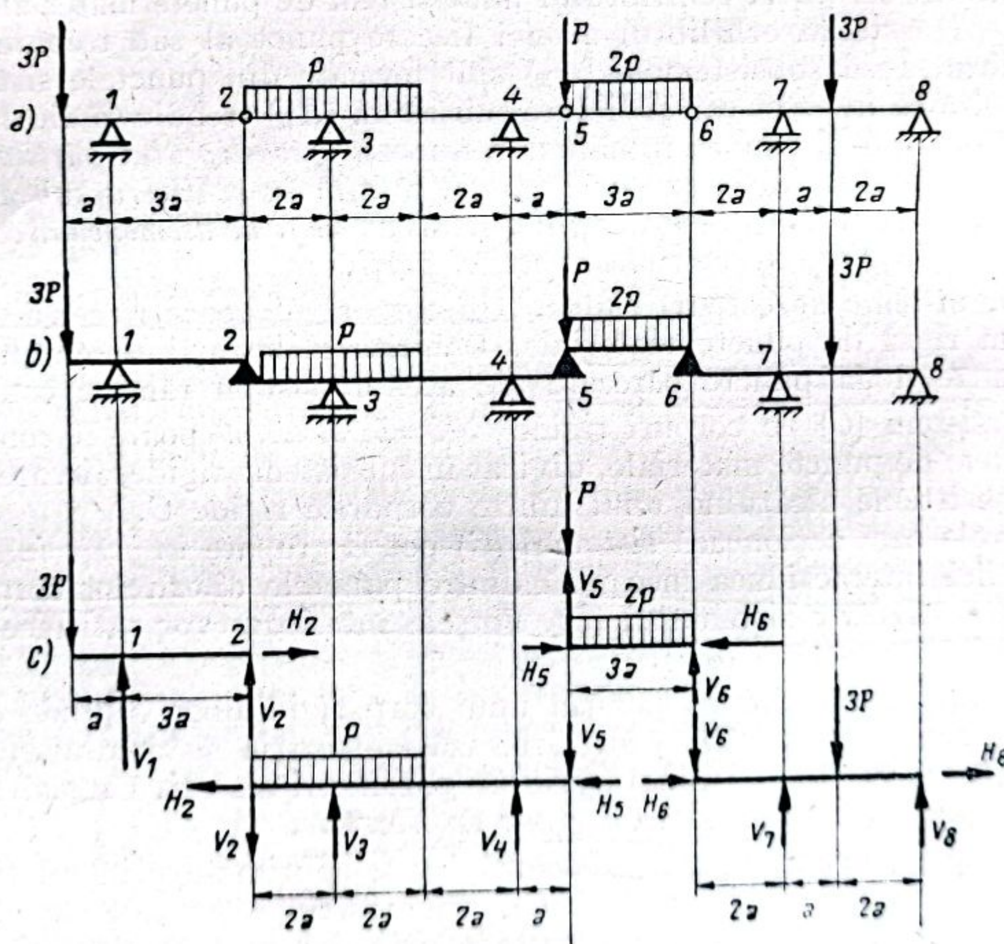


Fig. 8.1

pentru grinda 1–2: $H_2=0$, $V_1+V_2-3P=0$, $3P\cdot 4a-V_1\cdot 3a=0$;

pentru grinda 2–3–4–5: $-H_2-H_5=0$, $V_3+V_4-V_2-V_5-p\cdot 4a=0$,

$$V_2\cdot 6a+p\cdot 4a\cdot 4a-V_3\cdot 4a-V_5\cdot a=0;$$

pentru grinda 5–6: $H_5-H_6=0$, $V_5+V_6-P-2p\cdot 3a=0$,

$$-V_5\cdot 3a+P\cdot 3a+2p\cdot 3a\cdot 1{,}5a=0;$$

pentru grinda 6—7—8: $H_6+H_8=0,\ V_7+V_8-V_6-3P=0,$

$$V_6\cdot 5a-V_7\cdot 3a+3P\cdot 2a=0.$$

Rezolvînd acest sistem de 12 ecuaţii cu 12 necunoscute se găseşte

$$H_2=H_5=H_6=H_8=0,\ V_1=4P,\ V_2=-P,\ V_5=P+3\,pa,\ V_6=3pa,$$

$$V_7=2P+5pa,\ V_8=P-2pa,\ V_3=3{,}25\,pa-1{,}75P,\ V_4=3{,}75\,pa+1{,}75P.$$

Observaţie. Sensurile pentru V_1, V_5, V_6, V_7, V_4, corespund celor de pe figură. Sensul pentru V_2 este invers celui arătat în figură. Pentru reacţiunile V_8 şi V_3 sensul depinde de valorile relative ale mărimilor P şi pa.

2°. Se consideră sistemul format din barele OA şi OB de lungimi l şi greutăţi G, articulate între ele în O şi rezemate cu frecare pe un plan orizontal în A (coeficient de frecare μ_1) şi în B (coeficientul de frecare μ_2) (fig. 8.2). Se cere să se determine unghiul α corespunzător poziţiei limită de echilibru. (Se neglijează frecarea din articulaţia O).

Rezolvare. Separăm cele două bare OA şi OB din sistemul dat şi introducem forţele date (greutăţile G), reacţiunile (normale N_1 şi N_2 şi tangenţiale de frecare, T_1 şi T_2) şi forţele interioare (H şi V din articulaţia O) (fig. 8.2, b). Vom scrie ecuaţiile de proiecţii şi de momente (în raport cu O) pentru ambele bare. Obţinem

$$\text{pentru bara } OA:\ T_1-H=0,\ N_1+V-G=0,\ T_1 l\sin\alpha+G\frac{l}{2}\cos\alpha-N_1 l\cos\alpha=0;$$

$$\text{pentru bara } OB:\ -T_2+H=0,\ N_2-V-G=0,\ -T_2 l\sin\alpha-G\frac{l}{2}\cos\alpha+N_2 l\cos\alpha=0. \tag{1}$$

S-au obţinut şase ecuaţii cu şapte necunoscute (N_1, T_1, N_2, T_2, H, V, α). Problema este nedeterminată. Într-adevăr există o infinitate de poziţii de echilibru posibile. Dacă ne interesează poziţia de echilibru la limită va trebui să scriem că una din forţele de frecare, sau amîndouă, au atins valoarea limită. Acestor posibilităţi de scriere a condiţiilor suplimentare de echilibru, le corespund trei posibilităţi de pierdere a echilibrului, reprezentate în fig. 8.3, a, b şi c. Dacă se deplasează ambele capete A şi B (fig. 8.3, a), atunci avem, ca ecuaţii suplimentare

$$T_1=\mu_1 N_1,\qquad T_2=\mu_2 N_2.$$

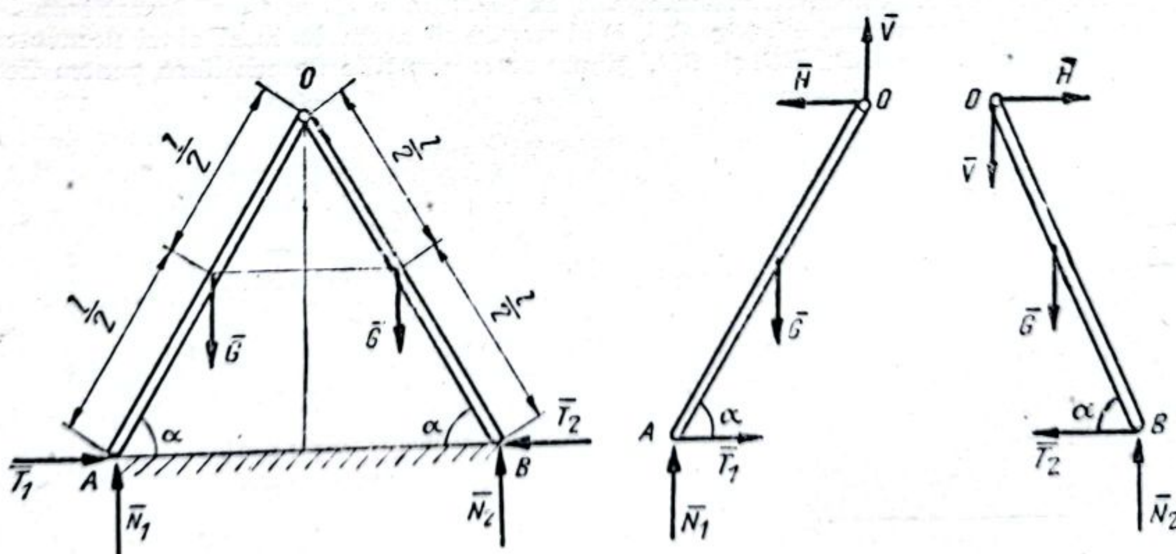


Fig. 8.2

Adăugînd aceste două ecuaţii, la cele şase ecuaţii (1) obţinem soluţiile: $N_1=N_2=G$, $V=0$, $H=T_1=T_2=\mu_1 G=\mu_2 G$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\mu_1}{2}=\frac{\mu_2}{2}$. Această pierdere respectiv a poziţiei de echilibru nu este posibilă decît dacă $\mu_1=\mu_2$, deci dacă cei doi coeficienţi de frecare sînt egali.

Dacă se deplasează numai capătul B (fig. 8.3, b) atunci avem condiţiile suplimentare

$$T_1<\mu_1 N_1 \qquad T_2=\mu_2 N_2.$$

Aceste condiţii, adăugate la cele şase ecuaţii (1) conduc la următoarele soluţii:

$$N_1=N_2=G,\ V=0,\ H=T_1=T_2=\mu_2 G,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\mu_2}{2},\ \mu_2 G<\mu_1 G,$$

respectiv $\mu_2<\mu_1$. Deci această situaţie se întîlneşte în cazul cînd coeficientul de frecare de alunecare din B este mai mic decît cel din A. Analog se poate arăta că, în cazul cînd

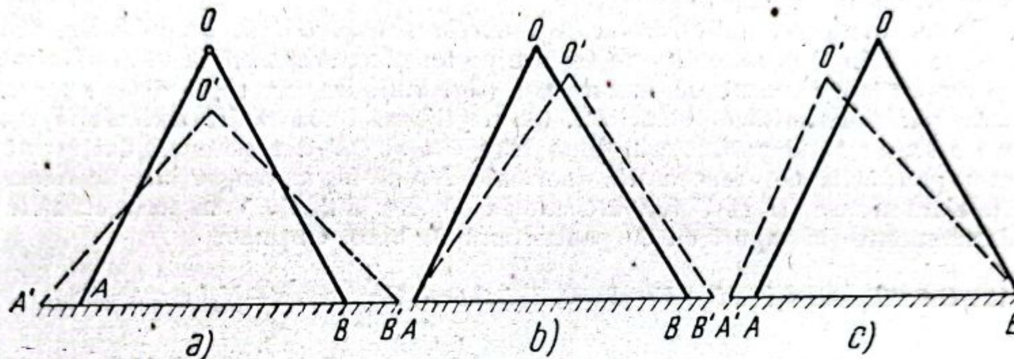


Fig. 8.3

$\mu_1<\mu_2$, pierderea poziţiei de echilibru are loc aşa cum se arată în fig. 8.3, c şi că, în acest din urmă caz

$$N_1=N_2=G,\ V=0,\ H=T_1=T_2=\mu_1 G,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\mu_1}{2}.$$

3°. Se consideră cadrul $ABCD$ din fig. 8.4, a articulat în A, B, C şi încastrat în D. Se cere să se determine reacţiunile din articulaţia A şi din încastrarea D.

R e z o l v a r e. Înlocuind articulaţia A cu reacţiunile H_1 şi V_1 şi încastrarea D cu reacţiunile H_2, V_2 şi momentul M_2 (fig. 8.4, b) observăm că avem în total cinci necunoscute. Dacă am separa barele AB, BC şi CD, şi am scrie ecuaţiile de echilibru pentru fiecare

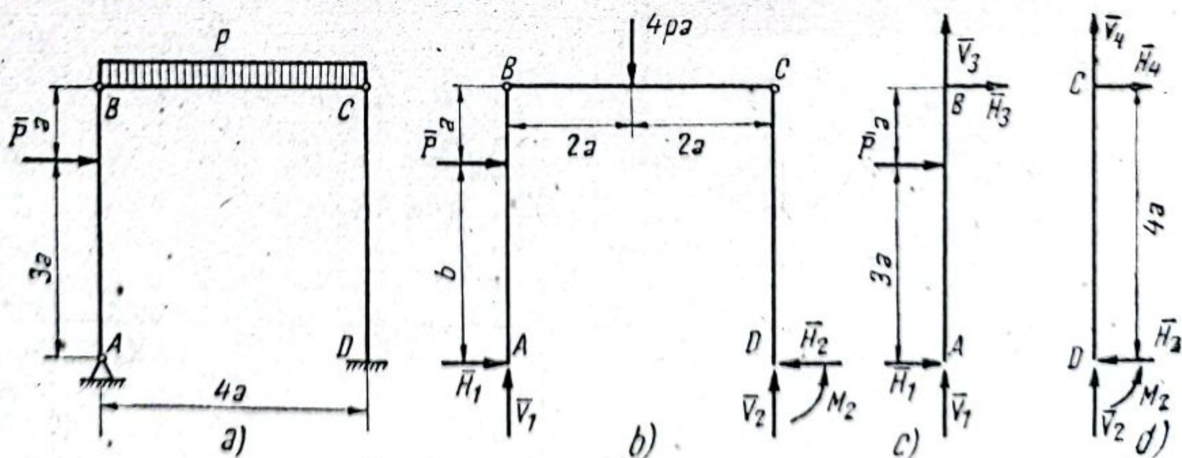


Fig. 8.4

bară în parte am obţine în total nouă ecuaţii. Ar apărea însă patru necunoscute în plus, care nu interesează în problemă: reacţiunile H_3 şi V_3 din articulaţia B şi reacţiunile H_4 şi V_4 din articulaţia C. Pentru a le elimina şi a rămîne numai cu cinci ecuaţii, care să con-

ţină necunoscutele cerute de problemă, vom aplica teorema solidificării. Vom scrie ecuaţiile de echilibru pentru întregul sistem (momente în raport cu D, fig. 8.4, b):

$$H_1-H_2+P=0,\quad V_1+V_2-4pa=0$$
$$4pa\cdot 2a-P\cdot 3a-V_1 4a+M_2=0,$$

izolînd bara AB (fig. 8.4, c) au apărut reacţiunile H_3 şi V_3 care nu interesează. Pentru a le elimina scriem ecuaţia de momente în raport cu punctul B. Rezultă

$$Pa+H_1\cdot 4a=0.$$

În mod asemănător vom proceda cu bara CD (fig. 8.4, d), pentru care vom scrie ecuaţia de momente în raport cu punctul C. Rezultă

$$M_2-H_2\cdot 4a=0,$$

Am obţinut astfel în total cinci ecuaţii care conţin numai necunoscutele care ne interesează. Rezolvînd acest sistem obţinem

$$H_1=-\frac{P}{4},\quad H_2=\frac{3P}{4},\quad M_2=3Pa,\quad V_1=2pa,\quad V_2=2pa.$$

O b s e r v a ţ i e. Reacţiunea H_1 are sensul invers celui indicat pe desen.

§ 6. Determinarea eforturilor într-o bară. În general, numim bară un corp la care o dimensiune, numită lungime, este mare în raport cu celelalte două dimensiuni. Locul geometric al centrelor de greutate ale tuturor secţiunilor transversale prin bară se numeşte *axa barei*. Secţiunile transversale sînt normale la axa barei, în centrul de greutate al secţiunii.

Să considerăm o bară ABC (fig. 8.5). Ea este în echilibru sub acţiunea sistemului (S) de forţe date şi reacţiuni. Pentru a putea pune în evidenţă eforturile din bară, este necesar s-o secţionăm în două părţi, printr-un plan (de obicei normal pe axa barei într-un punct B) (fig. 8.6). În acest mod, forţele interioare care legau fiecare element al corpului AB de pe faţa corespunzătoare secţiunii, cu elementele corpului BC de pe cealaltă faţă a secţiunii, s-au transformat pentru fiecare porţiune în parte în forţe exterioare. Să folosim pentru aceste două sisteme de forţe notaţiile:

(S_{21}) pentru forţele cu care corpul I acţionează în secţiunea B asupra corpului II;

(S_{12}) pentru forţele cu care corpul II acţionează în secţiunea B, asupra corpului I.

Sistemul (S) de forţe date şi reacţiuni, poate fi de asemenea despărţit în sistemele (S_1) şi (S_2) care acţionează respectiv asupra corpurilor I şi II.

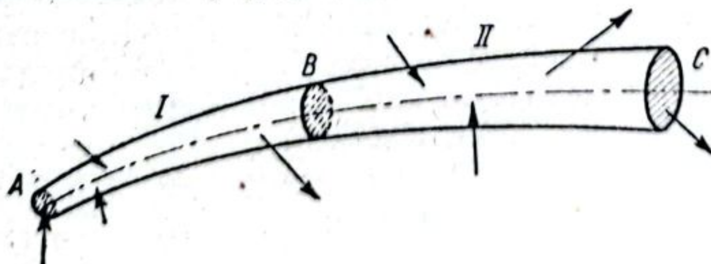


Fig. 8.5

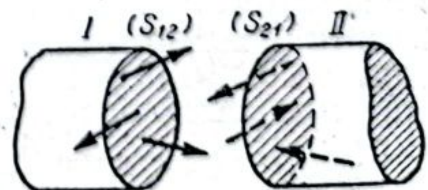


Fig. 8.6

Conform teoremei echilibrului părţilor, dacă întreaga bară este în echilibru sub acţiunea unui sistem de forţe, atunci şi cele două părţi ale ei vor fi în echilibru fiecare, sub acţiunea forţelor corespunzătoare.

Prin urmare torsorul rezultant al sistemelor (S_1) şi (S_{12}) este nul. De asemenea şi torsorul rezultant al sistemelor (S_2) şi (S_{21}).

Bara AC fiind în echilibru, sistemul (S) este echivalent cu zero. Urmează că şi torsorul sumă al sistemelor (S_{12}) şi (S_{21}) este nul.

Concretizînd cele arătate, în relaţii de echivalenţă statică, putem scrie:

$$\tau(S_1)+\tau(S_{12})=0; \quad \tau(S_2)+\tau(S_{21})=0; \tag{8.6}$$

$$\tau(S_1)+\tau(S_2)=0; \tag{8.7}$$

de unde

$$\tau(S_{12})+\tau(S_{21})=0. \tag{8.8}$$

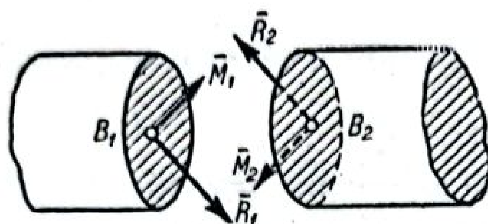


Fig. 8.7

Remarcăm că ultima relaţie generalizează principiul acţiunii şi reacţiunii.

Rezultă mai departe

$$\tau(S_{21})=\tau(S_1), \qquad \tau(S_{12})=\tau(S_2), \tag{8.9}$$

sau: sistemul de eforturi cu care o parte a barei acţionează asupra celeilalte părţi, este echivalent cu sistemul de forţe exterioare (forţe date şi reacţiuni) corespunzător primei părţi. Ultimele relaţii de echivalenţă ne dau posibilitatea de a determina eforturile dintr-o secţiune, atunci cînd se cunosc forţele date şi reacţiunile care acţionează asupra grinzii.

Să reducem sistemele de forţe (S_{12}) şi (S_{21}) în raport cu punctele B_1 şi B_2 ale feţelor secţiunii (B_1 şi B_2 corespund aceluiaşi punct B al secţiunii) (fig. 8.7). Vom obţine cîte un torsor $\tau(S_{12})=(\overline{M}_1, \overline{R}_1)$ şi $\tau(S_{21})=(\overline{M}_2, \overline{R}_2)$ aplicat respectiv în B_1 şi B_2. Suma acestor doi torsori este bineînţeles nulă.

Vectorii $\overline{R}_1$ şi $\overline{R}_2$ nu depind de poziţia punctului B de reducere, spre deosebire de vectorii $\overline{M}_1$ şi $\overline{M}_2$. În general punctul B de reducere se ia în centrul de greutate al secţiunii, însă există în practică şi unele cazuri speciale, cînd se alege altă poziţie pentru acest punct.

În aplicaţii, torsorul forţelor interioare se determină prin valorile scalare ale proiecţiilor pe un triedru triortogonal intrinsec, cu originea în centrul de greutate al secţiunii. Aceste proiecţii poartă numele de *eforturi*. Admiţînd un sens de parcurgere a barei, se convine a se lua în consideraţie eforturile aplicate pe acea faţă a secţiunii care este întîlnită mai întîi, atunci cînd bara este parcursă în sensul ales. Axele se aleg de obicei după direcţia tangentei, normalei principale şi binormalei la axa barei. Sensul pozitiv al tangentei se alege în sensul parcurgerii barei (fig. 8.8).

Componentele torsorului eforturilor după tangenta la axa barei şi după o direcţie conţinută în planul secţiunii normale poartă denumiri speciale, corespunzătoare sensului fizic de solicitare a secţiunii.

Astfel (fig. 8.9), aceste componente ale rezultantei $\overline{R}$ şi momentului rezultant $\overline{M}$, se numesc:

— forţă normală (simbol N), componenta lui $\overline{R}$ după direcţia tangentei;

— forţă tăietoare (simbol T), componenta lui $\overline{R}$ în planul secţiunii;

— moment de răsucire (simbol M_t), componenta lui $\overline{M}$ după direcţia tangentei;

— moment încovoietor (simbol M_i), componenta lui $\overline{M}$ în planul secţiunii.

Proiecţiile forţei tăietoare şi momentului încovoietor pe normala principală şi pe binormală se notează cu T_ν, T_β şi M_ν, M_β (fig. 8.9).

Privitor la semnele acestor eforturi se convine ca să fie pozi-

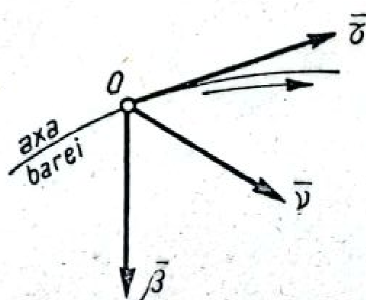


Fig. 8.8

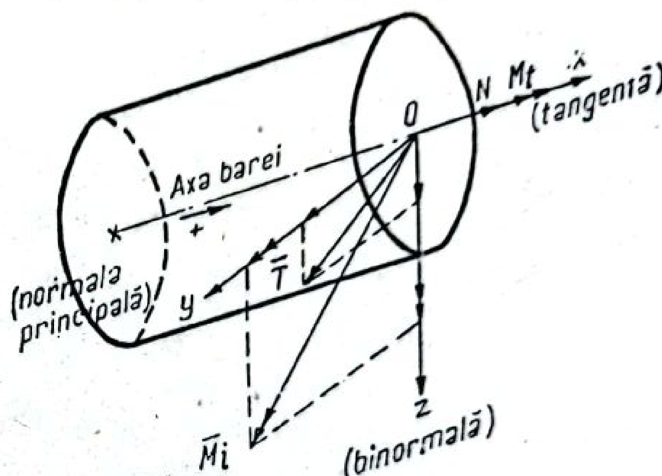


Fig. 8.9

tive atunci cînd sînt dirijate după sensul pozitiv al axelor. În felul acesta $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ fiind versorii axelor, putem scrie:

$$\overline{R}=N\bar{\tau}+T_\nu\bar{\nu}+T_\beta\bar{\beta}, \quad \overline{M}=M_t\bar{\tau}+M_\nu\bar{\nu}+M_\beta\bar{\beta}. \qquad (8.18)$$

Se obişnuieşte ca variaţia acestor şase componente ale torsorului eforturilor să se reprezinte prin diagrame, care indică valorile lor în orice secţiune.

Observaţii. 1° Convenţia cu privire la sensurile pozitive ale eforturilor este valabilă, în forma de mai sus, pentru faţa secţiunii care este întîlnită mai întîi atunci cînd grinda este parcursă în sensul considerat pozitiv. În rezistenţa materialelor se consideră ca sens pozitiv sensul de la „stînga la dreapta". Ca urmare convenţia de mai sus rămîne valabilă pentru faţa „din stînga" a secţiunii.

2° În rezistenţa materialelor se obişnuieşte însă ca eforturile să fie definite pentru faţa „din dreapta" a secţiunii. În acest din urmă caz sensurile pozitive ale eforturilor coincid cu sensurile negative ale axelor triedrului de referinţă intrinsec, corespunzător feţei „din dreapta".

3° Însfîrşit, în rezistenţa materialelor se mai obişnuieşte să se folosească sistemul de referinţă sting în locul celui drept. Ca urmare, sensurile pozitive ale eforturilor faţă de un asemenea triedru, pe faţa „din dreapta" sînt: pentru N, T_ν, T_β, sensurile negative ale axelor, iar pentru M_t, M_ν, M_β, sensurile pozitive ale axelor (v. P. Mazilu: Statica Construcţiilor, vol. I, Edit. Tehnică, 1955).

Aplicaţie. 4°. Se dă o grindă ACB cotită în unghi drept (fig. 8.10), încastrată în B şi acţionată de o forţă $\overline{P}$ perpendiculară pe planul ei. Se cere să se deseneze diagramele eforturilor.

Convenim ca sensul pozitiv de parcurgere al sistemului să fie ACB. Facem secţiuni, atît în bara AC, cît şi în CB şi introducem pe feţele secţiunilor întîlnite în sensul parcurgerii, componentele respective ale eforturilor.

Pentru sistemul şi forţele date, M_z, T_y şi N sînt nule.

Utilizînd prima dintre relațiile (8.9) obținem pentru bara AC.

$$M_t=0,\ M_y=M_i=-Px,\ T_z=T=-P,$$

iar pentru bara CB

$$M_t=-Pa,\ M_y=M_i=-Px',\ T'_z=T=-P.$$

Variația eforturilor M_t, M_i și T este reprezentată în diagramele din fig. 8.10 *d, e, f.*

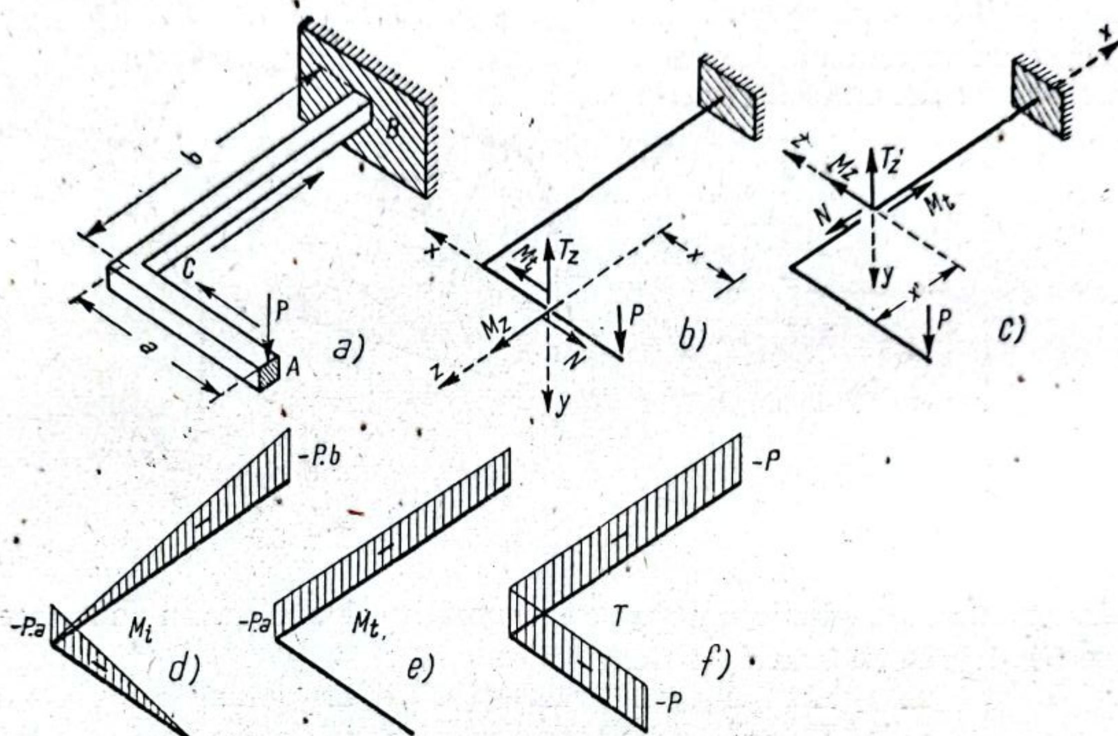


Fig. 8.10

§ 7. Relații diferențiale între eforturi și încărcări. La punctul precedent, s-a arătat modul de calcul al eforturilor într-o secțiune oarecare a unei bare. Aceste eforturi variază însă în lungul barei în raport cu poziția secțiunii. Apare indicată, deci, necesitatea de a se stabili relațiile generale care să pună în evidență această variație.

Referindu-ne la porțiunea AB a barei din fig. 8.5 constatăm că aceasta este acționată de următoarele forțe: *forțele date* (concentrate și repartizate), *reacțiunile* de pe fața A, reduse la o rezultantă $-\overline{R}_A$ și un moment rezultant $-\overline{M}_A$ față de punctul A, *eforturile* de pe fața B, reduse față de punctul B la rezultanta $\overline{R}$ și momentul $\overline{M}$.

Vom considera că:

a) înlocuim toate forțele date concentrate prin forțe repartizate echivalente, presupunînd că secțiunea B nu cade exact în dreptul punctului de aplicație al unei forțe concentrate;

b) reducem toate forțele date în raport cu punctele de pe axă corespunzătoare secțiunilor în care acționează aceste forțe.

În acest mod, porțiunea de bară AB (fig. 8.11) se poate reprezenta numai prin axa ei. Să considerăm un element $d\sigma$ din această axă. Fie $\overline{p}(\sigma)\,d\sigma$ și $\overline{m}(\sigma)d\sigma$ rezultanta și momentul rezultant față de un punct al elementului

$d\sigma$, al forțelor repartizate care acționează porțiunea de grindă limitată de două secțiuni transversale care trec prin extremitățile elementului $d\sigma$. Alegînd ca sens de parcurgere al axei sensul AB și notînd cu σ lungimea arcului pe axă, măsurată de la A la $d\sigma$, vom avea în A, $\sigma=0$, în dreptul elementului $d\sigma$, $\sigma=\sigma$ iar în B, $\sigma=s$.

Pentru a arăta că porțiunea de grindă AB este în echilibru, este necesar și suficient să scriem că suma momentelor acestor forțe este nulă față de orice punct al spațiului.

Notînd cu $\overline{r}(0)$, $\overline{r}(s)$, vectorii de poziție ai punctelor A, B față de un reper oarecare, și cu $\overline{r}(\sigma)$ vectorul de poziție al elementului de curbă $d\sigma$, vom avea

$$\overline{r}(0)\times(-\overline{R}_A)-\overline{M}_A+\int_0^s[\overline{r}(\sigma)\times\overline{p}(\sigma)d\sigma+\overline{m}(\sigma)d\sigma]+\overline{r}(s)\times\overline{R}+\overline{M}=0. \quad (8.11)$$

Relația de mai înainte, fiind independentă de valoarea parametrului s, face ca derivata ei în raport cu s să fie nulă

$$\overline{r}(s)\times\overline{p}(s)+\overline{m}(s)+\overline{r}(s)\times\frac{d\overline{R}}{ds}+\frac{d\overline{r}(s)}{ds}\times\overline{R}+\frac{d\overline{M}}{ds}=0. \quad (8.12)$$

Înlocuind $\frac{d\overline{r}(s)}{ds}$ cu $\overline{\tau}(s)$, vectorul unitar al tangentei la axă în punctul B (v. cap. I, § 29—30), și punînd în evidență pe $\overline{r}(s)$ ca factor comun, obținem

$$\overline{r}(s)\times\left[\frac{d\overline{R}}{ds}+\overline{p}(s)\right]+\frac{d\overline{M}}{ds}+\overline{\tau}(s)\times\overline{R}+\overline{m}(s)=0. \quad (8.13)$$

Condiția de echilibru a porțiunii de grindă AB este valabilă pentru orice origine a vectorului de poziție $\overline{r}(s)$. Acest lucru nu este posibil decît dacă

$$\frac{d\overline{R}}{ds}+\overline{p}=0 \quad (8.14)$$

și

$$\frac{d\overline{M}}{ds}+\overline{\tau}\times\overline{R}+\overline{m}=0. \quad (8.15)$$

Folosind proiecțiile lui $\overline{R}$, $\overline{M}$ și $\overline{p}$ pe axele intrinseci, pentru secțiunea întîlnită în față, în sensul pozitiv de parcurgere al axei

$$\begin{aligned}\overline{R}&=N\overline{\tau}+T_\nu\overline{\nu}+T_\beta\overline{\beta},\\ \overline{M}&=M_t\overline{\tau}+M_\nu\overline{\nu}+M_\beta\overline{\beta},\\ \overline{p}&=p_\tau\overline{\tau}+p_\nu\overline{\nu}+p_\beta\overline{\beta}\end{aligned} \quad (8.16)$$

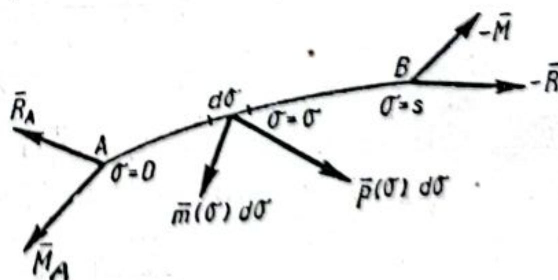


Fig. 8.11

și formulele lui Frenet care dau expresiile derivatelor versorilor $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ și $\overline{\beta}$ în raport cu arcul s (cap. I, § 29—30)

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{\nu}, \quad \frac{d\overline{\nu}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\overline{\tau}+\frac{1}{\rho_1}\overline{\beta}, \quad \frac{d\overline{\beta}}{ds}=-\frac{1}{\rho_1}\overline{\nu}, \quad (8.17)$$

unde prin ρ şi ρ_1 s-au notat respectiv raza de curbură şi raza de torsiune a axei barei, obţinem şase relaţii scalare de echilibru, corespunzătoare relaţiilor vectoriale (8.14) şi (8.15)

$$\frac{dN}{ds}-\frac{T_\nu}{\rho}+p_\tau=0,\quad \frac{dT_\nu}{ds}+\frac{N}{\rho}-\frac{T_\beta}{\rho_1}+p_\nu=0,\quad \frac{dT_\beta}{ds}+\frac{T_\nu}{\rho_1}+p_\beta=0,$$
$$\frac{dM_t}{ds}-\frac{M_\nu}{\rho}+m_\tau=0,\quad \frac{dM_\nu}{ds}+\frac{M_t}{\rho}-\frac{M_\beta}{\rho_1}-T_\beta+m_\nu=0,\qquad (8.18)$$
$$\frac{dM_\beta}{ds}+\frac{M_\nu}{\rho_1}+T_\nu+m_\beta=0.$$

Pentru cazul barelor curbe plane, acţionate de forţe cuprinse în planul lor, $\rho_1=\infty$, $p_\beta=0$, $m_\tau=m_\nu=0$, $T_\beta=0$, $M_t=M_\nu=0$, formulele (8.18) devin

$$\frac{dN}{ds}-\frac{T_\nu}{\rho}+p_\tau=0,\quad \frac{dT_\nu}{ds}+\frac{N}{\rho}+p_\nu=0,\quad \frac{dM_\beta}{ds}+T_\nu+m_\beta=0.\qquad (8.19)$$

Pentru cazul barelor curbe plane, acţionate de forţe normale pe planul lor, $\rho_1=\infty$, $p_\tau=p_\nu=0$, $m_\beta=0$, $N=0$, $T_\nu=0$, $M_\beta=0$, formulele (8.18) devin

$$\frac{dT_\beta}{ds}+p_\beta=0,\quad \frac{dM_t}{ds}-\frac{M_\nu}{\rho}+m_\tau=0,\quad \frac{dM_\nu}{ds}+\frac{M_t}{\rho}-T_\beta+m_\nu=0.\qquad (8.20)$$

Pentru cazul barelor drepte, direcţiile normalei principale şi binormalei sînt nedeterminate. În acest caz axele din planul secţiunii pot fi alese arbitrar şi se poate folosi un triedru cartezian obişnuit $Oxyz$, astfel ales încît Ox să coincidă cu axa barei, Oy cu normala principală, iar Oz cu binormala. Se recomandă ca axa Oz să fie verticală. În acest caz $\rho=\rho_1=\infty$, $ds=dx$ şi, schimbînd indicii în formulele (8.18), obţinem

$$\frac{dN}{dx}+p_x=0,\quad \frac{dT_y}{dx}+p_y=0,\quad \frac{dT_z}{dx}+p_z=0,$$
$$\frac{dM_t}{dx}+m_x=0,\quad \frac{dM_y}{dx}-T_z+m_y=0,\quad \frac{dM_z}{dx}+T_y+m_z=0.\qquad (8.21)$$

În sfîrşit, în cazul foarte frecvent întîlnit în practică, al unei bare drepte acţionate de forţe plane normale pe axa grinzii, presupunînd că ele acţionează în direcţia axei Oz, rezultă $p_x=p_y=0$, $m_x=m_y=m_z=0$, $N=0$, $T_y=0$, $M_t=0$, $M_z=0$ şi formulele precedente (8.20), devin

$$\frac{dT_z}{dx}+p_z=0,\quad \frac{dM_y}{dx}-T_z=0.\qquad (8.22)$$

§ 8. Sisteme articulate. Definiţii. Clasificări. Ipoteze. Una dintre formele cele mai des întîlnite în practică a sistemelor de corpuri o reprezintă sistemele articulate. Numim în general *sistem articulat*, un sistem de bare rectilinii şi rigide, care sînt legate între ele prin articulaţii, numite *noduri*. În cele ce urmează se vor considera numai sistemele articulate la care între bare există o legătură continuă.

Putem deosebi: 1) sisteme articulate la care configurația geometrică a acestora reprezintă o linie poligonală deschisă, astfel că nu se poate suprima nici o bară (nemarginală), fără a se întrerupe continuitatea sistemului; 2) sisteme articulate la care este posibil să se suprime o bară (nemarginală), fără a se întrerupe continuitatea sistemului.

Sisteme din prima categorie se întîlnesc sub forma poligoanelor articulate, a cablurilor de susținere a podurilor suspendate etc. Sisteme din a

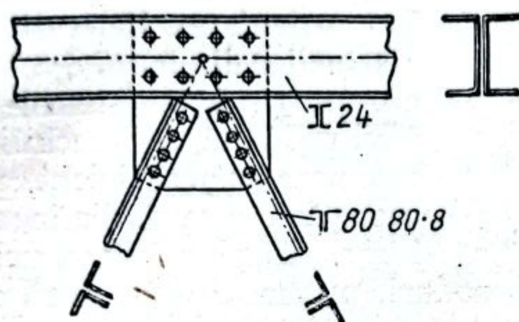


Fig. 8.12


Fig. 8.13

doua categorie sînt: grinzi cu zăbrele, arce cu zăbrele, ferme de acoperiș, turnuri metalice, macarale, cupole cu zăbrele etc.

Sistemele articulate se mai pot clasifica în sisteme plane și sisteme spațiale. Numim *sistem articulat plan*, sistemul ale cărui noduri sînt situate într-un singur plan, forțele exterioare acționînd de asemenea în același plan. La *sistemul articulat spațial*, nodurile și forțele exterioare nu sînt situate în același plan.

În calculul sistemelor articulate, vom admite că:

a) Barele care alcătuiesc sistemul sînt rectilinii și au secțiuni transversale de dimensiuni neglijabile în raport cu lungimea lor. În modul acesta barele pot fi reprezentate prin axele lor rectilinii.

b) Legătura între bare, la noduri, se face fără frecare, prin articulații foarte mici, astfel că acestea pot fi considerate ca puncte materiale. Urmează că acțiunea exercitată de restul sistemului asupra unei bare, prin intermediul unui nod, se poate reduce la o singură forță aplicată acelui nod.

În practică, legăturile dintre bare sînt realizate fie prin îmbinări nituite (fig. 8.12) sau sudate, la grinzile cu zăbrele metalice, fie prin continuitate perfectă la grinzile cu zăbrele din beton armat (fig. 8.13), fie prin articulații metalice la unele construcții speciale și la organele de mașini (fig. 8.14). În orice caz, însă, nu este posibil a se obține, în realitate, articulații fără frecări, iar secțiunile barelor au dimensiuni care nu pot fi totdeauna neglijate. Din această cauză, în bare se nasc și eforturi secundare. Determinarea acestor eforturi se face prin metode speciale.


Fig. 8.14

La un sistem articulat, forțele se aplică în general atît pe bare cît și pe noduri. Un deosebit interes prezintă cazul cînd forțele acționează numai la noduri, deoarece, în aceste condiții, fiecare bară este supusă numai la întindere sau la compresiune, așa cum se va vedea mai departe. În sistemele

articulate realizate în practică, se caută ca forțele exterioare să acționeze numai la noduri. Cu toate acestea, există cazuri cînd acest lucru nu este posibil. Menționăm în deosebi: greutatea proprie a barelor, acțiunea vîntului etc. În cazurile obișnuite, se admite că asemenea sarcini pot fi înlocuite cu două forțe echivalente, acționînd la extremitățile barei, neglijîndu-se în modul acesta numai efectul de încovoiere al acestor sarcini.

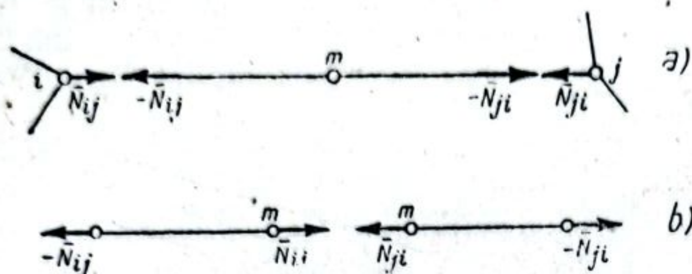


Fig. 8.15

§ 9. Echilibrul sistemelor articulate. Determinarea eforturilor din bare. S-a văzut că, pentru ca un sistem de corpuri rigide să fie în echilibru, este necesar și suficient ca fiecare parte a sa să fie în echilibru. Considerînd că un sistem articulat este format din bare și noduri, putem enunța două categorii de condiții de echilibru:

a) *Condiții care exprimă că fiecare bară este în echilibru sub acțiunea forțelor care îi sînt aplicate*. Deoarece toate forțele exterioare se aplică la noduri, o bară ij (fig. 8.15) va fi acționată numai de forțele de legătură ce se exercită din partea nodurilor i și j. Convenim să notăm cu $\bar{N}_{ij}$ și $\bar{N}_{ji}$ forțele respective de legătură aplicate la nodurile i și j. În consecință, forțele de legătură aplicate la capetele barei vor fi $-\bar{N}_{ij}$ și $-\bar{N}_{ji}$.

Este evident că bara ij va fi în echilibru sub acțiunea forțelor $-\bar{N}_{ij}$ și $-\bar{N}_{ji}$, numai dacă acestea sînt egale și de sens contrar, avînd aceeași linie de acțiune, dirijată după axa barei.

Forțele de legătură între bară și nod se numesc *eforturi în bară*.

Privitor la sensul eforturilor $\bar{N}$, există două posibilități. Dacă eforturile care acționează asupra barei tind să mărească lungimea acesteia, se numesc *eforturi de întindere* (fig. 8.16, *a*), iar dacă tind să-i micșoreze lungimea, se numesc *eforturi de compresiune* (fig. 8.16, *b*). Vom conveni să afectăm valorile scalare ale eforturilor în bare, cu semnul + pentru întindere și cu semnul — pentru compresiune.

La operațiile de determinare a eforturilor în bare se lucrează cu eforturile aplicate la nod și nu cu acelea aplicate pe bară, deoarece, după cum se va arăta mai departe, aceste eforturi se determină din ecuațiile de echilibru ale nodurilor.

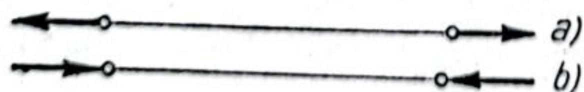


Fig. 8.16

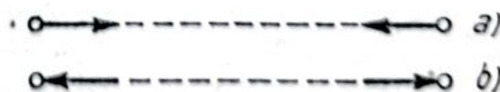


Fig. 8.17

Urmează că o reprezentare a eforturilor aplicate la nod, ca în fig. 8.17, *a* ne va indica o bară întinsă, iar ca în fig. 8.17, *b*, o bară comprimată.

Efortul într-o bară are aceeași valoare în orice secțiune a barei. Într-adevăr, dacă secționăm bara ij (fig. 8.15, *b*) în punctul m, condițiile de

echilibru ale ambelor porțiuni izolate, ne arată că eforturile în secțiunea m sînt aceleași indiferent de poziția de-a lungul barei a acestei secțiuni.

b) *Condiții care exprimă că fiecare nod este în echilibru sub acțiunea forțelor care îi sînt aplicate.* Asupra unui nod i acționează rezultanta $\overline{F}_i$ a forțelor exterioare efectiv aplicate, reacțiunea $\overline{R}_i$ care înlocuiește o eventuală legătură exterioară a nodului și eforturile $\overline{N}_{ij}$ din barele care leagă nodul i, de celelalte noduri j, ale sistemului articulat.

Considerînd că sistemul articulat are n noduri, ecuațiile vectoriale de echilibru ale acestor noduri vor fi

$$\overline{F}_i+\overline{R}_i+\sum_j \overline{N}_{ij}=0, \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i\neq j), \tag{8.23}$$

prin semnul Σ_j înțelegîndu-se însumarea termenului al treilea pentru toate nodurile j care sînt legate direct prin bare, de nodul i.

Prin proiectarea sistemului de ecuații (8.23) pe trei axe ortogonale de coordonate x, y, z, se obține un sistem de trei ecuații scalare liniare

$$\left.\begin{aligned} &\sum_j N_{ij}\lambda_{ij}+R_{ix}=-X_i,\\ &\sum_j N_{ij}\mu_{ij}+R_{iy}=-Y_i, \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ i\neq j)\\ &\sum_j N_{ij}\nu_{ij}+R_{iz}=-Z_i, \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

unde λ_{ij}, μ_{ij}, ν_{ij} sînt proiecțiile pe axele de coordonate ale versorului barei ij, R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} sînt proiecțiile necunoscute ale reacțiunilor $\overline{R}_i$, iar X_i, Y_i Z_i sînt proiecțiile forțelor $\overline{F}_i$ pe aceleași axe. Așa cum s-a mai spus, valorile N_{ij} ale eforturilor se socotesc, în mod convențional, pozitive pentru întindere și negative pentru compresiune.

Menționăm că, deoarece între proiecțiile pe cele trei axe ale unei reacțiuni pot exista două, una sau nici o relație suplimentară, după cum legătura exterioară respectivă este o rezemare simplă, o articulație plană sau o articulație spațială, vom considera că în ecuațiile (8.24) se introduc numai componentele efectiv necunoscute ale reacțiunilor, celelalte componente fiind anterior eliminate cu ajutorul relațiilor menționate. În acest fel, pentru o rezemare simplă vom avea o singură necunoscută, pentru o articulație plană, două, iar pentru o articulație spațială trei necunoscute ale reacțiunii.

Necunoscutele sistemului (8.24) de ecuații sînt eforturile N_{ij} și proiecțiile R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} ale reacțiunilor. Pozițiile barelor date prin coeficienții λ_{ij}, μ_{ij}, ν_{ij} sînt considerate cunoscute, dacă configurația geometrică a sistemului articulat este de așa natură, încît nu este permisă nici o deplasare finită a barelor una față de alta, adică dacă sistemul articulat este rigid.

Dacă sistemul nu este rigid, atît pozițiile barelor, cît și componentele X_i, Y_i, Z_i ale forțelor efectiv aplicate, vor fi considerate drept parametri a căror valoare urmează să fie determinată astfel încît sistemul articulat să fie în echilibru.

Observație. Pentru un sistem articulat în echilibru, teorema solidificării ne arată că între forțele exterioare (forțe date și reacțiuni), există șase ecuații scalare de echilibru

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(R_{ix}+X_i)=0,\ \ \Sigma(R_{iy}+Y_i)=0,\ \ \Sigma(R_{iz}+Z_i)=0,\\ &\Sigma[x_i(R_{iy}+Y_i)-y_i(R_{ix}+X_i)]=0,\\ &\Sigma[y_i(R_{iz}+Z_i)-z_i(R_{iy}+Y_i)]=0,\\ &\Sigma[z_i(R_{ix}+X_i)-x_i(R_{iz}+Z_i)]=0, \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

După cum se poate observa foarte ușor, aceste ecuații suplimentare sînt consecințe algebrice ale ecuațiilor (8.24).

Sistemul de ecuații (8.24) poate avea o soluție determinată, o infinitate de soluții, sau nici una. În primele două cazuri, sistemul (8.24) se numește compatibil. Vom discuta rezolvarea acestui sistem, utilizînd teorema lui Kronecker-Capelli[1].

Condiția necesară și suficientă de compatibilitate a unui sistem de ecuații liniare, este ca rangul matricii coeficienților să fie egal cu rangul matricii sistemului. Matricea sistemului se obține prin adăugarea coloanei termenilor liberi la matricea coeficienților.

Fie ρ rangul comun al acestor două matrici, b numărul barelor sistemului articulat și r numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor. Deoarece numărul necunoscutelor sistemului (8.24) este $b+r$, vom avea

$$\rho \leqslant b+r, \tag{8.26}$$

$$\rho \leqslant 3n. \tag{8.27}$$

Ca urmare a acestor inegalități, discuția rezolvării unui sistem articulat prezintă patru cazuri:

a) $$\rho < b+r. \tag{8.28}$$

Fie $q=b+r-\rho$ numărul necunoscutelor care nu aparțin unui determinant principal al sistemului (determinant format din matricea coeficienților, diferit de zero și de ordin ρ). Aceste q necunoscute pot avea valori arbitrare, iar celelalte necunoscute care se determină după regula lui Cramer, sînt funcții liniare de cele q necunoscute arbitrare.

Sistemul articulat respectiv se numește *sistem static nedeterminat*. Numărul q al necunoscutelor suplimentare se numește *grad de nedeterminare statică*.

Datorită relațiilor (8.26) și (8.27) o condiție suficientă pentru ca un sistem articulat să fie static nedeterminat este ca

$$3n < b+r. \tag{8.29}$$

Remarcăm că sistemul de ecuații omogene care se obține în cazul inegalității (8.28) prin anularea termenilor liberi ai ecuațiilor (8.24), are ∞^q soluții diferite de zero. Urmează că într-un sistem static nedeterminat sînt posibile eforturi în bare și reacțiuni, chiar în absența oricăror forțe efectiv aplicate sistemului.

Eforturile în barele unui sistem static nedeterminat se pot determina prin metode utilizate în disciplinele rezistența materialelor și statica construcțiilor. Ecuațiile suplimentare necesare pentru aceasta, se stabilesc considerîndu-se proprietățile de deformabilitate ale materialului din care sînt confecționate barele.

b) $$\rho = b+r. \tag{8.30}$$

Sistemul de ecuații (8.24) care satisface relația precedentă admite o singură soluție. Sistemul articulat corespunzător se numește *sistem static determinat*.

Un sistem articulat, static nedeterminat, se poate transforma într-un sistem static determinat, suprimîndu-i-se, în mod convenabil, cel puțin q bare și componente necunoscute ale reacțiunilor. Numărul de bare și de componente necunoscute ale reacțiunilor suprimate în acest scop este minim, dacă prin aceasta nu se micșorează ρ.

c) $$\rho < 3n. \tag{8.31}$$

O consecință[2] a teoremei lui Kronecker-Capelli afirmă că un sistem de ecuații liniare este compatibil atunci și numai atunci cînd toți determinanții săi caracteristici sînt nuli. Se numește determinant caracteristic al unui sistem de ecuații liniare, determinantul format prin adăugarea la un determinant principal al sistemului, a unei coloane formate din termenii liberi ai ecuațiilor și a unei linii a matricii sistemului.

Fiind cunoscut un determinant principal, se pot forma cu ajutorul acestuia $p=3n-\rho$ determinanți caracteristici diferiți. Prin anularea acestor p determinanți, se obțin p relații

[1] Vezi A. G. K u r o ș, Curs de algebră superioară, (traducere din limba rusă), București, Editura Tehnică, 1955.

[2] Vezi A. G. K u r o ș, op. cit.

între coeficienţii necunoscutelor şi între termenii liberi, adică între mărimile geometrice care determină poziţiile barelor şi direcţiile reacţiunilor şi între componentele forţelor efectiv aplicate în noduri. Aceste relaţii sînt necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii să fie compatibil şi deci pentru ca sistemul articulat să fie în echilibru.

Este deci necesar să putem dispune de p mărimi independente, fie geometrice fie mecanice, care să satisfacă cele p relaţii suplimentare. Vom numi aceste p mărimi *parametrii sistemului articulat*. Alegerea parametrilor unui sistem articulat se face în raport cu specificul fiecărei probleme. Există deci probleme cu parametri geometrici, cu parametri mecanici, sau cu ambele categorii de parametri.

Numărul maxim de parametri geometrici ai unui sistem articulat exprimă *gradul său de libertate* sau de *mobilitate* şi este egal cu p.

Datorită relaţiilor (8.26) şi (8.27), o condiţie suficientă pentru ca un sistem articulat să fie un sistem mobil, este ca:

$$3n > b+r. \tag{8.32}$$

d)

$$\rho = 3n. \tag{8.33}$$

Sistemul de ecuaţii care satisface această relaţie nu posedă nici un parametru independent. Sistemul articulat corespunzător se numeşte sistem articulat nemobil.

Un sistem articulat mobil, cu p parametri, se poate transforma într-un sistem nemobil, prin introducerea a cel puţin p bare şi legături exterioare simple. Numărul acestora este minim şi este egal cu p, dacă prin aceasta se măreşte ρ cu p unităţi, fără a se mări în acelaşi timp şi numărul n al nodurilor.

Prin discutarea rezolvării unui sistem articulat cu ajutorul teoremei Kronecker-Capelli şi pe baza celor arătate la punctele precedente, se ajunge la concluzia următoare:

Eforturile din barele unui sistem articulat dat, acţionat de forţe efectiv aplicate oarecare, au valori unice şi finite, numai dacă

$$b+r=\rho=3n, \tag{8.34a}$$

sau în plan

$$b+r=\rho=2n. \tag{8.34b}$$

Un astfel de sistem articulat se numeşte *sistem articulat static determinat şi imobil*.

Un sistem articulat static determinat şi nemobil se transformă într-un sistem mobil sau într-un sistem static nedeterminat prin suprimarea sau adăugarea în mod convenabil a unei bare oarecare sau a unei legături exterioare simple.

În practică se utilizează adeseori pentru recunoaşterea sistemelor articulate static determinate şi nemobile, relaţiile mai simple

$$b+r=3n, \tag{8.35a}$$

sau în plan

$$b+r=2n, \tag{8.35b}$$

care reprezintă însă criterii necesare dar nu şi suficiente pentru acest scop.

Aplicaţie. 5°. Se dă sistemul plan articulat din fig. 8.18 la care $l_{12}=l_{23}$. Forţele P_1, P_2, P_3 sînt aplicate în nodurile *1*, *2*, *3*. Sistemul articulat nu este rezemat. Se cere să se examineze dacă eforturile din bare au valori finite şi bine determinate.

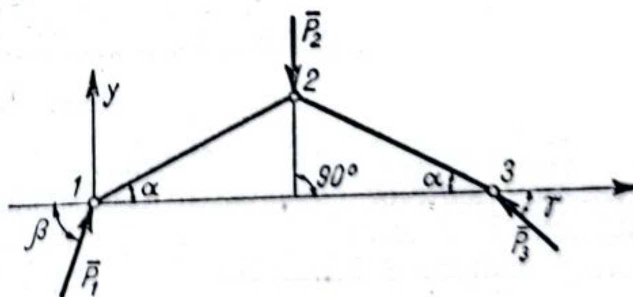


Fig. 8.18

Matricea coeficienţilor este

$$\left\|\begin{matrix} \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{matrix}\right\|.$$

Matricea sistemului este

$$\left\|\begin{array}{ccc} \cos\alpha & 0 & -P_1\cos\beta \\ -\cos\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & P_3\cos\gamma \\ \sin\alpha & 0 & -P_1\sin\beta \\ -\sin\alpha & -\sin\alpha & P_2 \\ 0 & \sin\alpha & -P_3\sin\gamma \end{array}\right\|.$$

Presupunînd că α este diferit de $\pi/2$ rangul matricii coeficienților este egal cu 2. Pentru ca sistemul de ecuații să fie compatibil, trebuie ca matricea sistemului să aibă același rang. Vom avea deci

$$b=2,\ r=0,\ n=3,\ \rho=2$$

și

$$\rho=b,\ \rho<2n.$$

Prin urmare sistemul dat este un sistem static determinat și mobil. Numărul parametrilor sistemului este $p=2n-\rho=4$.

Considerînd ca determinant principal

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$

relațiile suplimentare pentru determinarea acestor patru parametri se obțin anulînd cei patru determinanți caracteristici. Dacă se aleg mărimile P_1, P_3, β, γ ca parametri, rezultă

$$P_1=P_3=\frac{P_2}{2\sin\alpha},\quad \beta=\gamma=\alpha.$$

Menționăm că alegerea acestor mărimi ca parametri este echivalentă cu introducerea a două reazeme articulate plane în nodurile *1* și *3*.

§ 10. Grinzi cu zăbrele static determinate. Generalități. Grinzile cu zăbrele sînt cele mai răspîndite sisteme articulate. Vom numi în general *grindă cu zăbrele* orice sistem articulat plan nemobil.

Grinda cu zăbrele fiind considerată ca un corp rigid, putem forma diferite sisteme de grinzi cu zăbrele. Rezolvarea acestor sisteme complexe nu prezintă nici o dificultate, problema putînd fi redusă la soluționarea în parte a echilibrului fiecărei grinzi componente.

Ca aplicație la subcapitolul sistemelor de corpuri, ne vom ocupa numai de grinzile cu zăbrele simple, static determinate, care satisfac relația

$$b=\rho=2n-r \tag{8.36}$$

stabilită anterior și unde b este numărul barelor, n numărul nodurilor, r numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor, iar ρ rangul comun al matricii sistemului și matricii coeficienților necunoscutelor sistemului de ecuații corespunzător. Studiul detaliat al grinzilor cu zăbrele se face în statica construcțiilor.

Deoarece o grindă cu zăbrele poate fi considerată ca un corp rigid, numărul componentelor necunoscute ale reacțiunilor trebuie să fie egal cu trei, iar direcțiile acestor componente nu trebuie să fie nici paralele, nici concurente.

Există diferite metode analitice de calcul pentru eforturile din barele unei grinzi cu zăbrele. Principale sînt însă trei: metoda calculului succesiv al eforturilor prin izolarea nodurilor, metoda secțiunilor și metoda înlocuirii barelor.

§ 11. Metoda izolării nodurilor. Metoda calculului succesiv al eforturilor prin izolarea nodurilor, numită curent în practică şi „metoda izolării nodurilor", a fost expusă principial în studiul anterior. Într-adevăr, s-a arătat că eforturile din bare pot fi calculate izolînd fiecare nod al sistemului articulat şi arătînd apoi că toate nodurile sînt în echilibru, separat, sub acţiunea forţelor exterioare şi a eforturilor din barele corespunzătoare.

În general, rezolvarea sistemului de ecuaţii de echilibru este anevoioasă. În anumite cazuri însă ea se face foarte uşor. Aceasta se întîmplă atunci cînd ecuaţiile de echilibru ale nodurilor pot fi considerate într-o astfel de succesiune, încît în fiecare etapă de rezolvare să obţinem două ecuaţii cu cîte două necunoscute. Menţionăm că reacţiunile se determină anterior acestor calcule, prin ecuaţiile de echilibru ale întregii grinzi cu zăbrele.

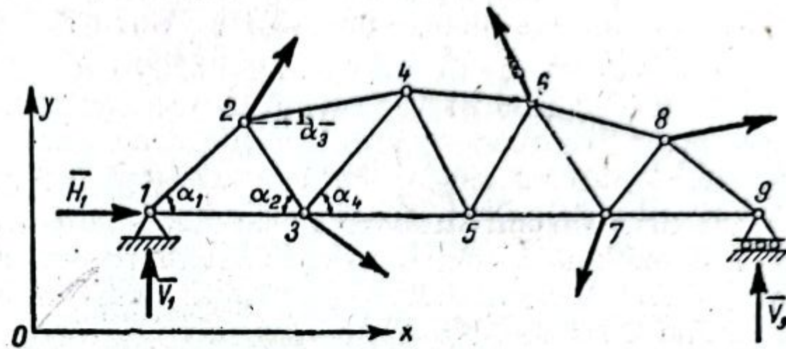


Fig. 8.19

De exemplu, la grinda cu zăbrele din fig. 8.19, după ce s-au determinat componentele necunoscute ale reacţiunilor, pentru a obţine primele două ecuaţii care să conţină numai două necunoscute, este necesar să se înceapă calculul de la un nod unde se întîlnesc numai două bare şi anume de la nodul 1 sau 9. Dacă sistemul nu ar avea nici un astfel de nod, nu am putea rezolva succesiv, două cîte două, ecuaţiile de echilibru.

Pornind de la nodul *1*, ecuaţiile de echilibru sînt:

$$N_{12} \cos \alpha_1+N_{13}+H_1=0, \quad N_{12} \sin \alpha_1+V_1=0.$$

Sistemul de ecuaţii obţinut este compatibil dacă determinantul coeficienţilor necunoscutelor este diferit de zero, adică dacă nodurile *1, 2, 3* nu sînt coliniare.

În continuare este necesar să trecem la un nod care să prezinte de asemenea numai două eforturi necunoscute, în cazul de faţă la nodul *2*, unde necunoscutele sînt eforturile din barele *2—4* şi *2—3*. Ecuaţiile de echilibru ale acestui nod sînt

$$-N_{21} \cos \alpha_1+N_{23} \cos \alpha_2+N_{24} \cos \alpha_3+X_2=0,$$
$$-N_{21} \sin \alpha_1-N_{23} \sin \alpha_2+N_{24} \sin \alpha_3+Y_2=0,$$

unde $N_{21}=N_{12}$ este cunoscut din sistemul precedent de ecuaţii, iar X_2 şi Y_2 sînt componentele forţelor aplicate nodului *2*, de asemenea cunoscute. Aceste ecuaţii sînt compatibile dacă nodurile *2, 3, 4* nu sînt coliniare.

Procedîndu-se în felul acesta mai departe, se ajunge la nodul *7*, unde întîlnim de asemenea două eforturi necunoscute: N_{78} şi N_{79}. La nodul *8*

dispunem de două ecuații, cu o singură necunoscută N_{89}, iar la nodul *9*, tot de două ecuații de echilibru, însă cu nici un efort necunoscut. În felul acesta se obțin trei ecuații suplimentare. Aceasta se datorește faptului că, pentru a calcula cele trei componente necunoscute ale reacțiunilor, am utilizat deja trei ecuații de echilibru care sînt o consecință a sistemului de $b+r$ ecuații de echilibru ale nodurilor. Cele trei ecuații suplimentare vor fi deci satisfăcute identic de valorile eforturilor calculate anterior.

Există sisteme de bare articulate la care se poate aplica metoda izolării nodurilor fără să fie nevoie să se determine în prealabil reacțiunile, prin rezolvarea ecuațiilor de echilibru ale întregului sistem. În acest caz reacțiunile rezultă din rezolvarea ecuațiilor de echilibru ale nodurilor.

Există sisteme de bare articulate la care este neapărat necesar să se scrie în prealabil ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem, în scopul determinării reacțiunilor, deoarece sistemul de bare nu are nici un nod cu numai 2 necunoscute.

Există, în sfîrșit, sisteme static determinate, la care metoda izolării nodurilor nu se poate aplica nici după ce s-au scris în prealabil ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem.

De exemplu, la sistemul din fig. 8.23, nu putem găsi nici un nod în care să se întîlnească numai două bare și care să ne dea posibilitatea să formăm primele două ecuații cu două necunoscute. De asemenea la sistemul din fig. 8.22, putem calcula prin această metodă numai eforturile din barele trasate cu linii mai pline, și anume pornind de la nodurile *1* și *15*. Pentru a afla însă eforturile din celelalte bare, metoda devine inutilizabilă.

A p l i c a ț i i. 6°. Se dă grinda cu zăbrele din fig. 8.20 acționată de forțe verticale în nodurile *2* și *4*. Se cere să se calculeze eforturile din bare.

Cele trei ecuații de echilibru ale forțelor exterioare, determină reacțiunile

$$H_1=0,\ V_1=1{,}5\ P,\ V_9=0{,}5\ P.$$

Ecuațiile de echilibru ale nodurilor vor fi:

Pentru nodul *1*:

$$N_{12}\cos 30°+N_{13}=0,\ N_{12}\sin 30°+V_1=0;$$

rezultă

$$N_{12}=-3P,\ N_{13}=\frac{3\sqrt{3}}{2}P.$$

Pentru nodul *2*:

$$-N_{21}\cos 30°+N_{23}\cos 30°+N_{24}\cos 30°=0,$$
$$-N_{21}\sin 30°-N_{23}\sin 30°+N_{24}\sin 30°-P=0;$$

rezultă

$$N_{23}=-P,\quad N_{24}=-2P.$$

Pentru nodul *3*:

$$-N_{31}-N_{32}\cos 30°+N_{34}\cos 60°+N_{35}=0,\ N_{32}\sin 30°+N_{34}\sin 60°=0;$$

rezultă

$$N_{34}=\frac{\sqrt{3}}{3}P,\qquad N_{35}=\frac{5\sqrt{3}}{6}P.$$

Procedînd în acest fel pentru celelalte noduri, găsim

$$N_{45}=-\frac{\sqrt{3}}{3}P, \qquad N_{46}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}P,$$

$$N_{56}=\frac{\sqrt{3}}{3}P, \qquad N_{57}=\frac{\sqrt{3}}{3}P,$$

$$N_{67}=0, \qquad N_{68}=-P,$$

$$N_{78}=0, \qquad N_{79}=\frac{\sqrt{3}}{3}P,$$

$$N_{89}=-P.$$

Se observă că eforturile din barele *7—8* şi *6—7* sînt nule. Acest rezultat, s-ar fi putut deduce de la început. Într-adevăr, considerînd echilibrul nodului *8*, rezultă că, deoarece barele *6—8* şi *8—9* sînt în prelungire, componenta efortului N_{78} perpendiculară pe aceste bare nu poate fi echilibrată de nici o forţă. Este necesar deci ca efortul N_{78} să fie nul. În mod analog se poate deduce şi egalitatea cu zero a efortului N_{67}.

7°. Se dă sistemul spaţial articulat din fig. 8.21 acţionat de forţa P şi rezemat articulat în nodurile *1, 2, 3, 4*.

Aplicînd relaţia (8.13 a) rezultă

$$b=12, \quad r=12, \quad n=8,$$

deci

$$12+12=3\times 8.$$

Eforturile în bare se vor determina prin metoda izolării nodurilor.

— Nodul *6*: trei ecuaţii de echilibru obţinute prin proiecţiile eforturilor pe axe paralele cu *5—6, 6—7, 6—2*, arată că

$$N_{65}=N_{62}=N_{67}=0.$$

— Nodul *5*: ecuaţiile de proiecţie pe axe paralele cu barele *5—6, 5—8, 6—2*, dau

$$N_{57}=N_{51}=N_{58}=0.$$

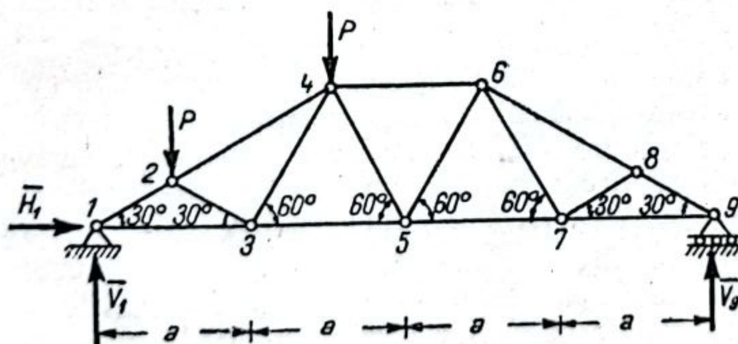


Fig. 8.20

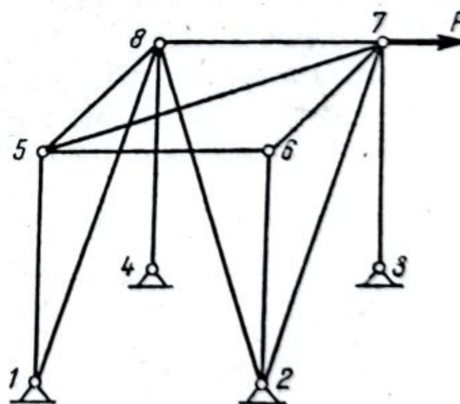


Fig. 8.21

— Nodul *7*: din ecuaţia de proiecţie pe o axă paralelă cu bara *7—8*, rezultă

$$N_{78}=P.$$

Alte două ecuaţii de proiecţie, pe o axă paralelă cu *6—7* şi respectiv *7—3*, dau

$$N_{72}=N_{73}=0.$$

— Nodul *8*: din ecuaţiile de proiecţie pe axe paralele respectiv cu barele *7—8, 8—5* şi *8—1*, rezultă

$$N_{25}=-1{,}596\ P, \quad N_{81}=1{,}320\ P, \quad N_{84}=-0{,}055\ P.$$

§ 12. Metoda secțiunilor (Ritter). Se bazează pe teorema echilibrului părților. Secționînd grinda cu zăbrele în două părți, fiecare dintre aceste două părți trebuie să fie în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare aferente și a eforturilor din barele secționate. Observăm că, dacă o parte ar conține numai un singur nod, atunci s-ar reveni la metoda izolării nodurilor, descrisă la paragraful precedent.

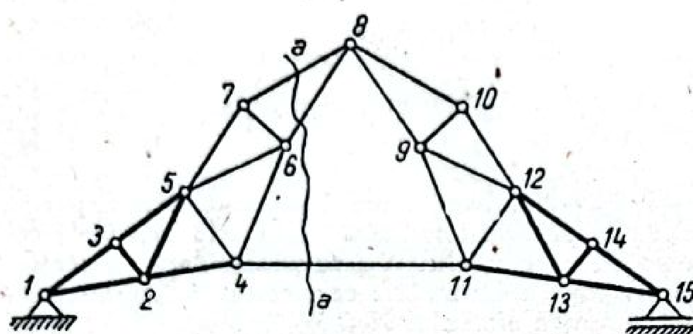


Fig. 8.22

Pentru a pune condiția ca una dintre cele două părți secționate să fie în echilibru, dispunem în plan de trei ecuații scalare de echilibru, necunoscutele fiind eforturile din barele secționate (reacțiunile se presupun a fi fost calculate anterior prin ecuațiile de echilibru ale întregii grinzi).

Metoda secțiunilor prezintă interes atunci cînd cele trei ecuații de echilibru ale unei părți secționate conțin trei necunoscute. Aceasta este posibil, dacă secțiunea efectuată întîlnește trei bare. Cele trei necunoscute au valori finite și unice, dacă direcțiile celor trei bare secționate nu sînt nici concurente, nici paralele.

Ecuațiile de echilibru ale unei porțiuni secționate pot fi formate astfel, încît să obținem cîte o singură necunoscută în fiecare ecuație, ceea ce spre deosebire de metoda precedentă, ne dă posibilitatea de a calcula eforturile dintr-o bară, fără a fi nevoie să cunoaștem eforturile din alte bare. Această particularitate a metodei o face să fie utilizată adesea în statica construcțiilor.

Metoda secțiunilor se mai folosește în unele cazuri, în combinație cu metoda izolării nodurilor. De exemplu, s-a arătat mai înainte că la ferma din fig. 8.22 nu este posibilă calcularea eforturilor prin metoda izolării nodurilor, decît pentru barele trasate cu linii mai pline. Pentru a utiliza totuși și mai departe metoda izolării nodurilor, este necesar să facem o secțiune după linia $a-a$. O dată determinate prin metoda secțiunilor eforturile din barele secționate, putem aplica mai departe metoda izolării nodurilor fără a mai întîmpina vreo dificultate.

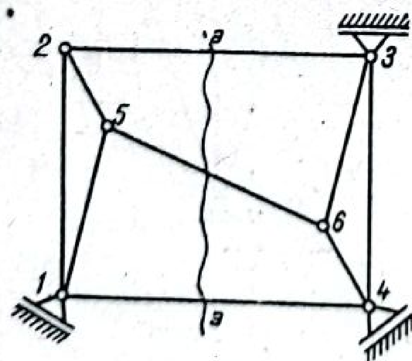


Fig. 8.23

De asemenea, pentru a putea utiliza metoda izolării nodurilor la sistemul plan articulat din fig. 8.23 este necesar mai întîi să aplicăm o singură dată metoda secțiunilor, efectuînd, de exemplu secțiunea $a-a$.

Aplicație. 8°. Să aplicăm metoda secțiunilor pentru grinda cu zăbrele din fig. 8.24. Pentru calcularea efortului N_{24}, este necesar să efectuăm o secțiune care să întîlnească trei bare neconcurente, printre care și bara $2-4$. Fie $b-b$ această secțiune. Se obține o ecuație care conține ca necunoscută numai efortul N_{24}, dacă se scrie o ecuație de momente în raport cu punctul de intersecție al celorlalte două bare secționate, adică în raport cu nodul 3.

În principiu este indiferent dacă formăm ecuațiile de echilibru pentru porțiunea din stînga sau pentru cea din dreapta. Ecuația de echilibru respectivă pentru porțiunea din stînga este:

$$-N_{24}h_3+M_3=0,$$

unde am notat cu h_3 distanța de la nodul *3* la bara *2—4* și cu M_3, momentul forțelor exterioare (inclusiv reacțiunile) aplicate pe porțiunea din stînga, în raport cu punctul *3*.

În cazul de față

$$V_1=1,5\ P,\ M_3=-V_1a+P\frac{a}{2}=$$

$$=-Pa,\ h_3=a\sin 30°=\frac{a}{2}.$$

Înlocuind în prima ecuație, găsim

$$N_{24}=-2P.$$

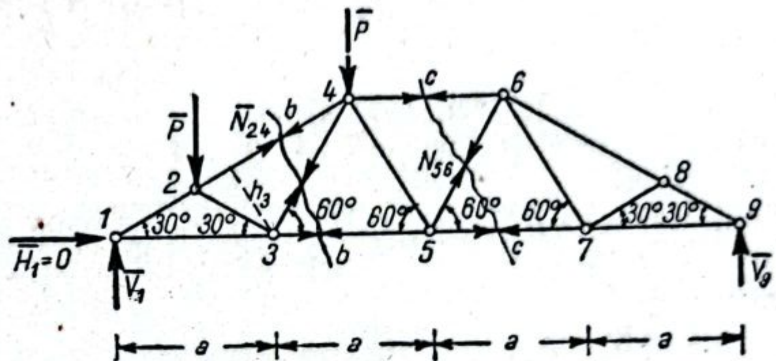


Fig. 8.24

Pentru a calcula efortul N_{56}, efectuăm secțiunea *c—c*. Celelalte bare secționate, *4—6* și *5—7* sînt paralele, astfel că o ecuație de proiecție pe direcția perpendiculară acestora nu va conține eforturile N_{46} și N_{57}. O astfel de ecuație de echilibru corespunzătoare porțiunii din stînga este

$$T_5+N_{56}\cos 30°=0,$$

unde T_5 este forța tăietoare obținută însumînd forțele exterioare aplicate pe această parte a grinzii. În cazul de față

$$T_5=V_1-2P=-\frac{P}{2}.$$

Rezolvînd ecuația de echilibru, găsim

$$N_{56}=P\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

§ 13. Metoda înlocuirii barelor. S-a spus mai înainte că există grinzi cu zăbrele la care nu se pot aplica cele două metode descrise anterior. Este vorba de acele grinzi care nu posedă nici un nod în care să se întîlnească numai două bare și la care nu se poate efectua nici o secțiune care să întîlnească trei bare necunoscute și neparalele. În aceste cazuri se aplică metoda înlocuirii barelor, care ne dă posibilitatea de a rezolva orice grindă cu zăbrele static determinată.

Să presupunem că într-o grindă cu zăbrele nerezolvabilă cu ajutorul primelor două metode, suprimăm p bare și le înlocuim prin alte bare, astfel ca sistemul nou creat să fie rezolvabil prin aceste două metode. Cele p bare noi pot lega două noduri între ele, sau pot lega un nod al sistemului cu un punct fix oarecare. Trebuie numai să avem grijă ca noua grindă cu zăbrele transformată să fie nemobilă și static determinată.

Vom nota cu $N_0^{(1)}$, $N_0^{(2)}$, ... eforturile din sistemul transformat, produse de forțele exterioare date și care pot fi determinate prin metoda izolării nodurilor sau prin metoda secțiunilor.

Dacă ne închipuim că barele suprimate au fost înlocuite prin eforturile respective, pe care le notăm cu $X_1, X_2, \ldots, X_p$, să presupunem că punem succesiv

$$\begin{aligned}
&X_1=1,\ X_2=0,\ X_3=0,\ \ldots,\ X_{p-1}=0,\ X_p=0,\\
&X_1=0,\ X_2=1,\ X_3=0,\ \ldots,\ X_{p-1}=0,\ X_p=0,\\
&X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=1,\ \ldots,\ X_{p-1}=0,\ X_p=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ \ldots,\ X_{p-1}=1,\ X_p=0,\\
&X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=0,\ \ldots,\ X_{p-1}=0,\ X_p=1.
\end{aligned}$$

Vom indica mai simplu aceste stări de încărcare cu: $X_1=1, X_2=1, \ldots, X_p=1$.

Urmează deci că în sistemul inițial $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sînt eforturi în bare, iar în sistemul transformat sînt perechi de forțe exterioare, aplicate asupra nodurilor respective.

Stării de încărcare $X_1=1$, îi vor corespunde eforturile $N_1^{(1)}, N_1^{(2)}, N_1^{(3)}, \ldots$ în barele sistemului transformat. De asemenea pentru $X_2=1$ va corespunde $N_2^{(1)}, N_2^{(2)}, N_2^{(3)}, \ldots$ ş.a.m.d. Aceste eforturi rezultate din încărcările $X_1=1$, $X_2=1, \ldots, X_p=1$ pot fi de asemenea calculate prin metoda izolării nodurilor sau metoda secțiunilor.

Considerînd acum că forțele $X_1, X_2, \ldots, X_p$, în sistemul transformat, au valori oarecare şi notînd cu $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, \ldots$ eforturile din barele sistemului transformat, rezultate din suprapunerea încărcărilor date şi a încărcărilor $X_1, X_2, \ldots, X_p$, rezultă pe baza relațiilor liniare de dependență dintre eforturi şi încărcări

$$\left.\begin{aligned}
&N^{(1)}=N_0^{(1)}+N_1^{(1)}\cdot X_1+N_2^{(1)}\cdot X_2+\cdots+N_p^{(1)}\cdot X_p\\
&N^{(2)}=N_0^{(2)}+N_1^{(2)}\cdot X_1+N_2^{(2)}\cdot X_2+\cdots+N_p^{(2)}\cdot X_p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Aceasta deoarece dacă, de exemplu, încărcarea $X_2=1$ a produs în bara *1* efortul $N_2^{(1)}$, încărcarea oarecare $X_2=X_2$ va produce în aceeaşi bară efortul $N_2^{(1)}\cdot X_2$.

Să arătăm acum că eforturile din cele p bare noi ale sistemului modificat sînt nule, deoarece aceste bare nu există în realitate. Se obține, astfel, un sistem de p ecuații liniare

$$\left\{\begin{aligned}
&N_0^{(1)}+N_1^{(1)}\cdot X_1+N_2^{(1)}\cdot X_2+\cdots+N_p^{(1)}\cdot X_p=0,\\
&N_0^{(2)}+N_1^{(2)}\cdot X_1+N_2^{(2)}\cdot X_2+\cdots+N_p^{(2)}\cdot X_p=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&N_0^{(p)}+N_1^{(p)}\cdot X_1+N_2^{(p)}\cdot X_2+\cdots+N_p^{(p)}\cdot X_p=0,
\end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

din care se pot calcula necunoscutele $X_1, X_2, \ldots, X_p$ şi, apoi, cu ajutorul relațiilor (8.37) se pot determina celelalte eforturi din bare. Este necesar pentru aceasta ca determinantul coeficienților necunoscutelor să fie diferit de zero.

Sistemul inițial, la care cele p bare sînt suprimate, va fi deci în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare date și a forțelor X_1, X_2, ..., X_p determinate din sistemul de ecuații (8.38). Restabilind acum configurația sistemului inițial prin introducerea la loc a barelor suprimate, forțele X vor însemna tocmai eforturile din aceste bare.

În general, la sistemele articulate plane este suficient să înlocuim una sau două bare, pentru a le putea rezolva.

Aplicație. 9°. În grinda cu zăbrele[1] din fig. 8.25 este suficient să înlocuim o singură bară, pentru a putea calcula eforturile din bare. În cazul de față, bara *3–6* a fost înlocuită prin bara *1–5*. Notăm cu X_1 efortul din bara *3–6* din sistemul inițial.

Elementele geometrice ale sistemului sînt suficient determinate, pentru calculul nostru, dacă cunoaștem unghiurile α și β. Presupunem că $\sin\alpha=0{,}6$ și $\sin\beta=0{,}8$.

În tabela 7, au fost înscrise în coloanele 2 și 3 eforturile din bare, produse de încărcarea dată P și de încărcarea $X_1=1$, în sistemul modificat.

Tabela 7

Bara	Eforturi N_0 din sarcina P	Eforturi N_1 din încărcarea $X_1=1$	$N_1 \cdot X_1$	Eforturi definitive $N=N_0+N_1 \cdot X_1$
2–3, *3–4*	0	$-\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14}P$	$+\frac{15}{14}P$
1–2, *4–5*	0	-1	$+\frac{9}{7}P$	$+\frac{9}{7}P$
2–5, *4–1*	0	$+\frac{5}{6}$	$+\frac{15}{14}P$	$-\frac{15}{14}P$
1–6, *5–6*	$+\frac{5}{8}P$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{45}{56}P$	$+\frac{10}{7}P$
1–5	$-\frac{3}{8}P$	$-\frac{7}{24}$	$+\frac{3}{8}P$	0

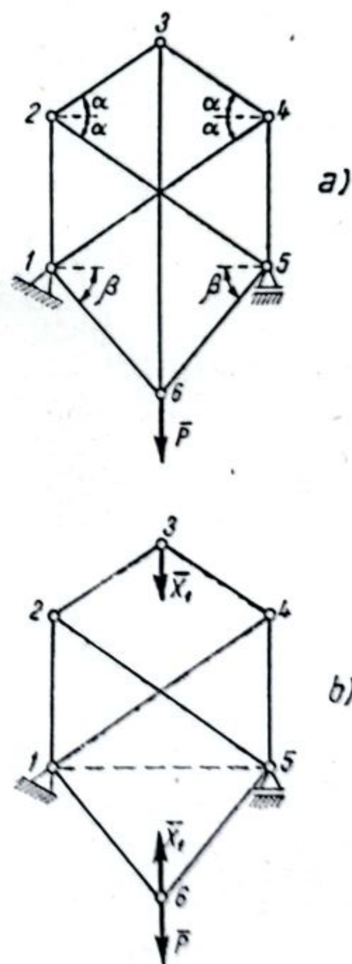


Fig. 8.25

Sistemul de ecuații (8.38) se reduce la

$$N_0^{(1)}+N_1^{(1)} \cdot X_1=0,$$

unde $N_0^{(1)}$ este efortul din bara introdusă, produs de încărcarea dată, iar $N_1^{(1)}$ este efortul din aceeași bară, produs de încărcarea $X_1=1$. Înlocuind prin valorile numerice calculate

$$X_1=-\frac{N_0^{(1)}}{N_1^{(1)}}=-\frac{3P \cdot 24}{8 \cdot 7}=-\frac{9}{7}P.$$

Ultimele două coloane servesc la calcularea eforturilor definitive, conform relațiilor (8.38) care în cazul acesta devin

$$N=N_0+N_1 \cdot X_1.$$

---

[1] După А. В. Дарков, В. И. Кузнецов, Строительная Механика, Трансжелдориздат, Москва, 1956, стр. 34–35.

§ 14. **Poligon articulat.** Numim *poligon articulat* un sistem de bare articulate între ele, sistem care are forma unui poligon deschis.

Poligoanele articulate cu mai mult de două bare sînt sisteme mobile. Prin urmare se pune problema de a determina forma de echilibru a poligonului, precum şi eforturile din bare.

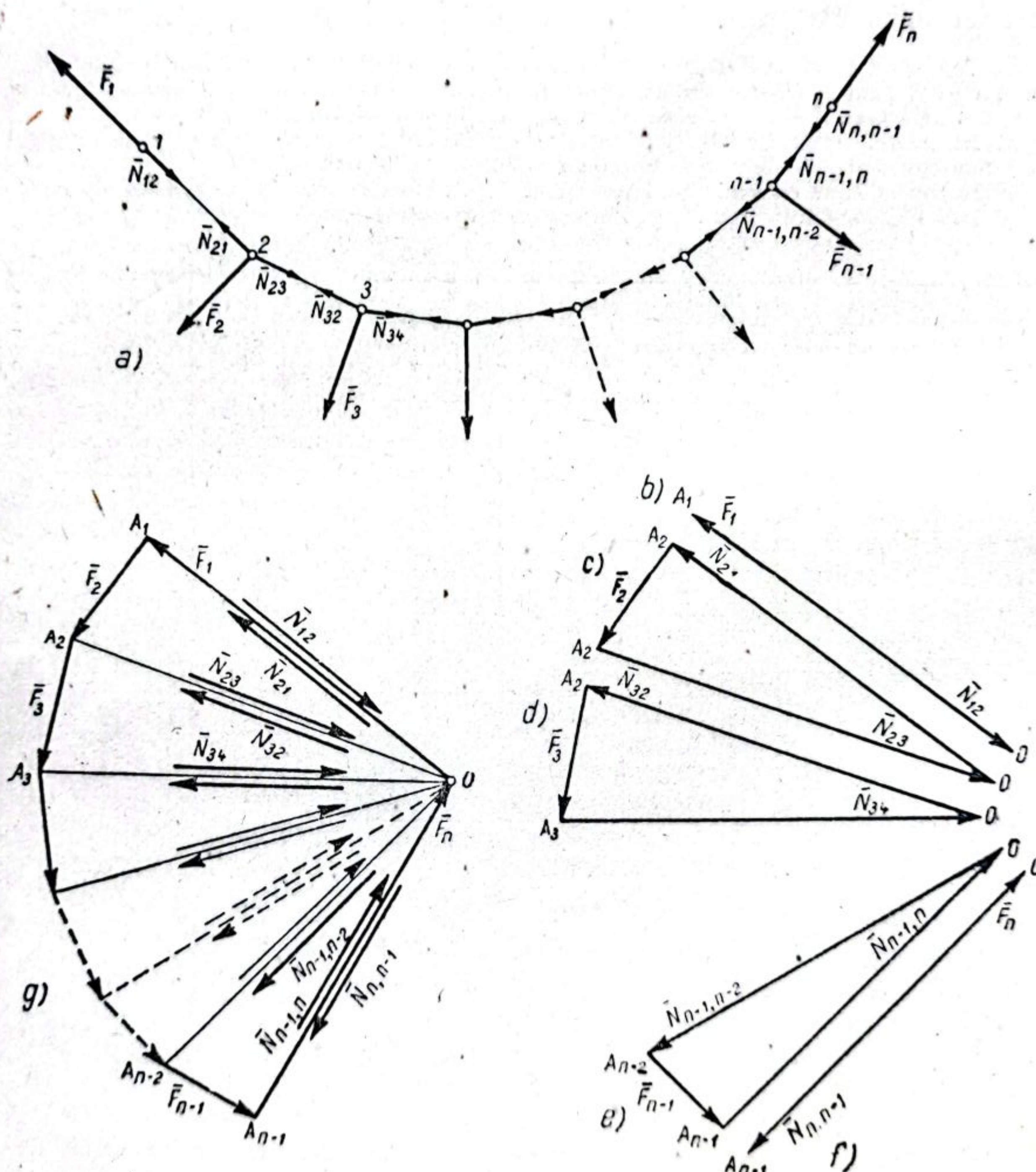


Fig. 8.26

Fie un poligon articulat în ale cărui noduri 1, 2, ..., n acţionează un sistem de forţe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ echivalent cu zero (fig. 8.26). În bare se

vor dezvolta eforturile $\overline{N}_{12}=-\overline{N}_{21}$, $\overline{N}_{23}=-\overline{N}_{32}$, pe care le considerăm că se aplică asupra nodurilor respective.

Condiția necesară și suficientă de echilibru a acestui sistem articulat, ca fiecare nod să fie în echilibru sub acțiunea forțelor date și a forțelor de legătură care îl acționează, se poate reprezenta grafic prin cîte un poligon al forțelor, închis.

Pentru nodurile extreme, relațiile de echilibru

$$\overline{F}_1+\overline{N}_{12}=0, \qquad \overline{F}_n+\overline{N}_{n,n-1}=0$$

ne arată că poligoanele respective se reduc la două forțe egale și de sens contrar. În fig. 8.26, *b* s-a reprezentat grafic echilibrul nodului *1*.

În fig. 8.26, *c*, *d*, *e*, *f* s-au construit poligoane de forțe pentru nodurile *2* și *3*; $n-1$, n. Se constată că aceste poligoane se pot suprapune grafic de-a lungul laturilor lor comune OA_1, OA_2, OA_3 etc., deoarece aceste laturi au aceeași direcție și aceeași mărime, la scara grafică a desenului. Această suprapunere s-a executat în fig. 8.26, *g*. Se obține în acest fel poligonul forțelor date $OA_1 \ldots A_{n-1}O$, care este un poligon închis și parcurs în același sens de aceste forțe, deoarece rezultanta forțelor care acționează sistemul articulat trebuie să fie nulă, eforturile $\overline{N}_{12}$, $\overline{N}_{21}$, $\overline{N}_{23}$, $\overline{N}_{32}$ etc. anulîndu-se reciproc.

Laturile OA_1, OA_2, OA_3 etc. se numesc *raze polare*, iar punctul O de concurență al lor, se numește *pol*. Figura geometrică formată de laturile poligonului articulat, paralele cu razele polare, se numește *poligon funicular*. În cazurile cînd laturile poligonului funicular devin foarte mici, tinzînd către zero, iar forțele aplicate la noduri tind către forțe repartizate, poligonul funicular ia forma unei curbe denumită *curbă funiculară*.

Construcția poligonului funicular, și deci determinarea eforturilor din bare și a poziției lor, se execută astfel: întîi se construiește poligonul închis al forțelor date (fig. 8.26, *g*) polul O fiind situat la intersecția liniilor de acțiune a forțelor extreme $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_n$ și se construiesc celelalte raze polare OA_2, ..., OA_{n-2}. Dintr-un punct oarecare *1*, se trasează latura *1—2* paralelă cu OA_1 și avînd lungimea dată a barei, apoi latura *2—3* paralelă cu OA_2 etc. Eforturile din bare sînt date de segmentele OA_1, OA_2 etc., măsurate la scara grafică la care a fost construit poligonul de forțe.

În legătură cu problema poligoanelor articulate, putem face următoarele observații:

a) Deoarece forța exterioară care acționează la un nod formează cu eforturile din barele alăturate, un triunghi, urmează că această forță și cele două bare alăturate sînt situate în același plan.

b) Ca o consecință a observației precedente deducem că un poligon articulat acționat de forțe exterioare paralele cu un plan este el însuși paralel cu acel plan.

c) Dacă eforturile din bare sînt toate eforturi de întindere, poligonul articulat poate fi înlocuit cu un fir perfect flexibil și neextensibil, de greutate neglijabilă.

Construcția grafică a poligonului funicular pentru un sistem oarecare de forțe date este extrem de utilă în multe probleme ale staticii și ea va fi examinată amănunțit mai departe (cap. X, § 4).

În general, este mai dificilă rezolvarea analitică a unui poligon articulat, în cazul general. De cele mai multe ori se recurge la metode grafice. Există unele cazuri însă cînd calculul analitic nu prezintă dificultăţi, unul dintre acestea este poligonul articulat suspendat la ambele extremităţi şi acţionat de forţe paralele, egale, echidistante şi de acelaşi sens. Aceste

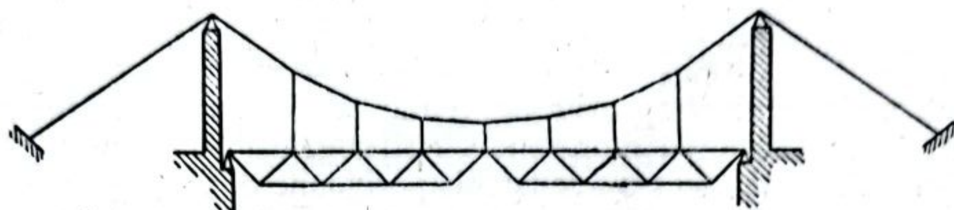


Fig. 8.27

sisteme se întîlnesc în practică la unele poduri suspendate (fig. 8.27), forţele exterioare provenind din acţiunea gravitaţiei asupra construcţiei susţinute de poligonul articulat.

Fie în acest caz poligonul articulat *1, 2, ..., n*, acţionat de forţele verticale $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$. Considerăm un sistem de axe ortogonale Oxy în planul poligonului, axa Oy fiind paralelă şi de sens contrar forţelor. Notăm cu $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$, ..., $\alpha_{n-1,n}$, unghiurile formate cu axa Ox, de barele parcurse în sensul crescător al numerotaţiei nodurilor şi presupunem, fără a se restrînge prin aceasta generalitatea problemei, că punctul *1* coincide cu originea axelor de coordonate. În fig. 8.28 au fost reprezentate numai nodurile $i-1$, i şi $i+1$.

Formînd ecuaţiile de echilibru pentru fiecare nod, obţinem proiectînd pe axa Ox

$$N_{i,\,i-1}\cos\alpha_{i-1,\,i}=N_{i,\,i+1}\cos\alpha_{i,\,i+1}=\text{const}=H, \tag{8.39}$$

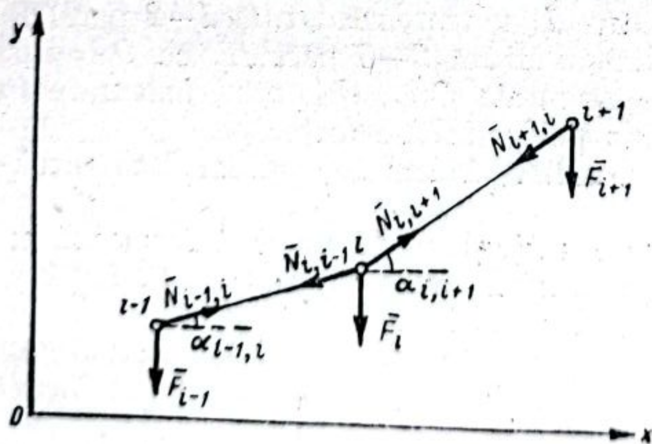


Fig. 8.28

unde constanta H este proiecţia pe Ox a eforturilor din bare.

Din ecuaţiile de proiecţie pe Oy găsim pentru nodul i, după ce am înlocuit pe N din (8.39)

$$\operatorname{tg}\alpha_{i,\,i+1}-\operatorname{tg}\alpha_{i-1,\,i}=\frac{F_i}{H}=\frac{F}{H}=\text{const}=k, \tag{8.40}$$

unde am notat cu F valoarea comună a forţelor F_i.

Însumînd relaţiile precedente, scrise pentru fiecare nod, de la *2* la $i-1$, obţinem valoarea unghiului $\alpha_{i-1,i}$ în funcţie de constanta k şi unghiul $\alpha_{1,2}$

$$\operatorname{tg}\alpha_{i-1,\,i}=\operatorname{tg}\alpha_{1,\,2}+k(i-2). \tag{8.41}$$

Coordonatele nodului i sînt

$$x_i=(i-1)a,\ y_i=a(\operatorname{tg}\alpha_{1,2}+\operatorname{tg}\alpha_{2,3}+\cdots+\operatorname{tg}\alpha_{i-1,i}). \qquad (8.42)$$

Înlocuind valorile pentru tg α din relația (8.41) în expresia y_i găsim

$$y_i=a[(i-1)\operatorname{tg}\alpha_{1,2}+k+2k+\cdots+(i-2)k]=a\left[(i-1)\operatorname{tg}\alpha_{1,2}+\frac{(i-1)(i-2)}{2}k\right].$$

Eliminăm pe i între ultima relație și (8.42); obținem

$$y_i=x_i\operatorname{tg}\alpha_{1,2}+\frac{k}{2}x_i\left(\frac{x}{a}-1\right).$$

Ultima relație ne arată că poligonul articulat este înscris într-o parabolă de ecuație

$$y=x\operatorname{tg}\alpha_{1,2}+\frac{k}{2}x\left(\frac{x}{a}-1\right). \qquad (8.43)$$

Determinarea celor doi parametri k și tg $\alpha_{1,2}$ nu prezintă dificultăți, dacă se cunoaște punctul n unde este suspendat celălalt capăt al poligonului.

IX. FIRE

§ 1. **Definiții. Ipoteze de calcul.** În mecanica rațională prin fir se înțelege un corp la care, din punct de vedere geometric, două dimensiuni sînt neglijabile; firele sînt considerate perfect flexibile și torsionabile, ele neputînd prelua eforturi de încovoiere și de torsiune.

O caracteristică a firelor, în studiul care urmează, comună de altfel tuturor corpurilor studiate de mecanica rațională, este inextensibilitatea lor. Este necesar să precizăm că firele fiind materializate prin cabluri, lanțuri, odgoane etc., în realitate nu există fire perfect flexibile și inextensibile. Astfel firele nu sînt absolut inextensibile, ci se lungesc sub acțiunea unor solicitări de întindere și chiar se rup, dacă aceste solicitări sînt prea mari. În

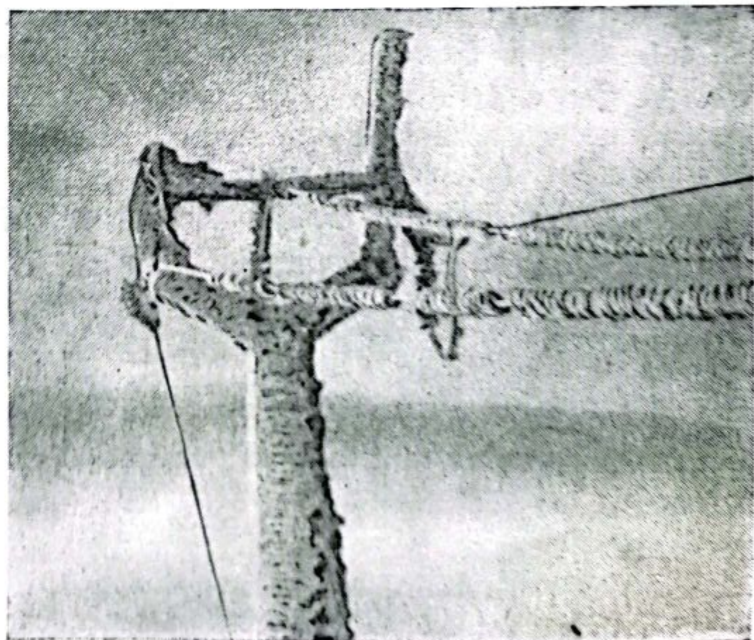


Fig. 9.1

fotografia din fig. 9.1 se arată un exemplu de fir care, fiind acționat de o încărcare foarte mare de chiciură și, simultan, de presiunea vîntului, s-a rupt, avariind și stîlpul din beton armat.

În majoritatea aplicațiilor tehnice, este suficient să considerăm firele ca perfect flexibile și inextensibile. Totuși, există unele cazuri pentru care această schemă de calcul nu dă rezultate mulțumitoare, de exemplu extensibilitatea firelor se ia în considerație la funiculare cu deschideri mari, poduri suspendate și static nedeterminate etc., iar rigiditatea firelor are influență în special în calculul sistemelor de scripeți și a unor transmisii de mișcări prin cabluri, lanțuri și curele.

Studiul static al firelor urmărește determinarea formelor de echilibru, precum și a eforturilor interioare ale firelor supuse acțiunii unor forțe exterioare oarecare.

§ 2. **Fir acționat de forțe repartizate.** Vom considera mai întîi cazul cînd firul este acționat numai de forțe repartizate. Forma de echilibru a unui astfel de fir se numește *curbă funiculară*.

Ecuațiile generale de echilibru ale firelor se pot deduce pornind de la ecuațiile (8.14) și (8.15) stabilite la bare. Grosimea firului fiind neglijabilă, firul poate fi înlocuit prin axa lui, punctele de aplicație ale forțelor exterioare, cît și ale eforturilor interioare într-o secțiune, fiind în consecință situate pe această axă. Urmează că termenii din ecuațiile (8.14) și (8.15) care exprimă momentele forțelor exterioare și ale eforturilor din secțiune în raport cu diferitele puncte ale axei, sînt nule. Va rămîne

$$\frac{d\overline{R}(s)}{ds}+\overline{p}(s)=0, \quad \overline{\tau}(s)\times\overline{R}(s)=0, \tag{9.1}$$

unde $\overline{R}(s)$ este rezultanta eforturilor interioare, aplicată în secțiunea s și anume pe fața secțiunii întîlnită în față, atunci cînd parcurgem firul într-un sens ales pozitiv (s fiind lungimea arcului de curbă, măsurat de la un punct definit ca origine, în care $s=0$), $\overline{p}(s)$ este forța exterioară raportată la unitatea de lungime a firului, forță care acționează în dreptul secțiunii s, iar $\overline{\tau}(s)$ este versorul tangent la fir, în dreptul aceleiași secțiuni.

Relația a doua ne arată că vectorul $\overline{R}(s)$ este tangent la fir. Este deci potrivit a se înlocui notația $\overline{R}$ cu $\overline{N}$. Ecuațiile vectoriale ale curbei funiculare a firului vor fi prin urmare

$$\frac{d\overline{N}(s)}{ds}+\overline{p}(s)=0. \tag{9.2}$$

Conform convenției enunțate în paragraful anterior, putem pune

$$\overline{N}(s)=N(s)\cdot\overline{\tau}(s), \tag{9.3}$$

unde $N(s)$ este o mărime scalară, reprezentînd tensiunea din fir în secțiunea situată la distanța s de punctul definit ca origine. $N(s)$ nu poate avea decît valori pozitive în cazul firelor, deoarece într-un fir nu pot exista decît eforturi de întindere.

Derivînd partea din dreapta a relației (9.3) în raport cu s și înlocuind în (9.2), obținem

$$\frac{dN}{ds}\bar{\tau}+\frac{N}{\rho}\bar{\nu}+\bar{p}=0, \tag{9.4}$$

unde $\bar{\nu}$ este versorul normalei principale la curbă, iar ρ este raza de curbură.

Prin multiplicarea scalară cu versorii tangentei, normalei principale și binormalei, se obțin *ecuațiile intrinseci de echilibru ale firelor*

$$\frac{dN}{ds}+p_{\tau}=0, \tag{9.5}$$

$$\frac{N}{\rho}+p_{\nu}=0, \tag{9.6}$$

$$p_{\beta}=0, \tag{9.7}$$

p_{τ}, p_{ν} și p_{β} fiind proiecțiile lui $\bar{p}$ pe axele triedrului intrinsec.

Aceste ecuații ne permit să facem unele observații interesante asupra formei de echilibru a firelor acționate de forțe repartizate. Astfel:

a) ecuația (9.7) ne arată că în dreptul fiecărui punct al curbei funiculare, forța repartizată $\bar{p}$ trebuie să fie conținută în planul osculator corespunzător;

b) dacă $\bar{p}$ are o direcție constantă, planul osculator este paralel cu această direcție. Însă, așa cum se știe din geometria diferențială dacă în toate punctele unei curbe planul osculator este permanent paralel cu o direcție fixă, curba este situată într-un plan fix paralel cu această direcție;

c) ecuația (9.6) ne arată că forța repartizată $\bar{p}$ este îndreptată întotdeauna înspre partea convexă a curbei funiculare și anume, în sensul tensiunilor descrescătoare (9.5);

d) dacă toate forțele repartizate $\bar{p}$ au același suport, curba funiculară ia forma unei linii drepte care coincide cu acest suport comun;

e) componenta tangențială a forței repartizate $\bar{p}$ are ca efect modificarea tensiunii, iar dacă tensiunea este cunoscută, componenta normală determină curbura;

f) dacă $\bar{p}$ este în mod constant normal la fir, $p_{\tau}=0$, iar tensiunea este constantă în modul. Această observație este valabilă și în cazul unui fir de greutate neglijabilă, întins pe o suprafață netedă. Tensiunea introdusă la un capăt al firului este condusă cu aceeași valoare, la capătul celălalt. Reacțiunea suprafeței este tocmai componenta p_{ν} din ecuația (9.6), prin urmare, normala la suprafață este conținută în planul osculator al curbei. Urmează că figura de echilibru a unui astfel de fir este o linie geodezică a suprafeței. Reacțiunea suprafeței are valoarea absolută $p_{\nu}=\frac{N}{\rho}$, unde N este tensiunea constantă din fir: $N(0)=N(s)=N(l)$, l fiind lungimea totală a firului;

g) presupunînd că forța repartizată $\bar{p}$ derivă dintr-o funcție de forțe $U(x, y, z)$, vom avea

$$\bar{p}=\text{grad}\, U.$$

Proiectînd această relaţie vectorială pe direcţia $\bar{\tau}$ obţinem

$$p_{\tau}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}.$$

Ecuaţia (9.5) se poate scrie în acest caz

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(N+U)=0,$$

sau

$$N+U=\text{const}.$$

Prin urmare tensiunea din fir diferă numai printr-o constantă de funcţia de forţă U cu semn schimbat. Dacă U este o funcţie uniformă de x, y, z, tensiunea N are aceeaşi valoare în toate punctele firului, care sînt situate pe aceeaşi suprafaţă de nivel.

De exemplu, în cazul firelor acţionate numai de greutatea proprie constantă p, considerînd axa Oy verticală ascendentă, avem

$$U=-py+\text{const}, \quad \text{iar} \quad N=py+\text{const}.$$

Printr-o alegere convenabilă a poziţiei axelor se poate obţine anularea constantei, astfel că rezultă

$$N=py, \tag{9.9}$$

formulă care va fi obţinută mai departe prin calcul direct.

Pentru aplicaţiile practice este mai comod, de multe ori, să recurgem la un sistem fix de axe de coordonate rectangulare. Proiectînd ecuaţia de echilibru (9.2) pe aceste axe şi utilizînd şi relaţia (9.3), se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\left(N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s}+p_x=0, \quad \frac{\mathrm{d}\left(N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s}+p_y=0, \quad \frac{\mathrm{d}\left(N\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s}+p_z=0, \tag{9.10}$$

unde am notat cu p_x, p_y, p_z, proiecţiile forţei repartizate $\bar{p}$ pe axele Ox, Oy, Oz.

În afară de aceasta mai dispunem de ecuaţia

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2=1. \tag{9.11}$$

Cu ajutorul acestor patru ecuaţii diferenţiale se pot determina necunoscutele x, y, z şi N, în funcţie de s. Ecuaţiile (9.10) şi (9.11) sînt de ordinul întîi în raport cu N, însă de ordinul al doilea în raport cu x, y, z. Vom dispune deci în integralele generale de şase constante arbitrare, care se vor determina prin condiţii la limită.

Cea mai simplă problemă este aceea a unui fir de lungime dată l, suspendat la cele două extremităţi $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$. Considerînd originea arcelor de curbă în A şi scriind că pentru $s=0$ şi $s=l$, x, y, z iau valori corespunzătoare punctelor A şi B, se obţin şase ecuaţii pentru

determinarea acestor șase constante. O discuție a acestui sistem de ecuații ne indică dacă problema admite soluții și dacă aceste soluții sînt sau nu determinate și finite.

§ 3. Fir suspendat la extremități, acționat de o forță repartizată, de direcție constantă și proporțională cu lungimea elementului de fir. Lănțișorul. Aplicațiile cele mai des întîlnite în practică, se referă la firele acționate numai de forțe repartizate, paralele cu o direcție fixă. În această categorie intră firele acționate de greutatea proprie. Conform observației *b*, firul va fi situat într-un același plan. Alegem sistemul de axe, astfel încît axa Oy să fie paralelă și de sens invers forței repartizate, iar Ox perpendiculară pe Oy, firul fiind situat în planul xOy (fig. 9.2). Notînd cu p sarcina repartizată a firului, ecuațiile (9.10) se transformă în

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)=p. \tag{9.12}$$

Prima ecuație se integrează ușor:

$$N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=H. \tag{9.13}$$

Semnificația constantei H este foarte importantă dacă observăm că proiecția $N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ a tensiunii N pe axa Ox este constantă în orice punct al curbei funiculare a unui fir acționat de sarcini repartizate paralele cu Oy și este egală cu H.

Prin urmare tensiunea într-o secțiune în care tangenta la fir este paralelă cu Ox va fi egală tocmai cu această constantă H.

Eliminînd tensiunea N între a doua ecuație (9.12) și ecuația (9.13) se găsește

$$H\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=p. \tag{9.14}$$

Înlocuind $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$, se obține

$$\mathrm{d}(y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{a}\,\mathrm{d}x, \tag{9.15}$$

unde am notat

$$a=\frac{H}{p}. \tag{9.16}$$

Integrala acestei ecuații este

$$y'=\operatorname{sh}\frac{x-x_0}{a} \tag{9.17}$$

x_0 fiind o constantă de integrare.

Integrînd încă o dată ecuația (9.17) se obține ecuația curbei funiculare a firului, cunoscută sub numele de „lănțișor", a fiind parametrul lănțișorului

$$y-y_0=a\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a} \tag{9.18}$$

iar y_0 o nouă constantă de integrare.

Din relația (9.13) se deduce valoarea tensiunii

$$N=H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=H\sqrt{1+y'^2}=H\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x-x_0}{a}}$$
$$N=H\operatorname{ch}\frac{x-x_0}{a}. \tag{9.19}$$

Transportînd paralel axele de coordonate în punctul de coordonate x_0, y_0 şi păstrînd aceeaşi notaţie Oxy pentru noile axe, relaţiile (9.17), (9.18), (9.19) devin

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \tag{9.20}$$

$$N = H \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \tag{9.21}$$

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \tag{9.22}$$

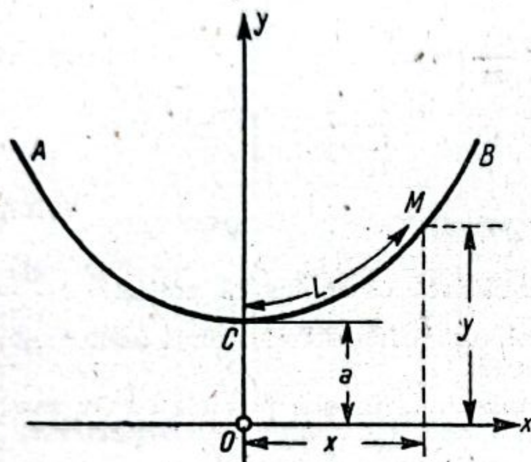


Fig. 9.2

Curba funiculară are în acest caz un punct de minim în O $(0, a)$ şi este simetrică în raport cu noua axă Oy (fig. 9.2).

Lungimea curbei între abscisele 0 şi x se obţine înlocuind în (9.15) pe $\sqrt{1+y'^2}$ din $ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$L = \int_0^x ds = a\int_0^x dy' = ay'.$$

Ţinînd seama de (9.20) avem

$$L = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \tag{9.23}$$

Ridicînd la pătrat relaţia precedentă şi folosind (9.22) găsim o relaţie între lungimea arcului CM, ordonata y a punctului M şi parametrul a

$$L^2 + a^2 = y^2. \tag{9.24}$$

Dacă eliminăm $\operatorname{ch} \frac{x}{a}$ din (9.21) şi (9.22) se obţine relaţia

$$N = py, \tag{9.25}$$

care a fost stabilită cu ocazia observaţiei făcute asupra firului acţionat de o forţă repartizată care derivă dintr-o funcţie de forţă. Tensiunea în fir variază deci proporţional cu ordonata şi anume, este egală cu greutatea unei porţiuni de fir cuprinsă între punctul considerat şi axa Ox. În consecinţă, un fir omogen supus numai la acţiunea greutăţii sale proprii, este în echilibru dacă cele două extremităţi ale lui sînt petrecute pe după doi scripeţi foarte mici, astfel încît cele două capete să atîrne pînă la axa Ox.

Lănţişorul mai poate fi definit prin „ecuaţia naturală" a lui, obţinută din integrarea directă a relaţiei (9.14) şi înlocuirea derivatei y' cu $\operatorname{tg} \varphi$, unghiul φ fiind cuprins între tangenta geometrică într-un punct curent al curbei şi axa Ox

$$L = a \operatorname{tg} \varphi. \tag{9.26}$$

Avem de asemenea

$$\sin \varphi = \frac{L}{y}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{y}. \tag{9.27}$$

Raza de curbură se poate deduce din relaţia (9.6)

$$\rho = \frac{-N}{p_\nu} = \frac{-N}{-p \cos \varphi} = \frac{py}{p \cos \varphi} = \frac{y}{\cos \varphi} = \frac{y^2}{a}. \tag{9.28}$$

Raza de curbură ρ este deci egală cu normala la curbă, cuprinsă între punctul curent respectiv şi axa Ox.

Aplicații. 1°. Se dă lănțișorul suspendat în două puncte și avînd lungimea cunoscută. Se cere să se determine parametrul a.

În fig. 9.3 este reprezentat un lănțișor suspendat în punctele A și B. Distanța verticală și orizontală între aceste două puncte este

$$2l=l_1+l_2, \quad 2h=h_1-h_2.$$

Lungimea totală a lănțișorului va fi

$$2L=L_1+L_2=a\left(\operatorname{sh}\frac{l_1}{a}+\operatorname{sh}\frac{l_2}{a}\right).$$

Avem de asemenea

$$2h=h_1-h_2=a\left(\operatorname{ch}\frac{l_1}{a}-\operatorname{ch}\frac{l_2}{a}\right).$$

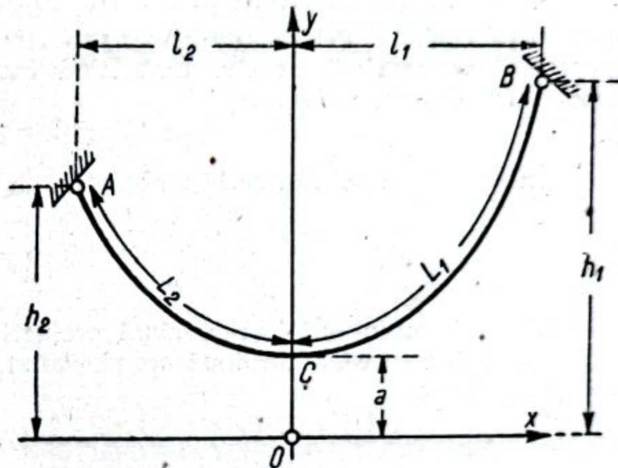


Fig. 9.3

Ridicînd la pătrat ambele relații și scăzînd a doua din prima, după o serie de transformări de funcții hiperbolice, obținem

$$L^2-h^2=a^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{a}.$$

Rezultă o relație între parametrul a și cantitățile cunoscute l, L și h

$$a\operatorname{sh}\frac{l}{a}=\sqrt{L^2-h^2},$$

de unde se poate calcula valoarea acestui parametru.

2°. Un fir omogen de lungime $2L=120$ m și greutate $p=10$ kgf/m este suspendat în două puncte A și B, situate pe aceeași orizontală, la distanța $2l=100$ m. Să se determine parametrul a, săgeata f, unghiul α cuprins între tangenta în A și orizontală, precum și tensiunea și reacțiunile în A și B.

Din relația (9.23), pentru $x=l$ deducem

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{a}}{\frac{l}{a}}=\frac{L}{l}=1{,}2.$$

Cu ajutorul tabelelor de funcții hiperbolice, căutăm prin încercări o valoare $\frac{l}{a}$ care satisface ecuația de mai înainte și anume:

$$\frac{l}{a}=1{,}065, \quad \text{deci } a=\frac{50}{1{,}065}=47 \text{ m}.$$

Ordonatele extremităților sînt

$$y_A=y_B=\sqrt{L^2+a^2}=76{,}2 \text{ m}.$$

Săgeata f se obține din

$$f=y_A-a=29{,}2 \text{ m}.$$

Tensiunea la vîrful lănțișorului și la extremități este

$$H=a\cdot p=47\cdot 10=470 \text{ kgf},$$

$$N_A=N_B=y_A\cdot p=76{,}2\cdot 10=762 \text{ kgf}.$$

Reacțiunile verticale în punctele de suspensiune sînt

$$V_A=V_B=pL=10\cdot 60=600 \text{ kgf},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{V_A}{H}=\frac{600}{470}=1{,}278, \quad \alpha=51°58'.$$

§ 4. Fir suspendat la extremități, acționat de o forță repartizată, de direcție constantă și proporțională cu lungimea proiecției elementului de fir pe un plan perpendicular pe direcția forței. Parabola. Alegem același sistem de axe ca la punctul precedent, firul fiind situat în planul xOy, iar forța unitară repartizîndu-se uniform de-a lungul axei Ox. Relațiile (9.12), (9.13), (9.14) vor fi valabile și în acest caz.

Forța unitară p paralelă cu axa Oy, din relația (9.14) este considerată ca fiind funcție de arcul de curbă s. Pentru rezolvarea problemei propuse, înlocuim această forță cu o forță repartizată q, paralelă cu Oy, însă fiind funcție de x. Pentru o porțiune ds infinit mică a curbei funiculare, vom avea

$$p\,ds=q\,dx.$$

Înlocuind în relația (9.14), obținem

$$H\frac{d^2y}{dx^2}=q, \tag{9.29}$$

unde H, conform cu (9.13), reprezintă proiecția constantă a tensiunii N pe axa Ox.

Integrînd succesiv de două ori și ținînd seamă că q este constant conform enunțului problemei, avem

$$y'=\frac{q}{H}(x-x_0), \tag{9.30}$$

$$y=\frac{q}{2H}(x-x_0)^2+y_0. \tag{9.31}$$

Ultima ecuație reprezintă tocmai curba funiculară a firului, care este o *parabolă*. Cazul de încărcare examinat intervine în practică mai ales la firele acționate de sarcini provenite din depunerile de zăpadă. De asemenea, precum vom vedea mai departe, în tehnică se aproximează de multe ori lănțișorul cu o parabolă, în special la firele acționate de greutatea proprie și care au o săgeată relativ mică.

În ecuațiile (9.30) și (9.31), x_0 și y_0 sînt două constante de integrare. Efectuînd o translație a axelor de coordonate, astfel încît aceste constante să se anuleze, obținem

$$y'=\frac{q}{H}x, \tag{9.32}$$

$$y=\frac{q}{2H}x^2. \tag{9.33}$$

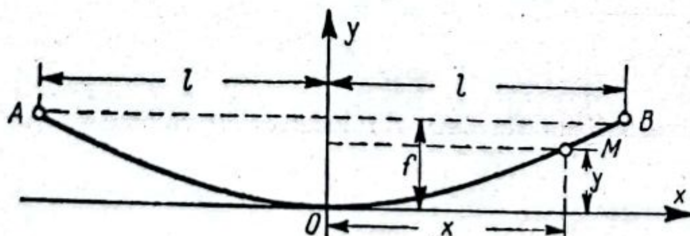


Fig. 9.4

Parabola reprezentată de ultima ecuație este simetrică față de axa Oy, iar axa Ox este tangentă în vîrful ei. Dacă notăm cu f săgeata în cazul unei parabole simetrice (fig. 9.4), și particularizăm relația (9.33) pentru punctele de suspensie, avem

$$f=\frac{q}{2H}\cdot l^2, \tag{9.34}$$

de unde se deduce în acest caz, valoarea tensiunii în vîrful parabolei

$$H=\frac{ql^2}{2f}. \tag{9.35}$$

Eliminînd pe H între (9.35) și (9.33), obținem o altă formă a ecuației parabolei, în cazul cînd cunoaștem săgeata f

$$y=\frac{f}{l^2}x^2. \tag{9.36}$$

Tensiunea într-un punct oarecare se găsește din (9.13) și (9.32)

$$N=H\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=H\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{H^2+q^2x^2}. \tag{9.37}$$

În punctele de suspensie ale unei parabole simetrice avem

$$N_A=N_B=\frac{ql}{2f}\sqrt{4f^2+l^2}. \tag{9.38}$$

Lungimea arcului OM al parabolei se calculează după metodele obișnuite analitice

$$L=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sqrt{1+\frac{q^2}{H^2}x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sqrt{1+\frac{4f^2}{l^4}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

De obicei, se utilizează formula aproximativă

$$L\approx x\left(1+\frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2}\right), \tag{9.39}$$

pentru parabolele cu săgeată relativă $\left(\frac{f}{l}\right)$ mică, formulă obținută prin dezvoltarea în serie a integralei precedente.

A p l i c a ț i e. 3°. Un cablu suspendat în A și B (fig. 9.5) este acționat de o sarcină verticală de 4 kgf/m uniform repartizată pe orizontală. Punctul B este situat cu 6 m mai sus ca punctul A. Săgeata față de o orizontală prin A este de 2 m, iar distanța orizontală dintre A și B este de 300 m. Neglijînd greutatea proprie a firului, se cer valorile tensiunilor în A, B și O.

Folosind notațiile din figură și prelungind parabola pînă în A', simetric cu B, avem

$$f-h=\frac{f}{l^2}l_1^2,\quad l+l_1=b.$$

Din aceste două expresii obținem

$$l=\frac{b}{1+\sqrt{1-\frac{h}{f}}},\quad l_1=b\frac{\sqrt{1-\frac{h}{f}}}{1+\sqrt{1-\frac{h}{f}}}.$$

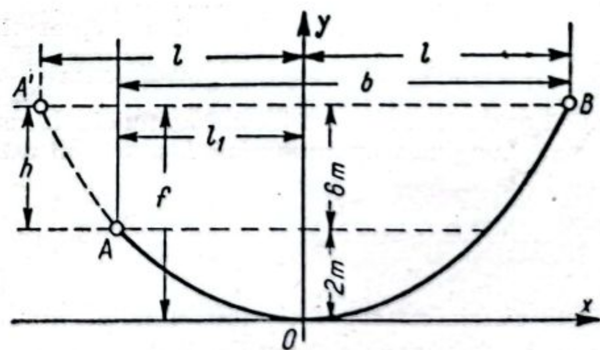


Fig. 9.5

În cazul nostru, înlocuind cu valorile date, obținem

$$l=200\ \text{m},\quad l_1=100\ \text{m}.$$

Tensiunile în punctele indicate vor fi

$$N_0=H=\frac{ql^2}{2f}=\frac{4\cdot 40\,000}{2\cdot 8}=10\,000\ \text{kgf},$$

$$N_A=\frac{q\cdot l_1}{2(f-h)}\sqrt{4(f-h)^2+l_1^2}=\frac{4\cdot 100}{2\cdot 2}\sqrt{4\cdot 4+10\,000}=10\,008\ \text{kgf}.$$

Tot astfel găsim

$$N_B = 10\,032 \text{ kg}.$$

O b s e r v a ţ i e. Comparînd valorile obţinute pentru N_A şi N_B cu cea obţinută pentru N_0 se deduce că tensiunea se poate considera practic constantă, adică se poate neglija termenul q^2x^2 din formula (9.37), respectiv termenul $4f^2$ din formula (9.38) şi se poate considera $N = H = \frac{ql^2}{8f}$ [v. formula (9.35)].

§ 5. Lănţişor cu săgeată relativ mică. Dacă firele suspendate pe deschideri mari au săgeţi foarte mici, atunci tensiunea creşte considerabil. În acest caz, componenta orizontală H a tensiunii este cu mult mai mare decît greutatea proprie a firului şi în consecinţă putem neglija puterile mai mari ca 3 ale raportului $\frac{2pL}{H}$, L fiind semilungimea firului. Deoarece însă întotdeauna $x < 2L$, urmează că putem neglija de asemenea aceleaşi puteri ale raportului

$$\frac{xp}{H} = \frac{x}{a}.$$

Dezvoltînd în serie funcţiile hiperbolice care intervin în formulele lănţişorului, aproximăm

$$\operatorname{sh}\frac{x}{a} \approx \frac{x}{a} + \frac{x^3}{6a^3}, \quad \operatorname{ch}\frac{x}{a} \approx 1 + \frac{x^2}{2a^2}.$$

Înlocuind în relaţiile (9.21), (9.22), (9.23), obţinem

$$N = H + \frac{p^2}{2H}x^2 \approx H, \tag{9.40}$$

$$y = \frac{H}{p} + \frac{p}{2H}x^2, \tag{9.41}$$

$$L = x + \frac{p^2}{6H^2}x^3. \tag{9.42}$$

Se observă că ecuaţia a doua reprezintă o parabolă identică cu parabola (9.33), însă deplasată de-a lungul axei Oy cu distanţa $\frac{H}{p} = a$. Prin urmare, un lănţişor cu săgeată relativ mică poate fi studiat, utilizînd formulele deduse anterior pentru parabolă.

Lungimea aproximativă L a arcului măsurat de la vîrf, se poate pune

$$L = x\left(1 + \frac{p^2}{6H^2}x^2\right) = x\left(1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2}\right),$$

dacă eliminăm raportul $\frac{p}{H}$ din (9.42) şi din ecuaţia (9.33) a parabolei care are vîrful în originea axelor. În acest fel se obţine relaţia (9.39).

Se observă de asemenea că valoarea (9.40) a tensiunii este identică cu valoarea (9.37) obţinută la parabolă, dacă se neglijează în dezvoltarea în serie a relaţiei (9.37) puterea a patra a raportului $\frac{px}{H}$. Practic tensiunea N se presupune constantă (vezi observaţia de la aplicaţia 3°).

§ 6. Fir acţionat de forţe concentrate. S-a arătat că un poligon format din bare articulate, care este acţionat de forţe concentrate aplicate la

noduri, poate fi înlocuit cu un fir perfect flexibil şi inextensibil, de greutate neglijabilă, dacă toate barele sînt supuse numai unor eforturi de întindere. Într-adevăr, un fir acţionat de două forţe aplicate la extremităţile lui, este în echilibru numai dacă cele două forţe sînt egale şi de sens contrar şi au un suport comun, iar forma de echilibru a acestui fir este o linie dreaptă care coincide cu suportul comun al celor două forţe.

Prin urmare, problema firului acţionat de forţe concentrate se reduce, principial, la determinarea poligonului funicular al acestor forţe. Diferitele condiţii care se pot impune acestui poligon funicular, în scopul determinării unice a formei lui, vor fi examinate în cadrul staticii grafice (cap. X, § 6—7).

Aplicaţie. **4°. Un cablu de greutate constantă p, suspendat în punctele A şi B, suportă o forţă verticală concentrată P în punctul C (fig. 9.6). Cunoscînd cotele punctelor A şi B faţă de C, precum şi distanţele orizontale respective, se cere să se determine tensiunile în A şi B, utilizînd formulele aproximative.**

Porţiunile de cablu AC şi BC se asimilează cu arce de parabolă, iar originea axelor de coordonate se alege în C. Pentru parabola AC, axele se notează cu x_1, y_1, iar pentru BC, cu x_2, y_2.

Ecuaţiile celor două parabole vor fi

$$AC:\ y_1=\frac{p}{2H}x_1^2+C_1x_1, \qquad BC:\ y_2=\frac{p}{2H}x_2^2+C_2x_2,$$

C_1 şi C_2 fiind două constante.

În punctele A şi B avem

$$h_1=\frac{p}{2H}l_1^2+C_1l_1, \qquad h_2=\frac{p}{2H}l_2^2+C_2l_2.$$

Componenta verticală a tensiunii în fir are, în general, expresia:

$$V=H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=px+CH.$$

În punctul C, unde $x=0$, expresia lui V va pierde primul termen. Particularizînd pe V pentru stînga şi dreapta punctului C şi înlocuind constantele C_1 şi C_2 cu valorile lor de mai înainte găsim

$$V_{1C}=\frac{h_1}{l_1}H-\frac{p}{2}l_1, \qquad V_{2C}=\frac{h_2}{l_2}H-\frac{p}{2}l_2.$$

În punctul C, forţa concentrată P este echilibrată de tensiunile N_{1C} şi N_{2C} din cele două porţiuni de fire (fig. 9.6, b).

Ecuaţia de proiecţie pe orizontală a acestor forţe ne dă: $H_1=H_2=H$, iar ecuaţia de proiecţie pe verticală ne dă valoarea lui H

$$H\left(\frac{h_1}{l_1}+\frac{h_2}{l_2}\right)-\frac{p}{2}(l_1+l_2)=P,$$

sau

$$H=\frac{P+p\dfrac{l_1+l_2}{2}}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2},$$

unde α_1 şi α_2 sînt unghiurile formate cu orizontala de AC şi BC.

Componentele verticale ale tensiunilor din A şi B vor fi

$$V_A=\frac{pl_1}{2}+\frac{h_1}{l_1}H,\qquad V_B=\frac{pl_2}{2}+\frac{h_2}{l_2}H,$$

iar tensiunile în aceste puncte

$$N_A=\sqrt{H^2+V_A^2},\qquad N_B=\sqrt{H^2+V_B^2}.$$

Fig. 9.6

§ 7. Echilibrul unui fir situat pe o suprafaţă lucie şi acţionat de forţe repartizate. Fie

$$f(x,y,z)=0 \tag{9.43}$$

ecuaţia suprafeţei lucii pe care se sprijină firul, raportată la triedrul triortogonal fix $Oxyz$. Vom considera că legătura firului cu această suprafaţă este bilaterală.

Un element ds al firului este acţionat de forţa $\bar{p}$ds precum şi de reacţiunea $\bar{r}$ds a suprafeţei.

Reacţiunea suprafeţei are direcţia normalei la suprafaţă, în orice punct al firului, deci se poate scrie

$$\bar{r}=\lambda\ \mathrm{grad}\ f. \tag{9.44}$$

Ecuaţiile de proiecţie pe triedrul $Oxyz$, care exprimă echilibrul elementului ds al firului, se vor obţine din ecuaţia (9.10), la care vom adăuga proiecţiile reacţiunii $\bar{r}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)+p_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}. \tag{9.45}$$

Aceste trei ecuaţii diferenţiale, împreună cu (9.43) şi (9.11) permit determinarea în funcţie de s, a necunoscutelor x, y, z, N şi λ.

Pentru a stabili ecuaţiile intrinseci de echilibru ale elementului de fir, vom utiliza relaţia vectorială de echilibru (9.4), ţinînd seama şi de reacţiunea $\bar{r}$ a suprafeţei. Ecuaţiile (9.4) devin în acest caz

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}\bar{\tau}+\frac{N}{\rho}\bar{\nu}+\bar{p}+\bar{r}=0, \tag{9.46}$$

unde $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$ sînt versorii tangentei şi normalei principale la curba firului în punctul considerat M, iar ρ este raza de curbură a firului în acelaşi punct.

Vom proiecta relaţia precedentă pe triedrul lui Darboux, format din versorii $\bar{n}$, $\bar{\tau}$ şi $\bar{g}$, unde $\bar{n}$ este versorul normal la suprafaţă, iar $\bar{g}=\bar{n}\times\bar{\tau}$

un versor situat în planul tangent la suprafaţă în punctul M şi perpendicular pe versorul tangent $\bar{\tau}$ la curbă (fig. 9.7); $\bar{g}$ determină normala geodezică a curbei firului; $\bar{\nu}$, $\bar{g}$ şi $\bar{n}$ sînt situaţi în planul normal la fir, în M.

Multiplicînd scalar relaţia (9.46) succesiv cu $\bar{\tau}$, $\bar{g}$, $\bar{\nu}$ obţinem

$$\frac{dN}{ds}+p_\tau=0, \quad \frac{N}{\rho}\bar{\nu}\cdot\bar{g}+p_g=0, \quad \frac{N}{\rho}\bar{\nu}\cdot\bar{n}+p_n+r=0, \tag{9.47}$$

unde p_τ, p_g şi p_n sînt proiecţiile lui $\bar{p}$ pe versorii $\bar{\tau}$, $\bar{g}$, $\bar{n}$. Notînd cu θ unghiul format de $\bar{n}$ şi $\bar{\nu}$, avem

$$\bar{\nu}\cdot\bar{g}=\sin\theta, \qquad \bar{n}\cdot\bar{\nu}=\cos\theta.$$

Expresiile

$$\rho_n=\frac{\rho}{\cos\theta}, \quad \rho_g=\frac{\rho}{\sin\theta} \tag{9.48}$$

poartă respectiv denumirile de *rază de curbură normală a suprafeţei* pe direcţia $\bar{\tau}$ şi *rază de curbură geodezică*. Cu aceasta, relaţiile (9.47) devin

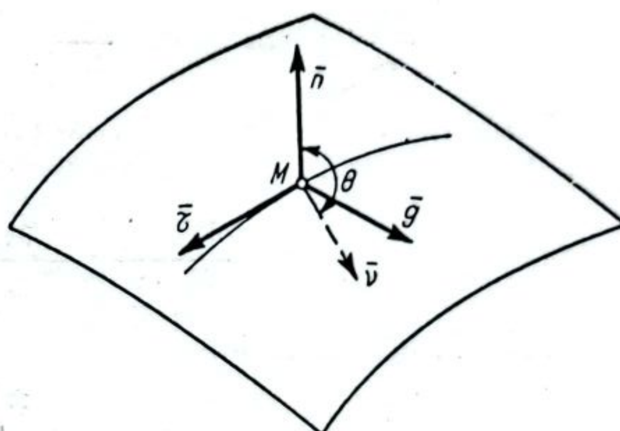


Fig. 9.7

$$\frac{dN}{ds}+p_\tau=0, \quad \frac{N}{\rho_g}+p_g=0, \quad \frac{N}{\rho_n}+p_n+r=0. \tag{9.49}$$

Aplicaţie. 5°. Să se determine forma de echilibru a unui fir aşezat pe o suprafaţă lucie, asupra firului neacţionînd nici o forţă exterioară dată ($\bar{p}=0$).

Din prima relaţie (9.49) rezultă $N=\text{const}$. Conform relaţiei a doua (9.49), urmează sau $N=0$, adică firul nu este întins, forma lui fiind arbitrară, sau $\rho_g=\infty$ şi $N=\text{const}\neq 0$, adică firul este aşezat pe o curbă geodezică a suprafeţei.

Aceste rezultate au fost menţionate şi în § 2 observaţia f.

§ 8. **Echilibrul unui fir situat pe o suprafaţă aspră şi acţionat de forţe repartizate.** În cazul cînd suprafaţa pe care se reazemă firul este aspră, reacţiunea acesteia asupra fiecărui element al firului se poate descompune într-o componentă normală la suprafaţă $\bar{r}\cdot ds$ şi o componentă tangentă la suprafaţă, $\bar{\Phi}ds$, numită forţă de frecare. Notînd cu α unghiul format de forţa de frecare $\bar{\Phi}ds$ cu tangenta $\bar{\tau}$ la fir, ecuaţiile intrinseci de echilibru (9.49) devin

$$\frac{dN}{ds}+p_\tau+\Phi\cos\alpha=0, \quad \frac{N}{\rho_g}+p_g+\Phi\sin\alpha=0, \quad \frac{N}{\rho_n}+p_n+r=0. \tag{9.50}$$

Conform celor arătate la cap. III, § 10 se admite, ca rezultat al experienţelor, că valoarea forţei de frecare maximă este proporţională cu componenta normală pe suprafaţă a reacţiunii:

$$\Phi \leqslant \mu r. \tag{9.51}$$

Eliminînd forța repartizată Φ de frecare între (9.51) și (9.50) rezultă că pentru aceleași forțe efectiv aplicate $\bar{p}$, formele de echilibru ale unui fir așezat pe o suprafață aspră vor fi cuprinse în general, între două curbe limită.

În cele ce urmează vom examina cazul în care $\bar{p}=0$, considerînd relația (9.51) la limita dintre echilibru și mișcare. Prin utilizarea relației (9.51), în care păstrăm numai semnul „egal", ecuațiile (9.50) devin

$$\frac{dN}{ds}+\mu r\cos\alpha=0,\quad \frac{N}{\rho_g}+\mu r\sin\alpha=0,\quad \frac{N}{\rho_n}+r=0. \tag{9.52}$$

Eliminînd r și α între relațiile precedente, se obține cu ajutorul relațiilor (9.48) o ecuație diferențială pentru valorile extreme ale lui N.

$$\frac{dN_{ext\,n}}{N_{ext\,n}}=\pm\frac{ds}{\rho_n}\sqrt{\mu^2-\mathrm{tg}^2\,\theta}.$$

Prin integrare găsim

$$N_{ext\,n}=Ce^{\pm\int\frac{ds}{\rho n}\sqrt{\mu^2-\mathrm{tg}^2\theta}}, \tag{9.53}$$

unde C este constanta de integrare.

Valoarea dublă a exponentului corespunde valorilor minime și maxime ale lui N.

Dacă am fi utilizat relația (9.51) în tot intervalul de echilibru, se observă ușor că am fi obținut pentru valoarea efortului N în fir, următoarea dublă inegalitate

$$N_{min}\leqslant N(s)\leqslant N_{max}. \tag{9.54}$$

În cazul cînd firul este așezat pe o geodezică a suprafeței, tg $\theta=0$, iar μ este constant, expresia (9.53) devine

$$\left.\begin{matrix}N_{min}\\N_{max}\end{matrix}\right\}=Ce^{\mp\mu\int\frac{ds}{\rho n}}.$$

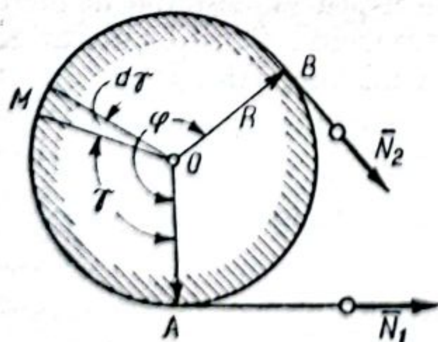


Fig. 9.8

În tehnică intervin foarte des cazurile în care firul este înfășurat pe o suprafață cilindrică circulară, după o secțiune circulară a acesteia.

Fie A și B cele două puncte extreme de tangență ale firului cu cilindrul aspru (fig. 9.8); γ este unghiul format de raza în A cu o rază oarecare în punctul M, iar φ este unghiul de înfășurare a firului format de razele OA și OB. În acest caz

$$\int\frac{ds}{\rho_n}=\int\frac{ds}{R}=\int d\gamma=\gamma.$$

Pentru $\gamma=0$ avem $N=N_1$, iar pentru $\gamma=\varphi$ avem $N=N_2$. Urmează, conform cu (9.55)

$$\left.\begin{matrix} N_{2\,min} \\ N_{2\,max} \end{matrix}\right\} = N_1 e^{\mp\mu\varphi}.$$

Se observă că termenul $e^{\mu\varphi}$ crește foarte repede o dată cu creșterea unghiului φ de înfășurare a firului. Astfel, dacă $\mu=0{,}3$, se obține pentru:

$$\varphi=2\pi \qquad e^{\mu\varphi}\approx 6{,}59,$$

$$\varphi=3\times 2\pi \qquad e^{\mu\varphi}\approx 285{,}68,$$

$$\varphi=4\times 2\pi \qquad e^{\mu\varphi}\approx 1\,881{,}5.$$

Rezultă că dispozitivele mecanice bazate pe fenomenul de frecare a firelor, ne vor da posibilitatea ca, utilizînd o forță mică $N_{2\,min}$ și cu ajutorul unui corp cilindric fix pe care se înfășoară firul, să putem echilibra o forță mare N_1 (de exemplu frîne cu bandă, cabestane, babale etc.).

X. ELEMENTE DE STATICĂ GRAFICĂ

§ 1. **Generalități.** Soluțiile grafice în problemele de statică prezintă un interes deosebit, în special pentru tehnicieni. Ele au fost dezvoltate pe larg în a doua jumătate a secolului trecut și la începutul secolului nostru deși nevoia unor calcule din ce în ce mai exacte a făcut ca soluțiile grafice să fie folosite mai puțin în ultimul timp.

Calculul grafic este util în multe probleme, deoarece:

— erorile grosolane sînt mult mai ușor de evitat pe cale grafică decît pe cale analitică;

— în multe împrejurări conduce mai repede decît calculele analitice la rezultate suficiente pentru practică.

În special, atunci cînd pentru alegerea unei soluții trebuie studiate mai multe variante, este recomandabil ca primele studii să se facă pe cale grafică. Pe baza studiilor grafice se poate alege soluția definitivă și numai aceasta se calculează exact, prin mijloace analitice.

În capitolul de față sînt prezentate cîteva elemente de bază ale metodelor grafice folosite în statică.

A. FORȚE CONCURENTE ÎN PLAN

§ 2. **Compunerea forțelor concurente în plan. Poligonul forțelor.** Așa cum s-a arătat și în primele capitole, forțele concurente se compun cu ajutorul poligonului forțelor.

Dacă în punctul O sînt aplicate n forțe $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ (fig. 10.1, a) rezultanta lor se obține cu ajutorul construcției din fig. 10.1, b, unde dintr-un

punct arbitrar A, se așază vectorii $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$, astfel ca originea unui vector să coincidă cu extremitatea celui precedent. Unind apoi originea A a primului vector cu extremitatea B a ultimului vector, se obține vectorul $\overline{AB}=\overline{R}$ a cărui valoare, direcție și sens coincid cu ale rezultantei

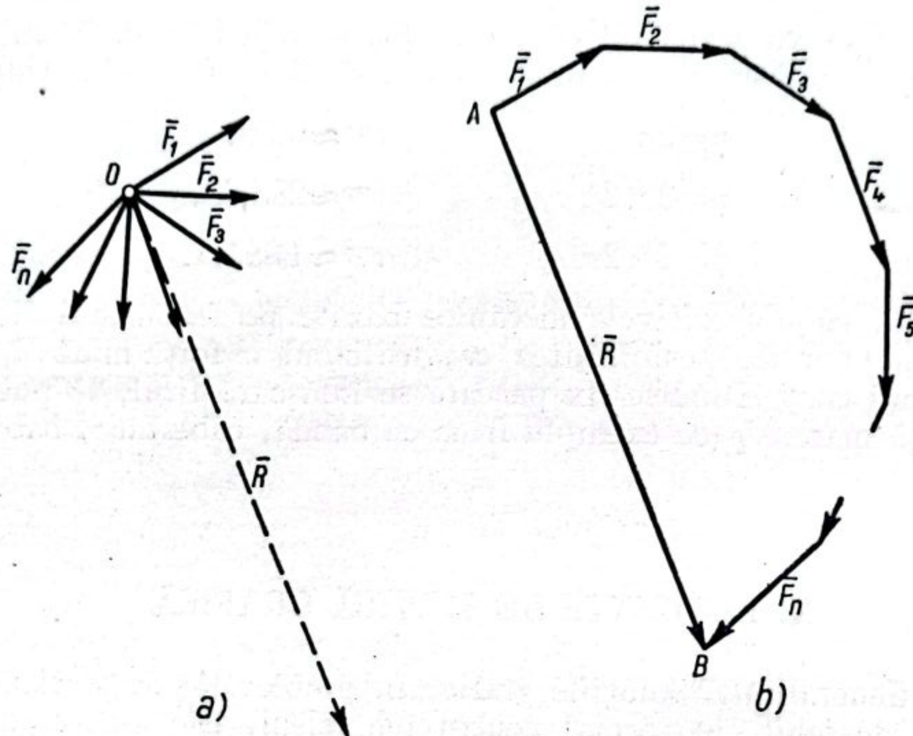


Fig. 10.1

sistemului de forțe dat. Ducînd prin O un vector echipolent cu $\overline{AB}$, acesta va reprezenta rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_n$.

Dacă punctul B coincide cu A, adică dacă poligonul de forțe este un poligon de forțe închis, rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forțe concurente în O este nulă, adică forțele $\overline{F}_1$, ..., $\overline{F}_n$ sînt în echilibru.

Deci: *condiția necesară și suficientă ca un sistem de forțe concurente să fie în echilibru este ca poligonul forțelor să fie un poligon închis.*

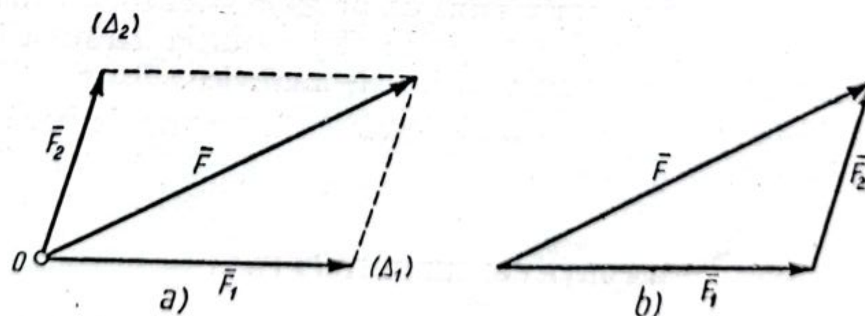
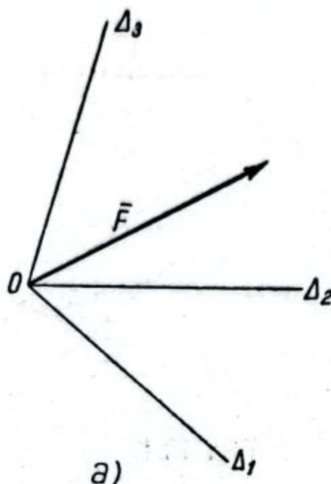


Fig. 10.2

§ 3. Descompunerea unei forțe după două direcții concurente, coplanare cu forța. Se folosește regula paralelogramului ca în fig. 10.2, *a*, unde forța $\overline{F}$ a fost descompusă în componentele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ după direcțiile Δ_1 și Δ_2,

concurente în O pe suportul forței $\overline{F}$. În mod obișnuit nu se construiește paralelogramul chiar pe forța $\overline{F}$ ca în fig. 10.2, *a*, ci se duce un vector echipolent cu $\overline{F}$ și prin extremitățile sale se duc paralele la Δ_1 și Δ_2 (fig. 10.2, *b*). Cele două laturi ale triunghiului care formează un poligon de forțe cu originea în originea vectorului $\overline{F}$ și cu extremitatea în extremitatea, lui $\overline{F}$, determină valorile, direcțiile și sensurile componentelor $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$.

Descompunerea unei forțe după trei sau mai multe direcții concurente pe forță și coplanare cu ea, este o problemă nedeterminată. În fig. 10.3, *a* se dă forța $\overline{F}$ și direcțiile Δ_1, Δ_2, Δ_3 concurente în O. Dacă se duce un vector echipolent cu $\overline{F}$ și prin extremitățile sale se duc paralele la Δ_1 și Δ_3 și apoi o serie de paralele la Δ_2 ca în fig. 10.3, *b*, fiecare dintre paralele la Δ_2 conduce la cîte un poligon de forțe, care determină cîte o serie de componente după direcțiile Δ_1, Δ_2, Δ_3 care satisfac problema. Astfel, componentele pe cele trei direcții pot fi:



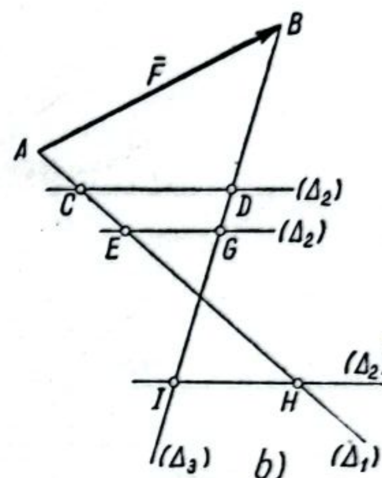


Fig. 10.3

$$\overline{AC},\ \overline{CD},\ \overline{DB},\ \text{sau}\ \overline{AE},\ \overline{EG},\ \overline{GB},\ \text{sau}\ \overline{AH},\ \overline{HI},\ \overline{IB}\ \text{etc.}$$

Problema are deci o infinitate de soluții.

B. FORȚE OARECARE ÎN PLAN

§ 4. Compunerea forțelor. Poligon funicular. Dacă asupra unui solid acționează un număr oarecare de forțe în același plan, ele se pot compune pe rînd cu ajutorul regulii paralelogramului, așa cum se arată în fig. 10.4. Forțele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ pot fi înlocuite de rezultanta lor $\overline{R}_{1,2}$, aceasta se compune apoi cu $\overline{F}_3$, obținîndu-se rezultanta $\overline{R}_{1,3}$, iar $\overline{R}_{1,3}$ se compune cu $\overline{F}_4$ obținîndu-se rezultanta $\overline{R}_{1,4}$, care este echivalentă cu sistemul inițial de forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$. Acest procedeu este rar întrebuințat, deoarece operația grafică este uneori dificil de aplicat, datorită faptului că intersecțiile dintre forțe nu intră totdeauna în cadrul desenului.

De aceea, se folosește o altă metodă numită *metoda poligonului funicular*. Se observă că valoarea, direcția și sensul rezultantei $\overline{R}$, obținîndu-se din compunerea succesivă a forțelor după regula paralelogramului, depinde

numai de valorile, direcţiile şi sensurile forţelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ (fig. 10.4) care acţionează solidul, dar nu depinde de poziţiile acestor forţe, astfel încît aceste elemente ale rezultantei $\bar{R}$ se pot obţine cu ajutorul unui poligon de forţe ca în fig. 10.5, *b* unde, începînd din *A* se aşază cap la cap vectorii

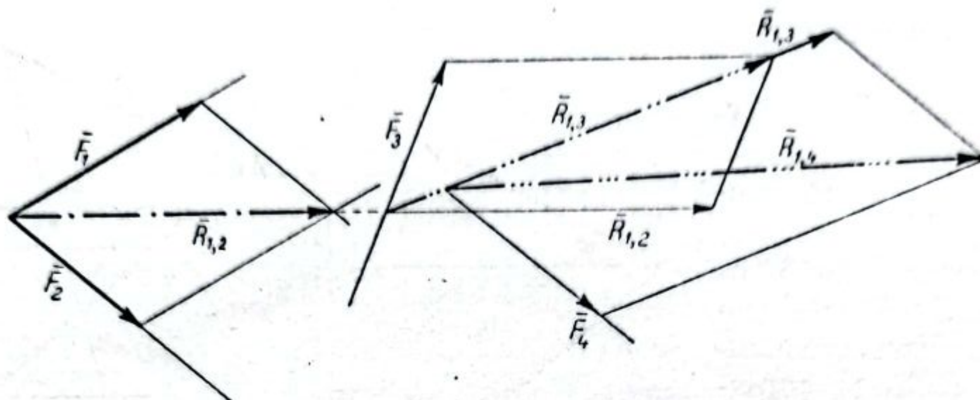


Fig. 10.4

$\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$. Vectorul $\overline{AB}$ reprezintă în valoare, direcţie şi sens rezultanta $\bar{R}$ a sistemului de forţe din fig. 10.5, *a*.

Mai trebuie determinată poziţia rezultantei, şi pentru aceasta este suficient să se cunoască un singur punct al suportului rezultantei. Pentru determinarea acestui punct se foloseşte o construcţie grafică care să înlocuiască sistemul de forţe $\bar{F}_1$, ..., $\bar{F}_4$ care acţionează solidul, cu un sistem echivalent alcătuit însă numai din două forţe.

În vecinătatea poligonului de forţe *ACDEB* (fig. 10.5, *b*) se ia un punct *O* care se uneşte cu punctele *A*, *C*, *D*, *E*, *B*. Punctul *O* se numeşte *pol*, iar segmentele *OA*, *OC*, *OD* etc. *raze polare*. Punctul *O* se poate lua arbitrar, însă în nici un caz pe dreapta *AB*.

Dintr-un punct *I* din vecinătatea forţei $\bar{F}_1$ (fig. 10.5, *a*) se duce paralela la *OA* pînă în punctul *G* de intersecţie cu $\bar{F}_1$, iar de aici paralela la *OC* pînă la punctul *K* de intersecţie cu $\bar{F}_2$, apoi din *K* paralela la *OD* pînă în punctul *L* de intersecţie cu $\bar{F}_3$, din *L* paralela la *OE* pînă în punctul *M* de intersecţie cu $\bar{F}_4$ şi de aici paralela la *OB*.

În punctul *G* forţa $\bar{F}_1$ poate fi înlocuită cu componentele sale de pe direcţiile $\overline{GI}$ şi $\overline{GK}$, ale căror valori, direcţii şi sensuri sînt date de razele polare $\overline{AO}=\bar{f}_0$ şi $\overline{OC}=\bar{f}_1$ din poligonul forţelor (fig. 10.5, *b*). La fel se înlocuieşte forţa $\bar{F}_2$ prin componentele sale $-\bar{f}_1=\overline{CO}$ şi $\bar{f}_2=\overline{OD}$ în punctul *K*, apoi forţa $\bar{F}_3$ prin componentele sale $-\bar{f}_2=\overline{DO}$ şi $\bar{f}_3=\overline{OE}$, în punctul *L* şi forţa $\bar{F}_4$ prin componentele sale $-\bar{f}_3=\overline{EO}$ şi $\bar{f}_4=\overline{OB}$ în punctul *M*.

În acest mod sistemul de forţe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ din fig. 10.5, *a* a fost înlocuit cu un sistem de forţe echivalent $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$, $-\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $-\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$, $-\bar{f}_3$, $\bar{f}_4$ acţionînd de-a lungul lanţului *IGKLMN*, lanţ care poartă numele de *poligon funicular*. Se observă că de-a lungul suportului *GK* acţionează două

forțe $\bar{f_1}$ și $-\bar{f_1}$ egale și de sens contrar, deci ele au un efect nul asupra solidului. La fel sistemul de forțe $\bar{f_2}$ și $-\bar{f_2}$ pe suportul KL; $\bar{f_3}$ și $-\bar{f_3}$ pe suportul LM își anulează efectele astfel că singurele forțe care rămîn în poligonul funicular sînt forțele $\bar{f_0}$ de pe suportul IG și $\bar{f_4}$ de pe suportul MN. Deci sistemul inițial de forțe $\bar{F_1}$, $\bar{F_2}$, $\bar{F_3}$, $\bar{F_4}$ este echivalent cu sistemul celor două forțe $\bar{f_0}$ și $\bar{f_4}$ care acționează după dreptele IG și MN. Rezultanta lor va trece prin punctul de intersecție P al acestor două drepte. Problema este astfel rezolvată, căci a fost determinat un punct P al suportului rezultantei $\bar{R}$, iar valoarea, direcția și sensul ei sînt cunoscute dinainte din poligonul forțelor.

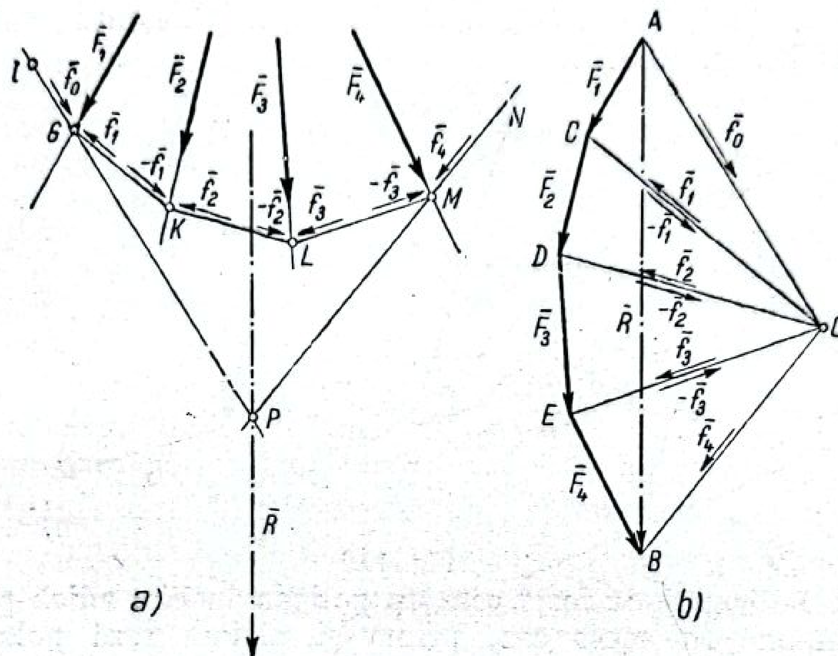


Fig. 10.5

De aici rezultă următoarea regulă pentru compunerea unui sistem de forțe oarecare în plan: se construiește poligonul forțelor date, care determină valoarea, direcția și sensul rezultantei $\bar{R}$. Se alege un pol și se duc razele polare corespunzătoare. Apoi se construiește un poligon funicular corespunzător acestui pol. Intersecția primei și ultimei laturi de poligon funicular determină un punct prin care trece rezultanta $\bar{R}$. Deci poligonul de forțe determină valoarea, direcția și sensul rezultantei, iar poligonul funicular determină poziția rezultantei.

Observații. Dacă punctul O ar fi fost luat pe dreapta AB, atunci prima și ultima latură de poligon funicular erau paralele și poziția rezultantei nu putea fi determinată; de aceea, s-a impus restricția ca polul O să nu se găsească pe dreapta AB.

Pentru un același pol O, punctul I, de unde începe construcția poligonului funicular, este arbitrar; deci aceluiași pol îi corespunde o infinitate de poligoane funiculare. Deoarece punctul O poate fi orice punct al planului, cu excepția punctelor de pe dreapta AB, rezultă că pentru un sistem de forțe se poate construi o triplă infinitate de poligoane funiculare. Toate punctele P care s-ar obține din această triplă infinitate de poligoane funiculare se găsesc pe o aceeași dreaptă, care constituie suportul rezultantei $\bar{R}$.

Folosirea poligonului de forțe și a poligonului funicular pentru un sistem de forțe oarecare în plan poate conduce la trei cazuri, care se interpretează astfel:

Cazul 1. Poligonul de forțe rămîne deschis, adică segmentul AB din fig. 10.5, *b* nu este nul. În acest caz, sistemul de forțe conduce la o *rezultantă* $\overline{R}=\overline{AB}$, a cărei poziție este determinată de poligonul funicular, așa cum s-a arătat în fig. 10.5, *a*.

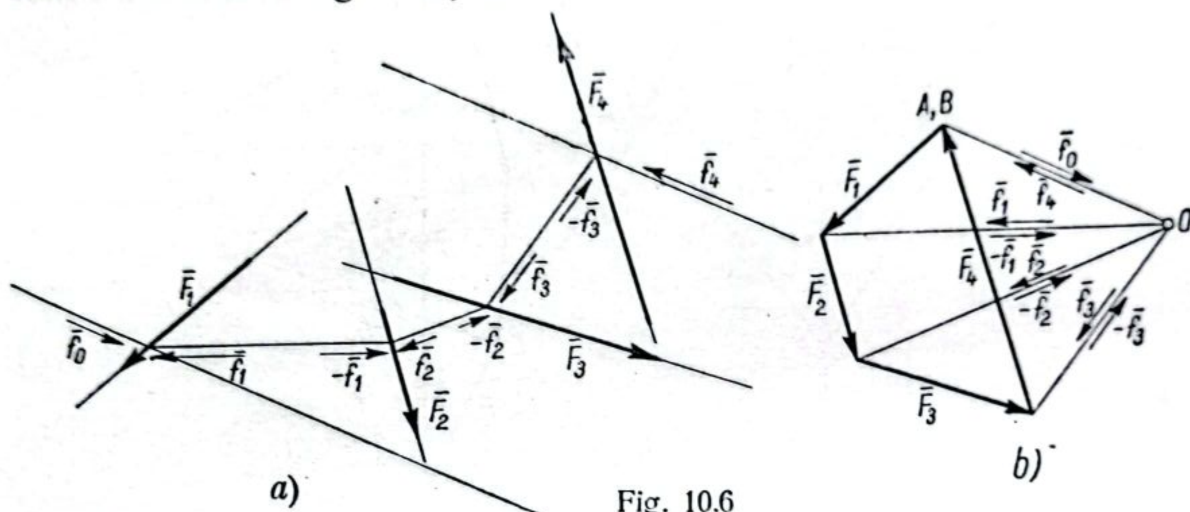


Fig. 10.6

Cazul 2. Poligonul de forțe este un poligon închis, adică punctele A și B se suprapun. În acest caz, prima și ultima rază polară coincid (fig. 10.6, *b*), iar în poligonul funicular, sistemul de forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ (fig. 10.6, *a*) se reduce la $\overline{f}_0$ și $\overline{f}_4$ care sînt paralele, egale și de sens contrar. Dacă suporturile lor nu coincid, așa cum se arată în fig. 10.6, *a*, atunci sistemul de forțe se reduce la un *cuplu*.

Cazul 3 constituie un caz particular al cazului 2.

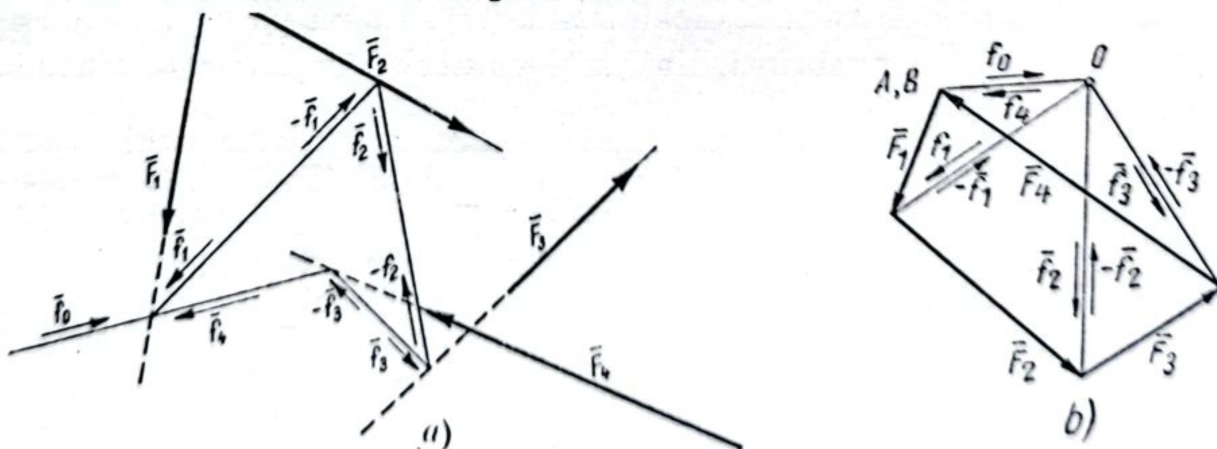


Fig. 10.7

Poligonul de forțe este închis (fig. 10.7, *b*), iar în poligonul funicular prima latură $\overline{f}_0$ are același suport cu ultima latură $\overline{f}_4$ (fig. 10.7, *a*). În acest caz sistemul de forțe $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_4$ se reduce la două forțe $\overline{f}_0$ și $\overline{f}_4$, acționînd după același suport, egale și de sens contrar, care alcătuiesc un sistem echivalent cu zero. Deci sistemul de forțe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ este un sistem de forțe în *echilibru*.

De aici rezultă concluzia: *condiţiile grafice necesare şi suficiente pentru ca un sistem de forţe oarecare în plan, acţionînd asupra unui solid, să fie în echilibru, sînt: poligonul forţelor să se închidă şi poligonul funicular să se închidă (prima şi ultima latură de poligon funicular să se suprapună).*

Observaţii. Fiecărui punct de pe forţele date, unde se întîlnesc două laturi de poligon funicular, îi corespunde un poligon închis în poligonul forţelor. Astfel, punctului K din fig. 10.5, *a*, unde se întîlnesc forţele $\overline{F}_2$, $-\overline{f}_1$ şi $\overline{f}_2$ îi corespunde în fig. 10.5, *b* triunghiul OCD alcătuit din aceleaşi forţe $\overline{F}_2$, $-\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$. Se mai observă şi proprietatea reciprocă: unui punct de intersecţie în poligonul forţelor, de exemplu D din fig. 10.5, *b* unde se întîlnesc forţele $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{f}_2$, îi corespunde triunghiul alcătuit din aceleaşi forţe $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{f}_2$ din fig. 10.5, *a*. Aceste observaţii sînt utile în aplicaţii.

§ 5. Proprietăţile poligoanelor funiculare. Fie sistemul de forţe în plan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ din fig. 10.8, *a*. Cu polul O se construieşte poligonul funicular $\overline{f}_0$, $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$, iar cu polul O' se construieşte poligonul funicular $\overline{f}'_0$, $\overline{f}'_1$, $\overline{f}'_2$ şi $\overline{f}'_3$. Laturile omoloage ale acestor două poligoane funiculare se întîlnesc în punctele A, B, C, D. Este uşor de arătat că aceste puncte se găsesc pe o dreaptă paralelă cu dreapta OO' a polilor cu care au fost construite poligoanele funiculare. În adevăr, forţa $\overline{F}_1$ poate fi înlocuită cu componentele $\overline{f}_0$ şi $\overline{f}_1$ în punctul E. De asemenea forţa $\overline{F}_1$ ar putea fi înlocuită cu componentele $\overline{f}'_0$ şi $\overline{f}'_1$, în punctul G. Dacă se schimbă sensurile forţelor $\overline{f}'_0$ şi $\overline{f}'_1$

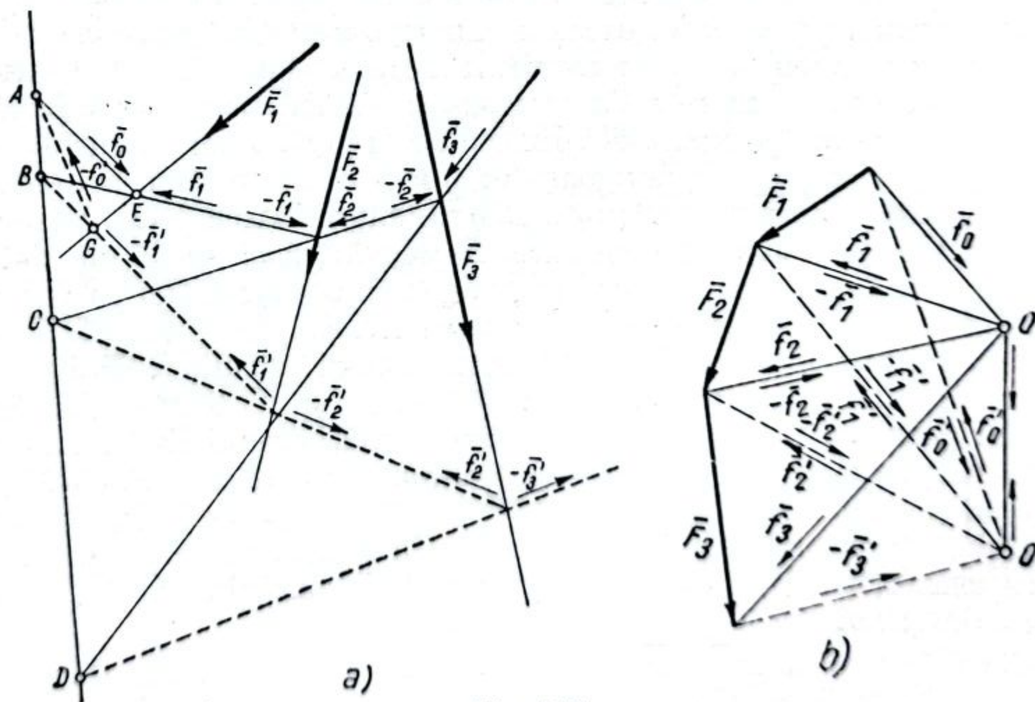


Fig. 10.8

din G, aşa cum se arată în fig. 10.8, *a*, sistemul de forţe $\overline{f}_0$, $\overline{f}_1$, $-\overline{f}'_0$, $-\overline{f}'_1$ din punctele E şi G este echivalent cu zero. Acest sistem de patru forţe în echilibru poate fi grupat şi altfel. Se poate compune forţa $\overline{f}_0$ cu forţa $-\overline{f}'_0$ şi rezultanta lor va trece prin punctul A (punctul lor de intersecţie) şi va

avea direcţia, sensul şi valoarea date de vectorul $\overline{O'O}$ din poligonul forţelor ($-\bar{f}_0'+\bar{f}_0=\overline{O'O}$). Celelalte două forţe $\bar{f}_1$ şi $-\bar{f}_1'$ vor da o rezultantă care va trece prin punctul B, care este punctul lor de intersecţie şi va avea valoarea, direcţia şi sensul date de vectorul $\overline{OO'}$ din poligonul forţelor ($\bar{f}_1-\bar{f}_1'=\overline{OO'}$). Deoarece însă sistemul de forţe $\bar{f}_0$, $-\bar{f}_0'$ şi $\bar{f}_1$, $-\bar{f}_1'$ este în echilibru, trebuie ca cele două rezultante din A şi B, paralele cu OO', să se suprapună. Deci dreapta AB este paralelă cu dreapta OO'. La fel se arată apoi că BC este paralelă cu OO' şi aşa mai departe, adică punctele A, B, C, D sînt coliniare pe o dreaptă paralelă cu OO'. Această teoremă se enunţă astfel: dacă pentru un sistem de n forţe date $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ..., $\bar{F}_n$ se construiesc poligoane funiculare cu doi poli diferiţi, atunci laturile corespunzătoare de poligon funicular se intersectează în $n+1$ puncte care se găsesc pe o dreaptă paralelă cu linia celor doi poli. Dreapta corespunzătoare poartă numele de *dreapta lui Culmann* (Carl Culmann, 1821—1881).

Această proprietate are multe aplicaţii în statica grafică.

§ 6. Poligon funicular care trece prin două puncte date. Din proprietatea demonstrată rezultă că pentru un sistem de forţe dat, toate poligoanele funiculare care trec prin două puncte date A şi B au polurile pe o dreaptă paralelă cu dreapta AB.

În adevăr, cele două puncte A şi B sînt punctele de intersecţie ale laturilor omoloage din două poligoane funiculare construite cu polii O şi O'. Conform teoremei precedente, dreapta AB trebuie să fie paralelă cu dreapta OO'. Orice alt poligon funicular construit astfel ca laturile care poartă acelaşi număr de ordine cu cele de mai sus să treacă prin punctele A şi B trebuie să aibă polul pe o paralelă din O dusă la AB. Deci, această dreaptă a polilor conţine toţi polii poligoanelor funiculare care trec prin punctele A şi B. Această proprietate serveşte pentru determinarea poligoanelor funiculare care trec prin două puncte date. În adevăr, dacă se dă un sistem de forţe şi se cere să se construiască un poligon funicular astfel ca o anumită latură să treacă prin punctul A şi o alta să treacă prin punctul B, atunci există o infinitate de soluţii care satisfac aceste condiţii. Polii tuturor poligoanelor care trec prin cele două puncte A şi B se vor găsi însă pe o dreaptă paralelă cu AB. Pentru determinarea acestei drepte, este suficient să se găsească un singur poligon funicular care să satisfacă această condiţie. Prin polul său se duce paralela la AB şi această dreaptă conţine totalitatea polilor care satisfac problema. Un asemenea pol se poate determina cu uşurinţă dacă se cunoaşte rezultanta sistemului de forţe, aşa cum se arată în fig. 10.9.

Fiind date forţele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ (fig. 10.9, *a*) se construieşte poligonul forţelor fig. 10.9, *b*, apoi cu ajutorul unui pol arbitrar O şi a razelor polare *0*, *1*, *2*, *3*, se construieşte un poligon funicular *0'*, *1'*, *2'*, *3'*, cu ajutorul căruia se determină suportul rezultantei care trece prin intersecţia laturilor *0'* şi *3'* (fig. 10.9, *a*).

Dacă se cere ca poligonul funicular să satisfacă condiţia ca prima latură a lui să treacă prin punctul A şi ultima lui latură prin B, atunci este suficient să se ia un punct oarecare C pe suportul rezultantei şi să se

unească cu A şi B. Dreptele CA şi CB vor fi prima şi ultima latură ale unui poligon funicular pentru sistemul de forţe dat. Polul O' al acestui poligon se obţine ducînd din punctele D şi E, în poligonul forţelor, paralele la CA şi CB. Dreapta Δ paralelă cu AB, dusă prin O', reprezintă locul geometric al tuturor polilor poligoanelor funiculare pentru care, dacă prima latură

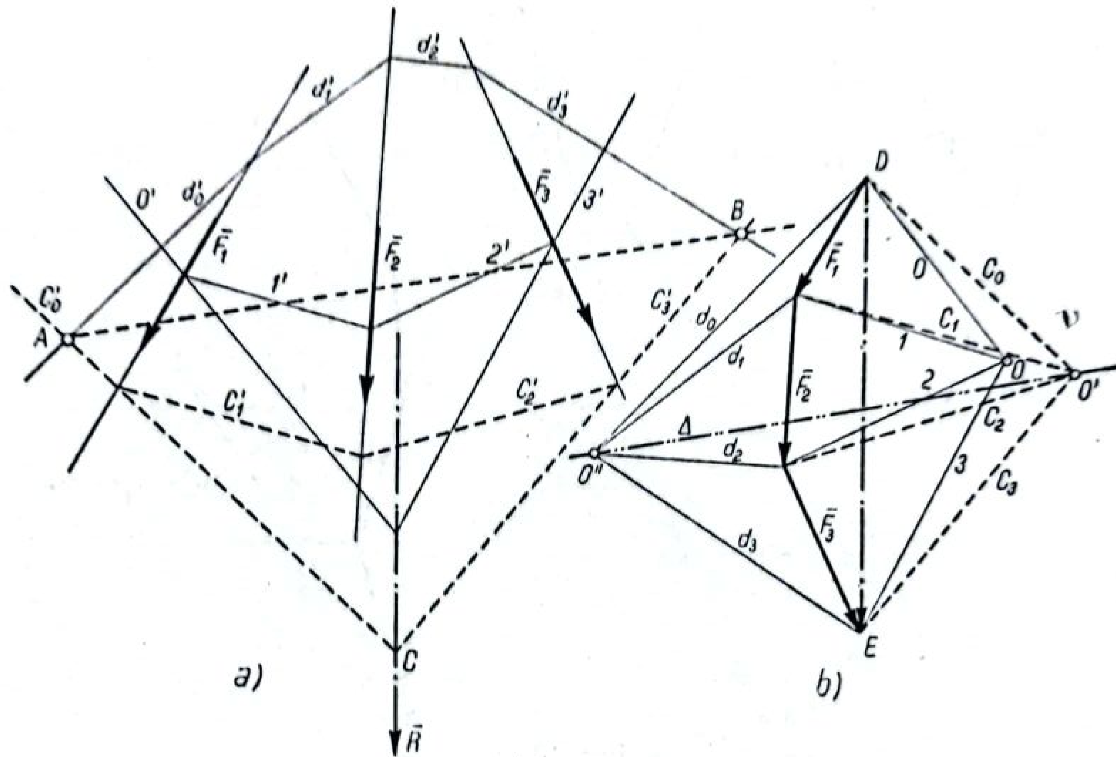


Fig. 10.9

trece prin A, ultima trece neapărat prin B. În fig. 10.9 sînt construite două asemenea poligoane funiculare: c_0', c_1', c_2', c_3' cu polul în O' şi d_0', d_1', d_2', d_3' cu polul în O''.

O altă construcţie grafică pentru aceeaşi problemă este dată în fig. 10.10, unde pentru sistemul celor patru forţe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, se cere ca a doua latură de poligon funicular (latura dintre $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$) să treacă prin A, iar ultima latură să treacă prin B.

Cu un pol arbitrar O (fig. 10.10, b) se construieşte un poligon funicular $1'$, $2'$, $3'$, astfel ca $1'$ să treacă prin A (latura $0'$ nu intervine în construcţie). Evident, ultima latură $4'$ nu va trece în general prin B. Se duce prin A o dreaptă arbitrară AC care este intersectată de $4'$ în C, iar din polul O se duce paralela Δ' la AC. Ca urmare a teoremei demonstrate în paragraful precedent, pe dreapta AC se vor intersecta laturile omoloage ale poligoanelor funiculare cu polii pe paralela din O la AC, adică toate poligoanele funiculare cu polii pe această dreaptă se vor bucura de proprietatea că latura a doua — omoloaga lui $1'$ — va trece prin A şi ultima — omoloaga lui $4'$ — va trece prin C. Ducînd deci dreapta CB, am obţinut un poligon care satisface problema, adică latura a doua trece prin A şi ultima prin B.

Ducînd apoi, în poligonul forţelor (fig. 10.10, *b*), din extremitatea *E* a lui $\overline{F}_4$ paralela la *CB*, intersecţia acesteia cu paralela din *O* la *AC* determină polul *O'* al poligonului care satisface problema. Dreapta Δ, paralela la *AB* din *O'*, conţine toţi polii poligoanelor funiculare care construite cu latura a doua prin *A* se bucură de proprietatea că ultima latură trece prin *B*.

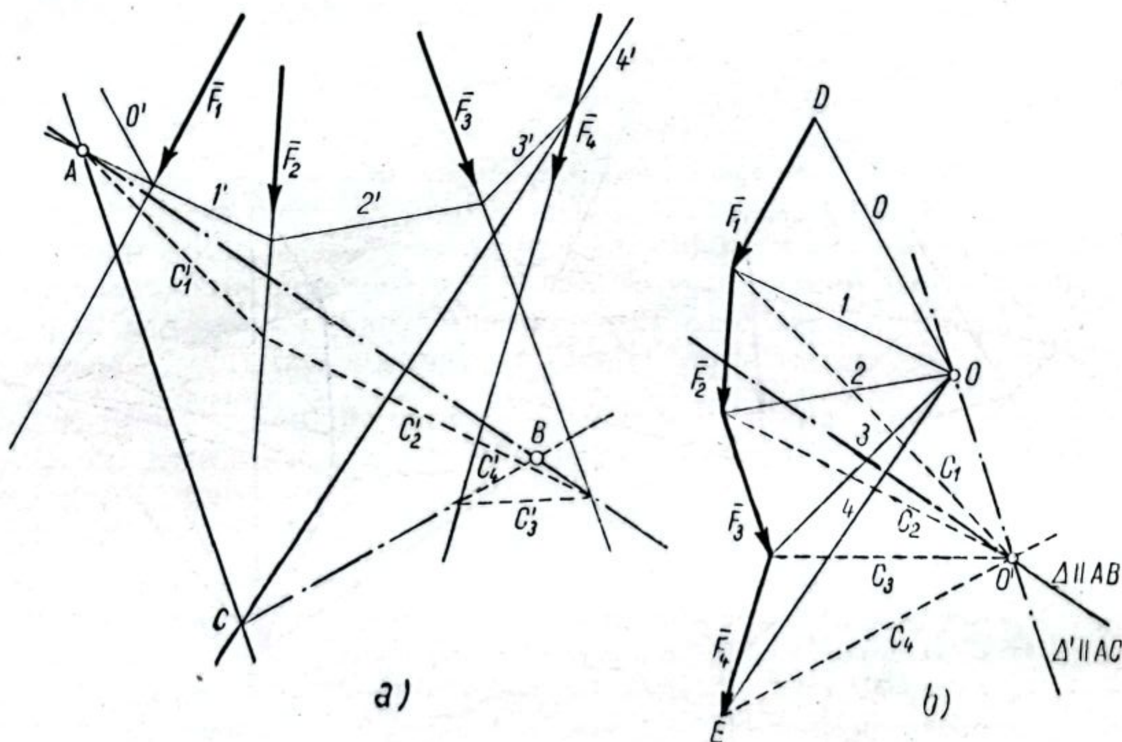


Fig. 10.10

În fig. 10.10 este construită una dintre soluţii: poligonul funicular c_1', c_2', c_3', c_4' corespunzător polului *O'*.

Observaţii. 1°. Din cele menţionate se observă că la construirea poligonului funicular prin două puncte trebuie să se precizeze care laturi ale poligonului trebuie să treacă prin fiecare dintre puncte.

2°. În construcţia din fig. 10.10, forţa $\overline{F}_1$ nu a intervenit în rezolvarea problemei. Se generalizează uşor că în rezolvarea problemei intervine numai grupul de forţe cuprinse între laturile poligonului care au impuse condiţii de a trece prin cele două puncte. Forţele exterioare acestui grup nu influenţează soluţia problemei.

3°. În rezolvarea practică a problemelor se poate alege oricare dintre soluţiile grafice reprezentate în fig. 10.9 şi 10.10. În tehnică este întrebuinţată mai mult soluţia din fig. 10.9, care nu este aplicabilă însă în cazul cînd sistemul de forţe nu are o rezultantă (se reduce la un cuplu). Soluţia din fig. 10.10 este însă aplicabilă şi în acest caz.

§ 7. Poligon funicular care trece prin trei puncte date. Pentru un sistem de forţe dat, există un singur poligon funicular care trece prin trei puncte date. În adevăr, dacă pentru sistemul de forţe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$ din fig. 10.11, *a*, se cere ca prima latură să treacă prin *A*, latura a patra (între $\overline{F}_3$ şi $\overline{F}_4$) să treacă prin *C* şi ultima latură prin *B*, soluţia se obţine astfel: pentru grupul de forţe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, ale cărui primă şi ultimă latură de poligon funicular trebuie să treacă prin *A*, respectiv *C*, se obţin o infi-

nitate de soluţii, dar toţi polii acestor poligoane se găsesc pe o dreaptă determinată Δ_1 paralelă cu AC; de asemenea, pentru grupul de forţe $\overline{F}_4$ şi $\overline{F}_5$, ale cărui primă şi ultimă latură de poligon funicular trebuie să treacă prin C, respectiv B, se obţine o infinitate de soluţii cu polii pe o dreaptă Δ_2 paralelă cu CB. Cele două drepte se întîlnesc într-un punct O şi poli-

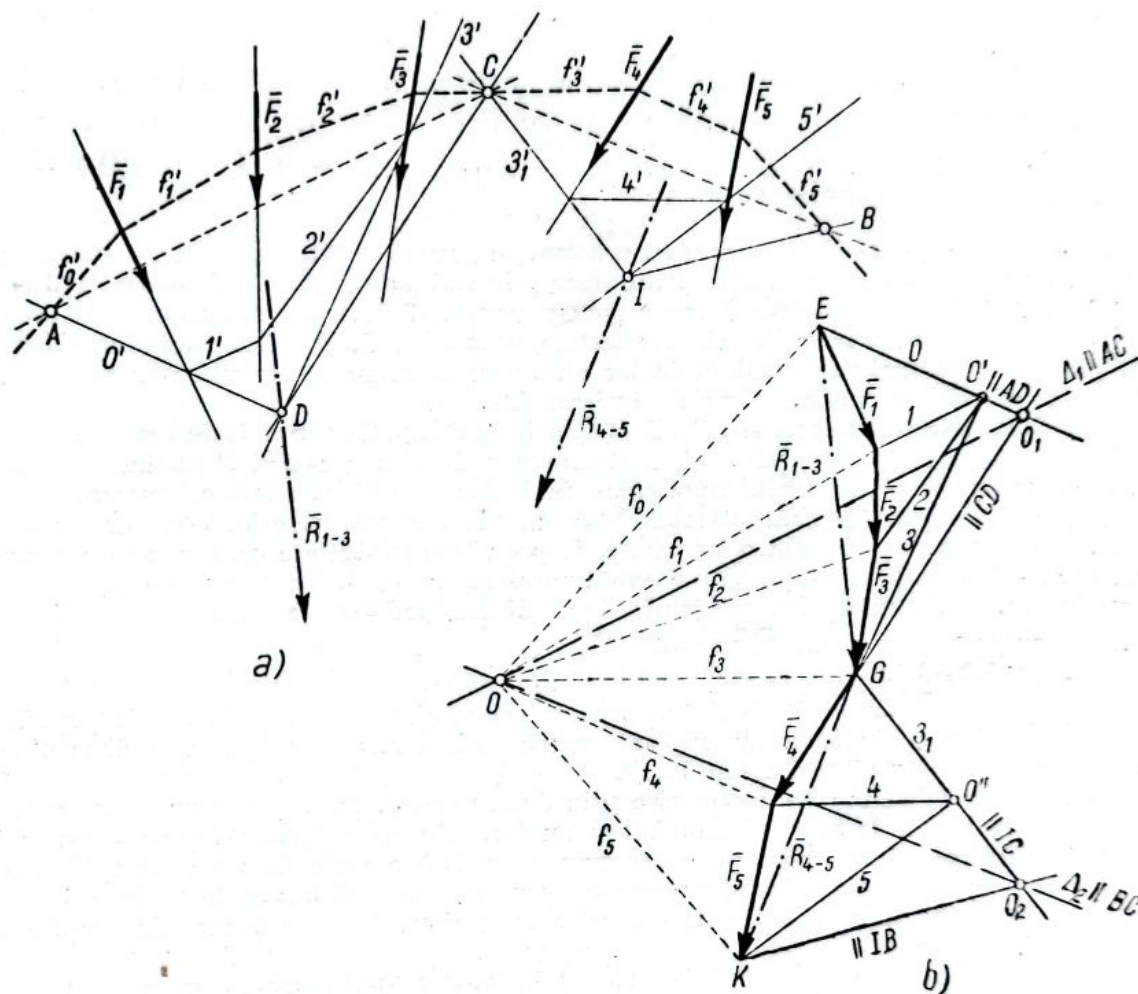


Fig. 10.11

gonul funicular cu polul în acest punct este singurul care satisface atît condiţiile de pe dreapta Δ_1 cît şi pe cele de pe dreapta Δ_2; adică poligonul funicular cu acest pol, început din A, este singurul poligon funicular care va trece şi prin celelalte puncte C şi B.

În poligonul forţelor (fig. 10.11, *b*) se determină rezultanta parţială $\overline{R}_{1-3}$ a forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ şi apoi cu un pol arbitrar O' se construieşte un poligon funicular $0'$-$1'$-$2'$-$3'$ ce determină punctul D al suportului rezultantei $\overline{R}_{1-3}$. Un punct arbitrar de pe $\overline{R}_{1-3}$ (pe fig. 10.11, *a* punctul D) se uneşte cu punctele A şi C, iar în poligonul forţelor prin extremităţile E şi G ale lui $\overline{R}_{1-3}$ se duc paralele la DA şi DC care se întîlnesc în O_1. Prin O_1 se duce dreapta Δ_1 paralelă cu AC. Dreapta Δ_1 conţine toţi polii poligoanelor funiculare care trec prin A şi C.

Aceeaşi operaţie se repetă pentru grupul de forţe $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$. În poligonul forţelor se construieşte rezultanta $\overline{R}_{4-5}$ şi cu ajutorul unui pol arbitrar O'' şi al unui poligon funicular se determină în fig. 10.11, *a*, punctul I de pe suportul lui $\overline{R}_{4-5}$. Se uneşte I cu C şi B, apoi în poligonul forţelor din G şi K se duc paralele la IC, respectiv IB, care se intîlnesc în O_2. Dreapta Δ_2 care trece prin O_2 şi este paralelă cu CB conţine toţi polii poligoanelor funiculare ce trec prin B şi C.

Intersecţia O a dreptelor Δ_1 şi Δ_2 reprezintă polul poligonului funicular unic care, început din A va trece prin C şi B. În fig. 10.11, *a* este reprezentat acest poligon f_0', f_1', f_2', f_3', f_4', f_5', unde f_0' a fost dus prin A, iar f_3' trece prin C şi f_5' prin B.

Observaţii. 1°. Din această construcţie grafică rezultă că pentru un sistem de forţe dat, un singur poligon funicular poate trece prin trei puncte A, B, C, deoarece dreptele $\Delta_1 \| AC$ şi $\Delta_2 \| CB$ se întîlnesc într-un singur punct. Pentru aceasta trebuie ca dreptele Δ_1 şi Δ_2 să nu fie paralele între ele, adică cele trei puncte A, C, B să nu fie în linie dreaptă. Deci, pentru a construi poligonul funicular unic care trece prin cele trei puncte A, C, B, este necesar ca cele trei puncte să nu fie în linie dreaptă.

2°. Dacă cele trei puncte A, B, C sînt în linie dreaptă, se pot întîmpla două cazuri: sau dreptele Δ_1 şi Δ_2 sînt paralele şi depărtate una de alta (punctul O se duce la infinit) şi în acest caz nu se poate construi poligonul funicular care să satisfacă problema, sau cele două drepte Δ_1 şi Δ_2 se suprapun (punctul O este un punct curent al celor două drepte suprapuse), adică, în acest caz avem o infinitate de poligoane funiculare care trec prin punctele A, C, B ale căror poli se găsesc pe o dreaptă paralelă cu ACB. Acest ultim caz este reprezentat în fig. 10.12 unde sînt construite două dintre poligoanele care satisfac problema (f_0', ..., f_5' cu polul O şi g_0', ..., g_5' cu polul O').

3°. Dacă la determinarea celor două drepte Δ_1 şi Δ_2 se întîmplă ca una sau ambele rezultante parţiale $\overline{R}_{1-3}$ şi $\overline{R}_{4-5}$ să lipsească, adică, unul sau ambele sisteme de forţe dintre AC şi CB să fie echivalente cu cupluri, atunci cele două drepte Δ_1 şi Δ_2 se determină cu ajutorul construcţiei grafice din fig. 10.10.

4°. Poligoanele funiculare care trec prin două sau trei puncte au numeroase aplicaţii în tehnică şi în special la calculul grinzilor şi arcelor. Din această cauză, pentru construirea poligonului funicular care trece prin trei puncte, există o serie de variante aplicabile în diferite cazuri speciale: cazul forţelor paralele, cazul cînd aceeaşi latură de poligon funicular trece prin două puncte etc. Toate aceste variante grafice, însă, se deduc din proprietăţile şi construcţiile descrise.

§ 8. Alte interpretări geometrice ale poligoanelor funiculare. Construcţiile grafice bazate pe poligonul funicular permit să se enunţe unele teoreme de geometrie care se demon-

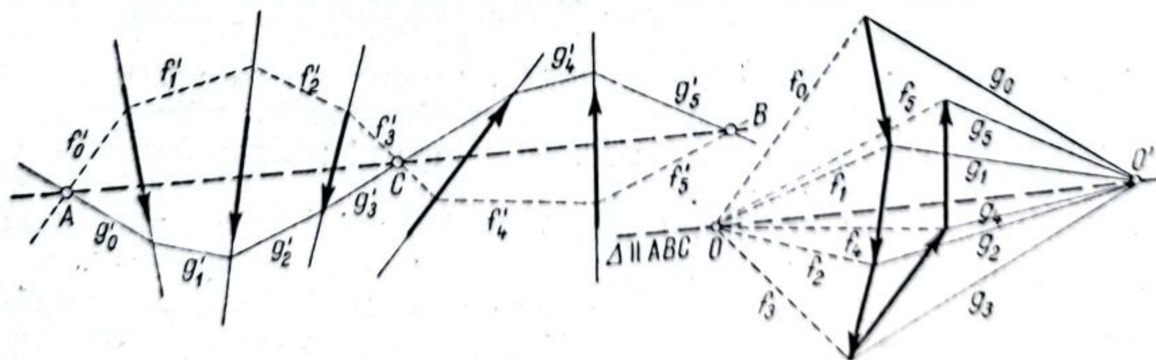


Fig. 10.12

strează pe altă cale în geometria proiectivă. De asemenea, invers, proprietăţile poligoanelor funiculare pot fi deduse din teoreme de geometrie proiectivă. Aici vor fi enunţate numai două teoreme, care sînt folosite apoi în diferite construcţii grafice ale staticii.

Astfel, din construirea rezultantei unui sistem de forţe cu ajutorul poligonului funicular (fig. 10.5) s-a văzut că pentru acelaşi pol O se pot obţine o infinitate de poligoane funiculare, astfel încît toate au laturile omoloage paralele cu razele polare şi deci paralele între ele. Punctele G, K, L, M ale tuturor acestor poligoane funiculare se deplasează pe forţele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, iar punctul P pe dreapta care este suportul rezultantei.

Dacă se înlocuieşte cuvîntul forţă prin dreaptă şi se elimină cuvîntul funicular, se poate enunţa următoarea teoremă: dacă un poligon cu n vîrfuri se deformează astfel ca laturile sale să rămînă paralele cu nişte direcţii date, iar $n-1$ vîrfuri descriu nişte drepte, atunci şi al n-lea vîrf descrie o dreaptă.

De aici rezultă şi reciproca: dacă un poligon cu n laturi se deformează astfel că toate vîrfurile sale descriu nişte drepte, iar $n-1$ laturi rămîn paralele cu nişte direcţii date atunci şi a n-a latură va rămîne paralelă cu o direcţie fixă.

Din proprietatea că laturile omoloage a două poligoane funiculare se întîlnesc în puncte coliniare, aşa cum s-a arătat în fig. 10.8, se poate enunţa teorema:

Dacă un poligon cu n laturi se deformează astfel încît toate vîrfurile sale descriu anumite drepte date, iar $n-1$ laturi se rotesc în jurul a $n-1$ puncte fixe situate pe o dreaptă, atunci şi latura a n-a se va roti în jurul unui punct fix situat pe dreapta celor $n-1$ puncte.

De aici se poate deduce şi reciproca: dacă un poligon cu n vîrfuri se deformează astfel încît toate laturile sale trec prin nişte puncte fixe situate pe o dreaptă, iar $n-1$ vîrfuri descriu $n-1$ drepte date, atunci şi al n-lea vîrf va descrie o dreaptă.

§ 9. Descompunerea unei forţe după trei suporturi neconcurente în plan. Fie forţa $\overline{R}$ care trebuie descompusă după suporturile Δ_1, Δ_2, Δ_3 neconcurente şi în acelaşi plan cu $\overline{R}$ (fig. 10.13, *a*). Intersecţia lui $\overline{R}$ cu unul dintre cele trei suporturi, de exemplu cu Δ_3, este punctul A, iar intersecţia celorlalte două suporturi este B. Se descompune în A forţa $\overline{R}$ după direcţia suportului Δ_3 şi după direcţia AB cu ajutorul paralelogramului, obţinîndu-se $\overline{F}_3$ pe suportul Δ_3 şi $\overline{R}_{1-2}$ pe suportul AB. Apoi în B se descompune forţa $\overline{R}_{1-2}$ după direcţiile Δ_1 şi Δ_2 cu ajutorul paralelogramului şi se obţine $\overline{F}_1$ pe suportul lui Δ_1 şi $\overline{F}_2$ pe suportul Δ_2. Pentru claritate, în fig. 10.13, *a*, se determină de obicei numai dreapta AB, iar descompunerea propriu-zisă se face pe o figură separată (fig. 10.13, *b*), unde se desenează forţa $\overline{R}$, din extremităţile ei D şi C se duc paralele la Δ_3 şi AB, obţinîndu-se $\overline{F}_3$ şi $\overline{R}_{1-2}$, iar apoi din extremităţile C şi E ale lui $\overline{R}_{1-2}$ se duc paralele

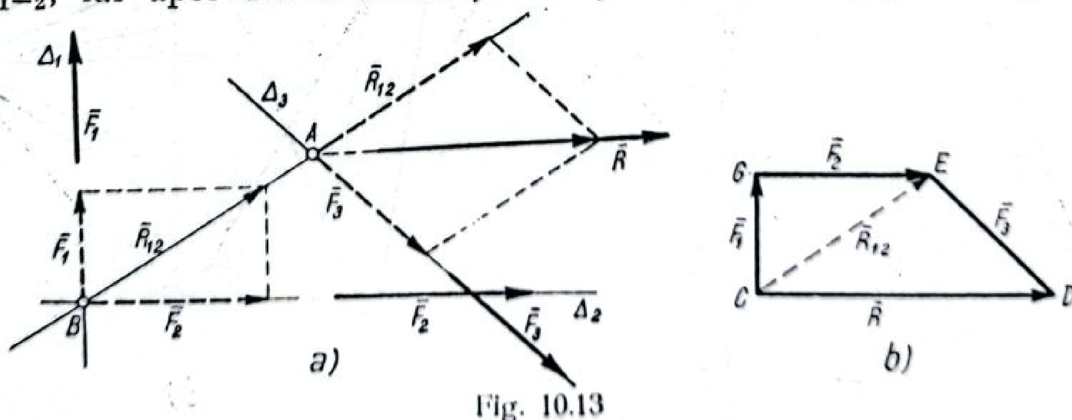


Fig. 10.13

la Δ_2 şi Δ_1 obţinîndu-se astfel $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_1$. Sensul forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ se obţine parcurgînd în acelaşi sens poligonul $CGED$, din originea C, spre extremitatea D a lui $\overline{R}$.

Evident suporturile forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ sînt dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3 din fig. 10.13, *a*.

Soluţia este unică. Dacă cele trei drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3 erau concurente, dar punctul lor de concurenţă nu se găsea pe forţa $\overline{R}$, problema era imposibil de rezolvat. Dacă cele trei drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3 erau concurente pe forţa $\overline{R}$ sau paralele şi în acelaşi plan, problema era nedeterminată. Dacă s-ar fi cerut să se descompună forţa $\overline{R}$ după patru sau mai multe direcţii din acelaşi plan şi neconcurente, problema era nedeterminată.

Soluţia indicată în fig. 10.13 este aplicabilă în cazul cînd punctele de intersecţie *A* şi *B* intră în cadrul desenului. Dacă intersecţiile nu intră în cadrul desenului, se face uz de proprietăţile poligoanelor funiculare aşa cum se arată în fig. 10.14, unde forţa $\overline{R}$, după suportul Δ, urmează a fi descompusă după suporturile Δ_1, Δ_2, Δ_3. Se admite după direcţia Δ_1, o componentă $\overline{F}'_1$ oarecare şi atunci în poligonul forţelor (fig. 10.14, *b*) se determină celelalte componente $\overline{F}'_2$ şi $\overline{F}'_3$ care acţionează pe Δ_2 şi Δ_3. Dintr-un pol *O* se duc razele polare $\overline{f}_0, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ (fig. 10.14, *b*), iar dintr-un punct *C* de pe forţa $\overline{R}$ (fig. 10.14, *a*) se duc laturile $\overline{f}'_0$, paralelă cu $\overline{f}_0$, şi $\overline{f}'_3$, paralelă cu $\overline{f}_3$, apoi se duc laturile: $\overline{f}'_1$ paralelă cu $\overline{f}_1$ şi, din intersecţia acesteia cu Δ_2, $\overline{f}'_2$ paralelă cu $\overline{f}_2$. Evident $\overline{f}'_2$ nu se întîlneşte cu $\overline{f}'_3$ pe Δ_3, adică valoarea arbitrară pentru $\overline{F}'_1$ nu e cea justă. Se ia atunci o a doua valoare

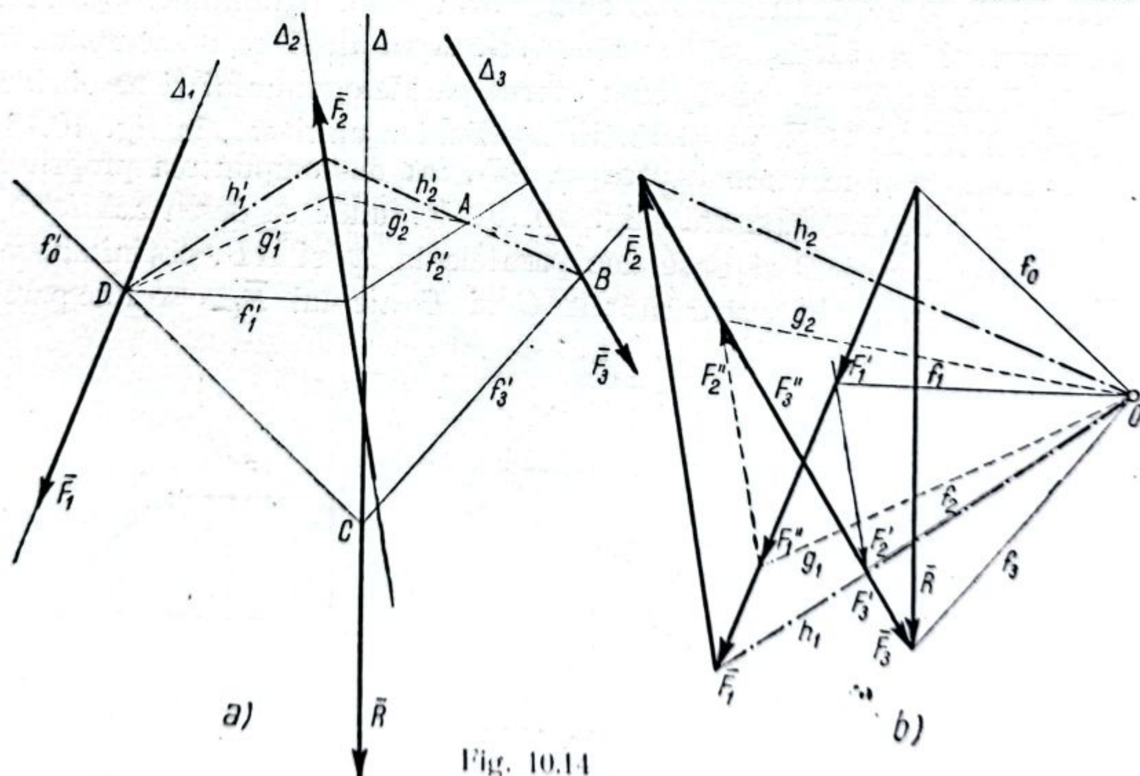


Fig. 10.14

arbitrară $\overline{F}''_1$ de unde rezultă în poligonul forţelor (fig. 10.14, *b*) $\overline{F}''_2$ şi $\overline{F}''_3$ şi razele polare $\overline{f}_0$, $\overline{g}_1$, $\overline{g}_2$, $\overline{f}_3$. Se duce apoi în fig. 10.14, *a* laturile de poligon funicular $\overline{g}'_1$ şi $\overline{g}'_2$ în loc de $\overline{f}'_1$ şi $\overline{f}'_2$. Desigur că nici $\overline{g}'_2$ nu se va întîlni cu

$\overline{f_3'}$ pe Δ_3 deci nici valoarea arbitrară $\overline{F_1''}$ nu e soluţia justă. Dacă ne ocupăm acum de poligonul $\overline{f_0'}$, $\overline{f_1'}$, $\overline{f_2'}$, observăm că prin înlocuirea lui $\overline{F_1'}$ cu $\overline{F_1''}$, acesta a devenit poligonul $\overline{f_1'}$, $\overline{g_1'}$, $\overline{g_2'}$, adică latura $\overline{f_0'}$ rămîne pe loc, latura $\overline{f_1'}$ — respectiv $\overline{g_1'}$ — trec amîndouă prin punctul fix D, iar vîrfurile poligonului se deplasează pe două drepte date Δ_1 şi Δ_2 (în cazul de faţă vîrful D de pe Δ_1 stă pe loc).

Conform teoremei stabilite rezultă că şi a treia latură a poligonului $\overline{f_2'}$ — respectiv $\overline{g_2'}$ — va trece printr-un punct fix. Acest punct va fi chiar punctul A, unde se întîlnesc cele două laturi $\overline{f_2'}$ şi $\overline{g_2'}$. Deci aceste valori arbitrare luate pentru $\overline{F_1}$ dau laturi de poligon funicular între Δ_2 şi Δ_3 ce trec prin A. Adevărata latură va trebui să se întîlnească cu $\overline{f_3'}$ pe Δ_3. Dar, intersecţia lui Δ_3 cu $\overline{f_3'}$ este cunoscută şi este notată cu B. Deci dreapta AB va fi adevărata latură de poligon funicular. În figură este notată cu $\overline{h_2'}$ şi apoi se deduce şi $\overline{h_1'}$. Ducînd paralele din O la $\overline{h_2'}$ şi $\overline{h_1'}$ se obţine $\overline{h_2}$ şi $\overline{h_1}$ şi apoi adevăratele valori ale forţelor $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$, pe suporturile Δ_1, Δ_2, Δ_3. Pentru verificare trebuie ca dreapta care trece prin intersecţia lui $\overline{F_1}$ cu $\overline{h_1}$ şi a lui $\overline{F_3}$ cu $\overline{h_2}$ să fie paralelă cu Δ_2.

Observaţie. Dacă în locul forţei $\overline{R}$, ar fi acţionat asupra solidului un sistem oarecare de forţe în acelaşi plan, care ar fi trebuit să fie înlocuit printr-un sistem echivalent de trei forţe $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}$ care să acţioneze după trei drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3, neconcurente şi în acelaşi plan cu sistemul, se determină în prealabil rezultanta $\overline{R}$ a sistemului de forţe şi apoi se procedează la descompunerea grafică. Dacă sistemul de forţe care acţionează asupra solidului nu se reduce la o rezultantă, ci la un cuplu, atunci operaţia grafică de descompunere se aplică asupra fiecăreia dintre forţele cuplului.

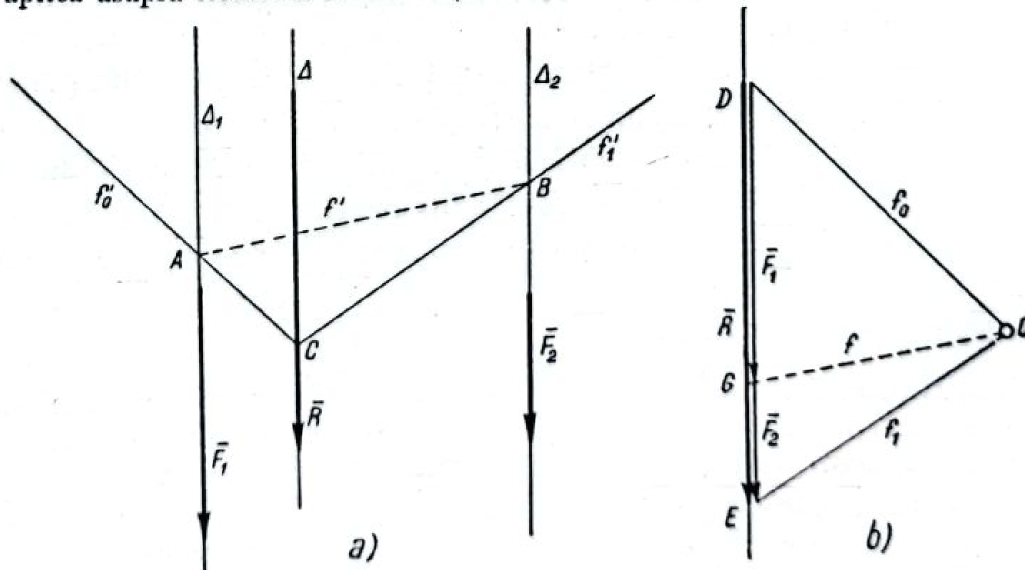


Fig. 10.15

§ 10. **Descompunerea unei forţe după două suporturi paralele cu ea în plan.** Cu ajutorul poligonului funicular se poate descompune o forţă $\overline{R}$ după două suporturi Δ_1 şi Δ_2 paralele cu ea (fig. 10.15).

Dintr-un punct oarecare C al forței $\overline{R}$ se duc două drepte oarecare CA și CB pînă intersectează dreptele Δ_1 și Δ_2 (fig. 10.15, *a*). Apoi în poligonul forțelor (fig. 10.15, *b*) din extremitățile D și E ale lui $\overline{R}$ se duc paralelele la AC și BC, care se întîlnesc în O. Din O se duce paralela la AB

Fig. 10.16

care întîlnește pe DE în G. DG și DE reprezintă cele două componente $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$. Pentru a stabili care este $\overline{F}_1$ și care $\overline{F}_2$ se ține seama de reciprocitatea figurilor *a* și *b*. În fig. 10.15, *a*, Δ_1, AC și AB sînt concurente în A pe Δ_1. Deci paralelele lor, în fig. 10.15, *b*, trebuie să formeze un triunghi închis, care este triunghiul DOG. Deci, DG este componenta $\overline{F}_1$ de pe suportul Δ_1. Analog se procedează pentru $\overline{F}_2$.

În fig. 10.16 este arătată descompunerea forței $\overline{R}$, după suporturile Δ_1 și Δ_2 de aceeași parte a lui $\overline{R}$. Așa cum rezultă din poligonul forțelor, componentele $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ sînt de sensuri contrare. Forța $\overline{F}_1$, mai apropiată de $\overline{R}$ are sensul lui $\overline{R}$ și este mai mare decît $\overline{R}$, iar forța $\overline{F}_2$, mai depărtată de $\overline{R}$, are sens contrar lui $\overline{R}$.

§ 11. **Momentul unui sistem de forțe determinat pe cale grafică.** Poligonul funicular permite să se determine valoarea momentului unui sistem de forțe din același plan în raport cu un punct oarecare din planul forțelor.

Fie forțele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, din fig. 10.17, *a*. În fig. 10.17, *b* se construiește poligonul forțelor, apoi dintr-un pol arbitrar se duc razele polare *0, 1, 2, 3, 4* și se construiește un poligon funicular *0′, 1′, 2′, 3′, 4′* corespunzător polului O. Valoarea absolută a momentului forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ în raport cu punctul A este egală cu produsul dintre rezultanta $\overline{R}_{1-3}$ a forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ și distanța d de la punctul A la rezultanta $\overline{R}_{1-3}$, care trece prin intersecția D a laturilor *0′* și *3′*. Deci $|\mathcal{M}_A(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)| = \overline{R}_{1-3} \cdot d$.

Dacă prin punctul A se duce paralela la $\bar{R}_{1-3}$ se formează triunghiul DCE (fig. 10.17, a) care este asemenea cu triunghiul $OC'E'$ din fig. 10.17, b, datorită paralelismului laturilor. Se notează segmentul CE cu m, iar în poligonul forțelor distanța de la O la $C'E'$ se notează cu H. H poartă nu-

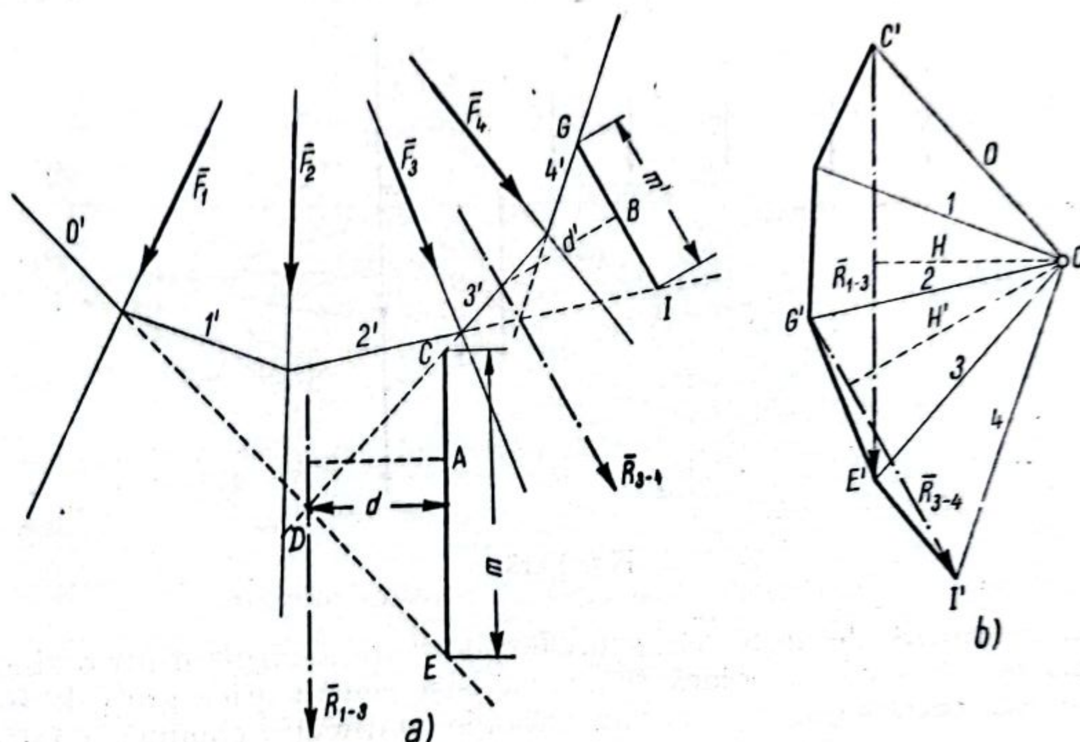


Fig. 10.17

mele de distanța polară a grupului de forțe $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, deoarece este distanța de la polul O la $\bar{R}_{1-3}$ din poligonul forțelor.

Exprimînd proporționalitatea dintre bazele $CE=m$ și $C'E'=R_{1-3}$ și înălțimile corespunzătoare d și H din triunghiurile asemenea DCE și $OC'E'$ rezultă

$$\frac{m}{R_{1-3}}=\frac{d}{H}, \text{ de unde } R_{1-3}d=mH.$$

Deci

$$|\mathcal{M}_A(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)|=R_{1-3}\cdot d=mH.$$

Relația $|\mathcal{M}_A(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)|=mH$ arată că: valoarea momentului unui sistem de forțe în plan în raport cu un punct A din acel plan este egală cu produsul dintre segmentul m care trece prin punctul A și este paralel cu rezultanta sistemului de forțe, interceptat între prima și ultima latură de poligon funicular al sistemului de forțe considerat și distanța polară H a acestui sistem de forțe, dedusă cu ajutorul polului care a servit la construcția poligonului funicular.

De ex., momentul grupului de forțe $\bar{F}_3$ și $\bar{F}_4$ din fig. 10.17, a în raport cu punctul B este: $|\mathcal{M}_B(\bar{F}_3, \bar{F}_4)|=m'H'$.

Se vede că trecînd de la un punct la altul şi schimbînd şi grupul de forţe, se modifică în general atît segmentul m cît şi distanţa polară H, la fel ca şi în expresia directă Rd.

Interpretarea de mai sus are însă avantaje în cazul forţelor paralele în acelaşi plan (care este un caz cu multe aplicaţii tehnice), aşa cum se

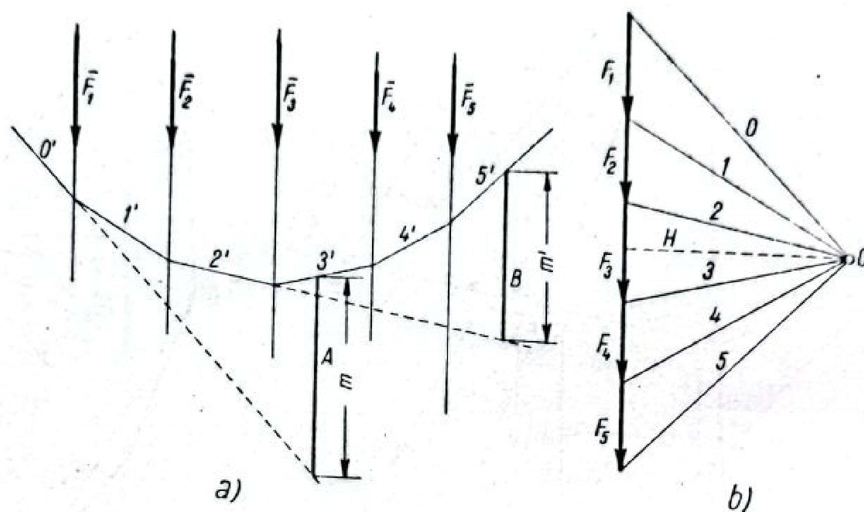


Fig. 10.18

vede în fig. 10.18, deoarece poligonul forţelor este alcătuit dintr-o singură dreaptă, aşa că distanţa polară H este aceeaşi pentru orice grup de forţe. În acest caz, toate segmentele m sînt paralele cu direcţia comună a forţelor paralele.

Din fig. 10.18 rezultă:

$$\mathcal{M}_A(\overline{F}_1,\ \overline{F}_2,\ \overline{F}_3)=mH; \qquad \mathcal{M}_B(\overline{F}_3,\ \overline{F}_4,\ \overline{F}_5)=m'H.$$

În aceste expresii, H este acelaşi şi numai m variază, ceea ce permite ca din compararea directă a segmentelor m să se deducă variaţia momentelor forţelor paralele.

Scări. Rezultatele construcţiilor grafice trebuie interpretate prin cifre care să reprezinte mărimile diferitelor elemente. Aceasta se face cu ajutorul *scărilor.*

Astfel se alege o scară pentru lungimi: 1 cm de pe desen reprezintă a unităţi de lungime din natură, de exemplu, a metri. Apoi 1 cm de pe desen reprezintă f unităţi de forţă din natură, de exemplu f tone-forţă.

Pentru momente, scara rezultă din expresia $\mathcal{M}=mH$, unde distanţa polară H poate fi măsurată la scara forţelor, iar segmentul m la scara lungimilor sau invers.

Pentru cazul forţelor paralele, unde H rămîne constant, se poate deduce şi o scară a momentelor, care să evite efectuarea produsului mH la evaluarea fiecărui moment. Pentru aceasta se observă că cele spuse se pot scrie astfel:

$$\mathcal{M}=(ma)\ \text{m}\ (Hf)\ \text{tf}=m(afH)\ \text{tf}\cdot\text{m}.$$

Aceasta înseamnă că un centimetru de pe segmentul m din desen reprezintă af/H tf·m în natură, ceea ce constituie chiar scara momentelor. Astfel, dacă un centimetru de pe epură reprezintă 5 m din natură ($a=5$ m) şi 1 cm de pe epură reprezintă 4 tf ($f=4$ tf), iar distanţa polară este 6 cm ($H=6$ cm), atunci 1 cm de pe segmentul m reprezintă $af/H=6\cdot4\cdot5=120$ tf·m.

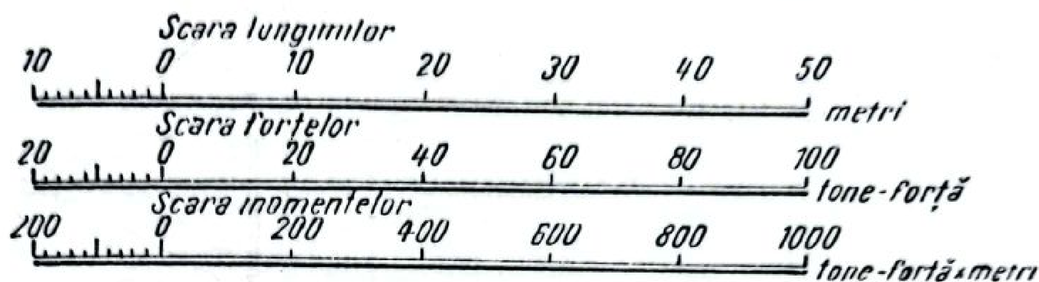


Fig. 10.19

De obicei scara pentru lungimi, forţe şi momente, se reprezintă grafic pe desen ca în fig. 10.19.

C. DETERMINAREA GRAFICĂ A REACŢIUNILOR

§ 12. Generalităţi. Construcţiile grafice analizate pot fi folosite şi pentru determinarea reacţiunilor unui solid supus la un sistem de forţe în acelaşi plan şi cu legături în planul forţelor. În acest caz, pentru fixarea solidului, sînt necesare şi suficiente trei legături simple care pot fi: o articulaţie şi un reazem simplu a cărei dreaptă de suport să nu treacă prin articulaţie, trei reazeme simple ale căror suporturi să nu fie concurente sau paralele, o încastrare. Mai departe se dau unele cazuri curente de determinare grafică a reacţiunilor.

§ 13. O articulaţie şi un reazem simplu. Din punct de vedere al construcţiei grafice se pot ivi diferite cazuri.

a) *Solidul este acţionat de forţe paralele cu suportul reacţiunii din reazemul simplu.* În acest, caz din condiţiile de echilibru rezultă că reacţiunea din articulaţie este şi ea paralelă cu forţele şi reacţiunea din reazemul simplu, deci sînt cunoscute suporturile ambelor reacţiuni.

În fig. 10.20, a, solidul articulat în A şi simplu rezemat în B este acţionat de forţele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ paralele cu suportul reacţiunii $\overline{V}_B$ din reazemul simplu B. Reacţiunea $\overline{V}_A$ din A este de asemenea paralelă cu forţele $\overline{F}$ şi cu $\overline{V}_B$. Deci, sistemul de forţe paralele $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{V}_A$ şi $\overline{V}_B$ trebuie să fie în echilibru, adică pe cale grafică, poligonul forţelor şi poligonul funicular trebuie să fie poligoane închise. Se construieşte poligonul forţelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ (fig. 10.20, b), se duc razele polare 0, 1, 2, 3 dintr-un pol arbitrar O şi se construieşte poligonul funicular $0'$, $1'$, $2'$, $3'$. Fie A' intersecţia lui $0'$ cu suportul lui $\overline{V}_A$ şi B' intersecţia lui $3'$ cu suportul lui $\overline{V}_B$. Prin A' trebuie să treacă latura de poligon funicular din stînga lui $\overline{V}_A$, iar prin B'

latura de poligon din dreapta lui $\overline{V}_B$. Acestea vor fi prima, respectiv ultima latură de poligon funicular al sistemului de forţe în echilibru $\overline{V}_A, \overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, V_B$. Dar aceste laturi trebuie să se suprapună (poligonul funicular închis); deci

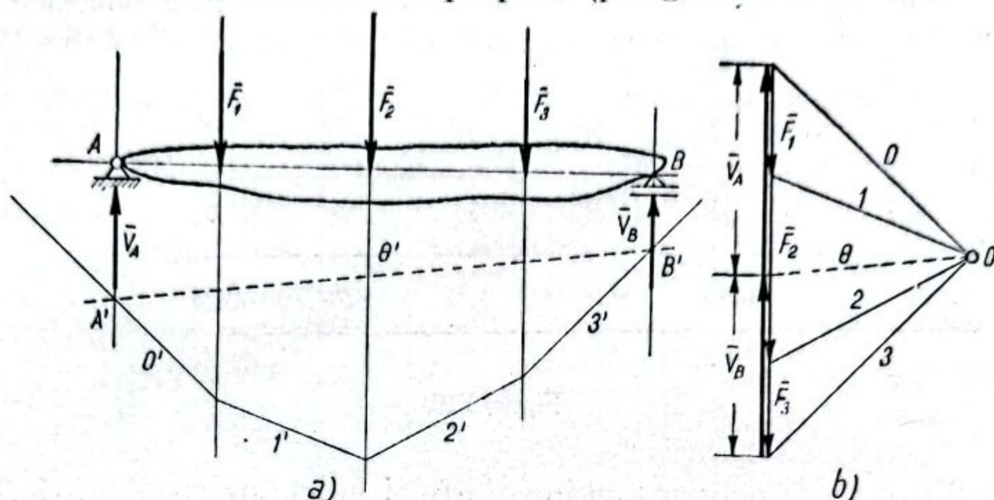


Fig. 10.20

dreapta $A'B'$ va fi prima şi ultima latură a poligonului funicular închis. Aceasta este notată cu $\overline{\theta}'$ şi poartă numele de latură de închidere a poligonului funicular. Din polul O se duce raza polară $\overline{\theta}$ paralelă cu $\overline{\theta}'$ şi se determină astfel cele două reacţiuni $\overline{V}_A$ şi $\overline{V}_B$ care închid poligonul forţelor. În fig. 10.20, *a*, $\overline{V}_A, \overline{0}'$ şi $\overline{\theta}'$ sînt concurente, deci în fig. 10.20, *b*, $\overline{V}_A$ $\overline{0}$ şi $\overline{\theta}$ trebuie să formeze un triunghi închis. Astfel, se determină care dintre reacţiuni este $\overline{V}_A$.

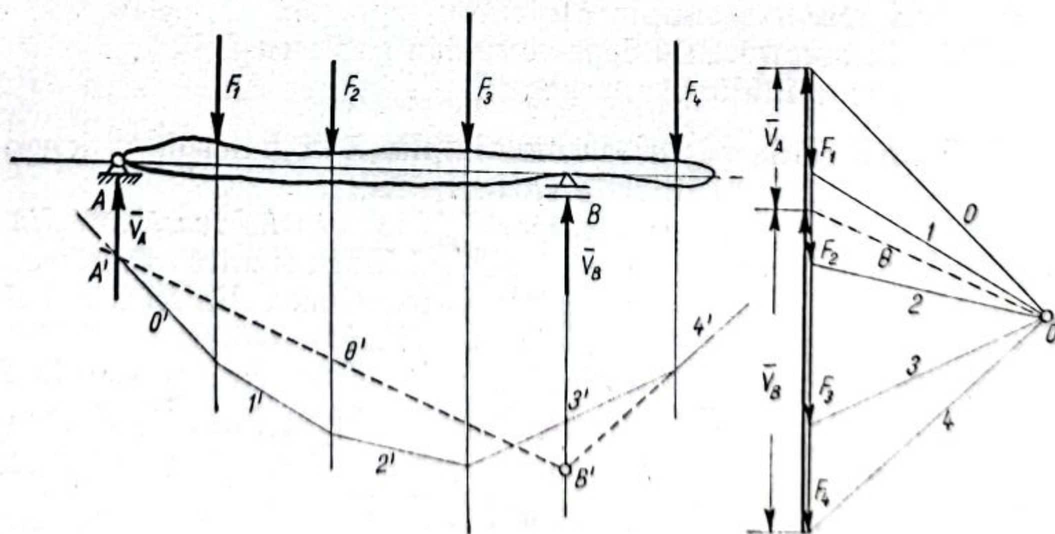


Fig. 10.21

Dacă forţele acţionează şi în afara intervalului dintre reazeme, ca în fig. 10.21, unde F_4 este în dreapta lui B, trebuie să se observe că linia de închidere $\overline{\theta}'$ trece prin A' şi B', unde B' este intersecţia suportului lui $\overline{V}_B$ cu latura $4'$ din dreapta lui $\overline{F}_4$.

Observație. Aceeași construcție grafică se obține dacă se determină mai întîi rezultanta forțelor care acționează solidul și apoi se descompune această rezultantă după suporturile reacțiunilor din A și B. Cele două componente cu semn schimbat sînt reacțiunile V_A și V_B.

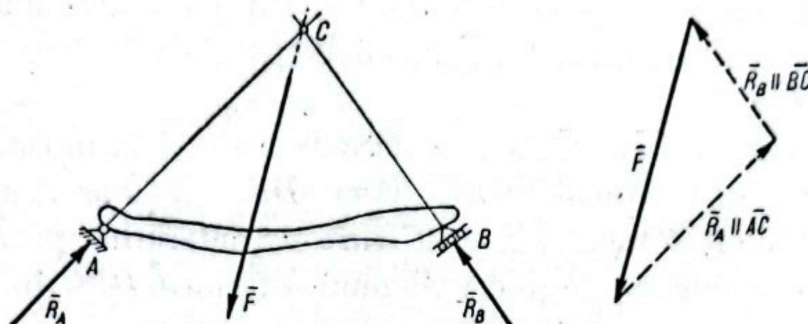


Fig. 10.22

b) *Solidul este acționat de forțe de direcții arbitrare*. Cazul cel mai simplu îl constituie acela în care solidul este acționat de o singură forță $\bar{F}$ (fig. 10.22, *a*). În acest caz, suportul reacțiunii din reazemul simplu B fiind cunoscut, se determină punctul C unde $\bar{R}_B$ întîlnește pe $\bar{F}$. Pentru echilibru trebuie ca reacțiunea $\bar{R}_A$ din articulația A să treacă și ea prin C. Deci, AC este suportul reacțiunii din A. Reacțiunile $\bar{R}_A$ și $\bar{R}_B$ se obțin din închiderea poligonului forțelor (fig. 10.22, *b*).

Dacă solidul este acționat de mai multe forțe, se poate afla rezultanta forțelor și apoi se procedează ca în fig. 10.22. În cazul cînd punctul C nu intră în cadrul desenului, se procedează așa cum se arată în fig. 10.23. Condițiile de echilibru grafic sînt: poligonul forțelor închis și poligonul funicular închis. Se cunosc suporturile forțelor date și ale reacțiunii $\bar{R}_B$ din reazemul simplu B. Nu se cunoaște însă suportul lui $\bar{R}_A$ din articulația A. În orice caz, A este un punct al acestui suport, de aceea poligonul

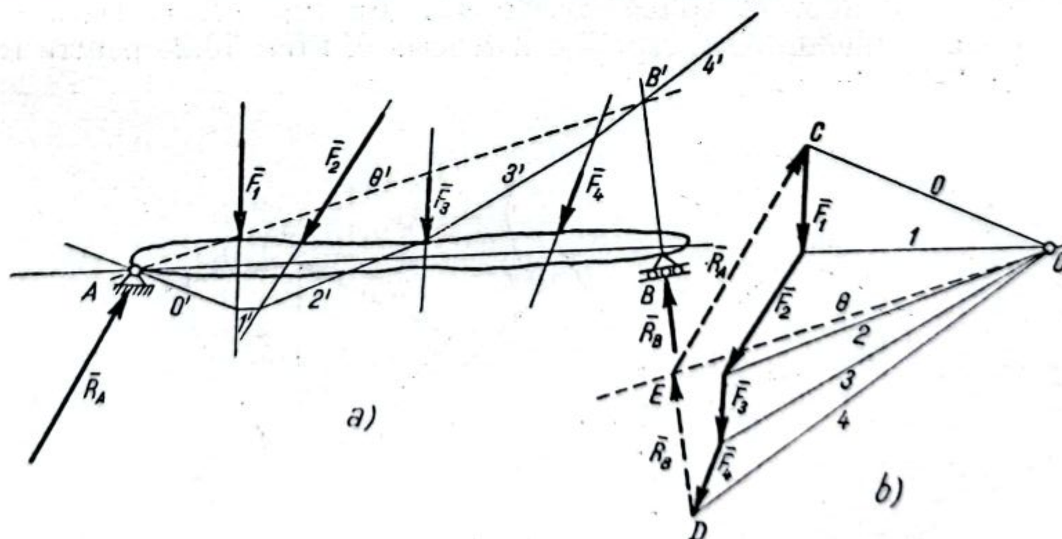


Fig. 10.23

funicular corespunzător polului arbitrar O din fig. 10.23, b se începe astfel ca latura $0'$ să treacă prin A. Punctul A este deci un punct al liniei de închidere a poligonului funicular, iar punctul B' unde latura $4'$ întîlnește suportul cunoscut al reacțiunii din B, este al doilea. Dreapta AB' este linia $\bar{0}'$ de închidere a poligonului funicular. Din polul O se duce $\bar{0}$ paralelă cu $\bar{0}'$, iar din D (extremitatea lui $\bar{F}_4$) se duce paralela la $\bar{R}_B$. Se determină astfel punctul E.

În fig. 10.23, a, $\bar{R}_B$, $\bar{0}'$ și $4'$ sînt concurente, deci în fig. 10.23, b ele trebuie să formeze un triunghi ODE. Deci, DE este $\bar{R}_B$. Pentru a închide și poligonul forțelor, se unește E cu C care va determina pe $\bar{R}_A$. Semnele lui $\bar{R}_B$ și $\bar{R}_A$ se deduc parcurgînd poligonul forțelor $CDEC$ în același sens.

§ 14. **Trei reazeme simple.** Suporturile reacțiunilor din cele trei reazeme nu sînt concurente sau paralele. În acest caz, problema este posibilă și static determinată. Dacă solidul este acționat de o forță $\bar{F}$, problema revine la a descompune o forță după trei suporturi neconcurente în plan, așa cum a fost arătat, în fig. 10.13 și 10.14. În fig. 10.24, a, solidul acționat de forța $\bar{F}$ este simplu rezemat în A, B și C. Punctul D este intersecția suporturilor reacțiunilor din A și C, iar punctul E este intersecția lui $\bar{F}$ cu suportul reacțiunii din B. În fig. 10.24, b din extremitățile lui $\bar{F}$ se duc: paralela la $\bar{R}_B$ și $D'E'$, paralelă cu DE, apoi din extremitățile lui $D'E'$ paralele la suporturile reacțiunilor din C și A. Parcurgînd în același sens poligonul forțelor din fig. 10.24, b se determină sensurile reacțiunilor $\bar{R}_A$, $\bar{R}_C$, $\bar{R}_B$.

Dacă solidul este acționat de mai multe forțe, se construiește întîi rezultanta lor și apoi se aplică construcția din fig. 10.24. Dacă solidul este acționat de un cuplu, se repetă construcția din fig. 10.24 pentru fiecare dintre forțele cuplului.

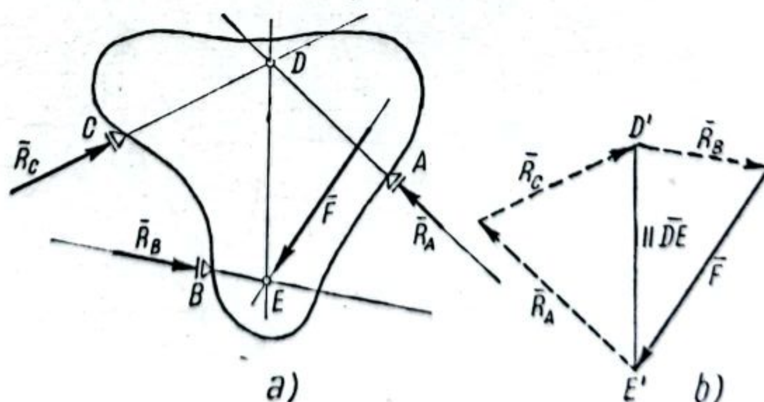


Fig. 10.24

§ 15. **Determinarea eforturilor în barele unei grinzi cu zăbrele plane (sistem articulat) pe cale grafică (metoda Maxwell-Cremona).** Metoda cea mai întrebuințată este metoda separării nodurilor, cunoscută sub numele de metoda poligoanelor reciproce, sau metoda Maxwell-Cremona și constituie o aplicație a condițiilor de echilibru a forțelor concurente pe cale grafică.

Izolînd un nod al sistemului articulat, forţa exterioară din nod şi eforturile din barele care pleacă din acest nod alcătuiesc un sistem de forţe concurente în echilibru. Aceasta înseamnă că poligonul de forţe corespunzător acestui nod trebuie să fie un poligon închis. Direcţiile tuturor forţelor

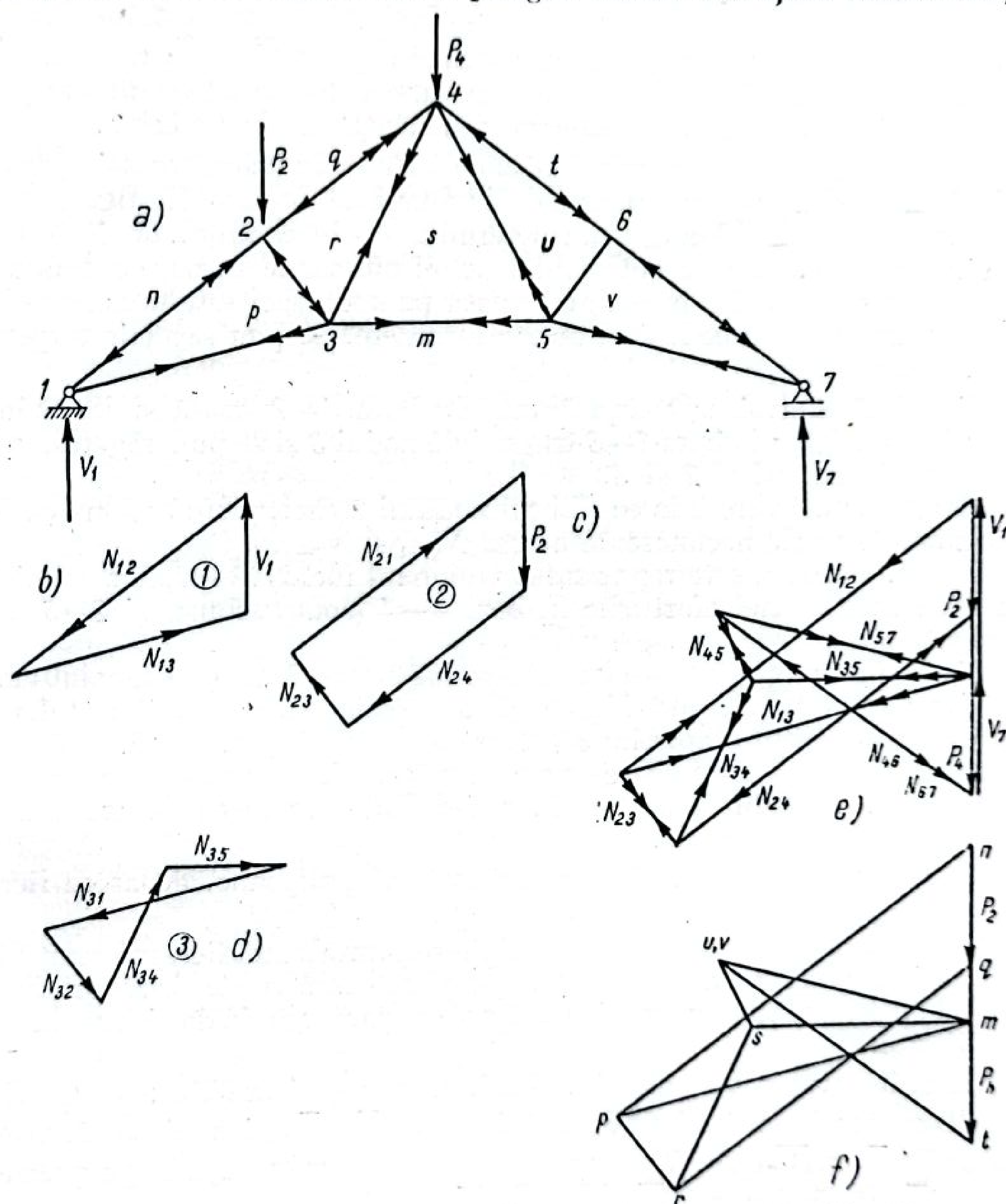


Fig. 10.25

fiind cunoscute, înseamnă că în nodul respectiv pot fi determinate prin închiderea poligonului de forţe numai două eforturi necunoscute. Deci, separarea nodurilor începe de la un nod în care sînt numai două eforturi necunoscute şi apoi se caută succesiv noduri în care să apară numai cîte două necunoscute.

Grinda cu zăbrele (ferma) din fig. 10.25 nu are, la prima vedere, nici un nod cu numai două necunoscute, dar ea, în ansamblu fiind un solid geometric nedeformabil, permite să se determine reacţiunile $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_7$ din echilibrul general, fie pe cale analitică fie pe cale grafică cu ajutorul unui poligon de forţe şi a unui poligon funicular, aşa cum s-a arătat anterior. Construcţia grafică pentru determinarea reacţiunilor $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_7$ nu a mai fost reprodusă în fig. 10.25. Operaţia de separare a nodurilor poate începe fie de la nodul *1* fie de la nodul *7*. Obişnuit se începe de la nodul *1*.

V_1 fiind cunoscut se exprimă că nodul *1* este în echilibru sub acţiunea lui V_1, N_{1-2} şi N_{1-3}. Se construieşte deci triunghiul forţelor din fig. 10.25, *b*, iar semnele lui N_{1-2} şi N_{1-3} sînt determinate din condiţia de închidere a triunghiului forţelor. S-au determinat astfel eforturile în barele nodului *1*. Se vede că efortul N_{1-2}, în nodul *1* apasă pe nod, deci este o compresiune, pe cînd N_{1-3} trage de nod, deci este o întindere. Se pun săgeţile respective pe fig. 10.25, *a*.

Totodată efortul de compresiune din bara *1—2* apasă şi în nodul *2*, iar cel de întindere din bara *1—3* trage şi de nodul *3* şi se pun săgeţile corespunzătoare în nodurile *2* şi *3*.

Acum se poate trece la echilibrul nodului *2* căci, ţinînd seama că N_{2-1} este cunoscut, rămîn necunoscute numai N_{2-4} şi N_{2-3}.

În fig. 10.25, *c*, este reprezentat poligonul închis al forţelor nodului *2*. S-au determinat astfel eforturile în bara *2—4* (compresiune) şi *2—3* (compresiune).

Vedem acum că se poate trece la nodul *3* unde N_{3-1} şi N_{3-2} sînt cunoscute, iar necunoscutele sînt N_{3-5} şi N_{3-4}. Poligonul închis al forţelor din condiţia de echilibru a nodului *3* este reprezentat în fig. 10.25, *d*, de unde rezultă eforturile N_{3-5} şi N_{3-4}, ambele întinderi. Se poate trece acum la nodul *4*, apoi la nodurile *5*, *6* şi *7*, construindu-se pentru fiecare nod cîte un poligon de forţe închis.

Se observă că fiecare efort apare în două poligoane, deoarece fiecare bară este legată de două noduri.

Aceasta îngăduie ca poligoanele corespunzătoare fiecărui nod să se aşeze unul lîngă altul, astfel încît în loc să se deseneze de două ori fiecare efort, să se deseneze o singură dată, dar să se parcurgă de două ori în sensuri diferite.

Rezultă construcţia din fig. 10.25, *e*, în modul următor:

Se construieşte întîi poligonul forţelor $\overline{P}_2$, $\overline{P}_4$ şi apoi se determină reacţiunile $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_7$, de obicei pe cale grafică, care se aşeză pe poligonul forţelor $\overline{P}_2$, $\overline{P}_4$. Poligonul $\overline{P}_2$, $\overline{P}_4$, $\overline{V}_7$, $\overline{V}_1$ este închis.

Se porneşte de la nodul *1* desenînd direcţiile în ordinea în care le întîlnim în sensul acelor de ceasornic. Rezultanta forţelor exterioare în nodul *1* este V_1, iar prima direcţie întîlnită în sens orar este *1—2*, deci prin extremitatea lui V_1 se duce paralela la N_{1-2}, iar prin originea lui V_1 paralela la *1—3*. Astfel s-au determinat N_{1-2} şi N_{1-3} cu semnele respective. Se trece acum la nodul *2*. Prima forţă cunoscută în sens orar este N_{1-2} parcursă acum în sens invers, de aceea se însearnnă cu două săgeţi în acest sens nou de

parcurgere. A doua forţă întîlnită este P_2. Se observă că ea este aşezată de la sine în extremitatea lui N_{1-2}. A treia direcţie întîlnită în sens orar este *2—4*, deci din extremitatea lui P_2 se duce paralela la *2—4* şi ultima direcţie se duce din originea poligonului, adică din originea lui N_{1-2} paralelă cu *2—3*. Parcurgînd în continuare N_{1-2}, P_2, N_{2-4} şi N_{2-3} se găsesc şi semnele eforturilor N_{2-4} şi N_{2-3}. Se trece apoi la nodul *3* şi aşa mai departe.

Pentru urmărirea uşoară a epurei se obişnuieşte o notaţie specială (notaţia Bow) care provine din observaţia că fiecărui nod din fermă îi corespunde cîte un poligon închis pe epura eforturilor, iar fiecărui poligon închis de pe fermă îi corespunde un punct de intersecţie al laturilor respective pe epură. Pentru aceasta se consideră că atît barele cît şi forţele date şi reacţiunile de pe fermă sînt laturi de poligoane, iar regiunile dintre forţele paralele se consideră închise la infinit. Asemenea figuri se numesc *figuri reciproce* şi de aceea metoda se mai numeşte *metoda poligoanelor reciproce*.

Se notează intervalele de pe fermă cu literele *m, n, p, q, r, s, t, u* şi *v*. Atunci în epura eforturilor aceste litere apar în vîrfurile poligoanelor de forţe cum se vede uşor în fig. 10.25, *f*. Orice efort sau forţă din epură se notează cu literele de la capete, iar pe fermă, bara sau forţa respectivă se găseşte între aceste litere. De exemplu, N_{1-2} se va numi acum *n, p*, căci pe fermă se găseşte între *n* şi *p*, iar pe epură *n* şi *p* sînt capetele efortului N_{1-2}; la fel P_2 este *n, q*.

Pentru ca epura să se determine uşor şi corect este necesar ca direcţiile pe epură să fie duse în ordinea în care se întîlnesc pe fermă într-un anumit sens (de exemplu sensul acelor de ceasornic). Astfel, în nodul *2* bara *2—3* se citeşte *rp* şi are sensul de la *r* spre *p*, iar în nodul *3* se citeşte *pr* şi are sensul de la *p* spre *r*. În această notaţie nu mai este nevoie să se deseneze săgeţi, căci sensurile eforturilor reies direct din citirea literelor. Efortul *qr* apasă în nodul *2* şi efortul *rq* apasă în nodul *4*. Este deci efort de compresiune. Construind epura pînă la capăt se observă că atunci cînd se ajunge la ultimele două noduri *6* şi *7* nu mai apar cîte două necunoscute, ci într-un nod o singură necunoscută, iar în celălalt nici una. Avem deci un mijloc de control al construcţiei grafice, căci poligoanele ultimelor noduri trebuie să se închidă de la sine. Dacă aceasta nu se întîmplă, rezultă că s-au produs erori în construcţiile grafice, şi construcţia trebuie reluată pînă cînd poligonul se închide.

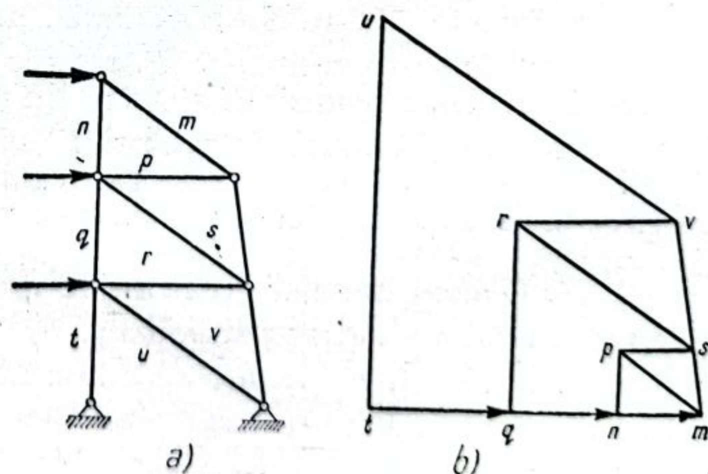


Fig. 10.26

Aceste posibilităţi de verificare provin din faptul că reacţiunile $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_7$ au fost determinate pe altă cale şi apoi au fost folosite în epură deci rămîn ecuaţii de echilibru ale nodurilor, care pot servi la verificare. Dacă

însă se determină eforturile numai din echilibrul nodurilor, fără să se folosească vreo relaţie suplimentară, adică dacă nu este necesar să se determine reacţiunile în prealabil, aşa cum se întîmplă în cazul din fig. 10.26, atunci nu apare verificarea de mai sus.

§ 16. Calculul grafic al momentelor statice. Dacă într-o serie de puncte $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ din acelaşi plan se găsesc concentrate masele $m_1, m_2, m_3 \ldots$ $\ldots, m_n$ şi în acelaşi plan se consideră o dreaptă Δ, momentul static al acestor mase în raport cu dreapta Δ este

$$S = m_1 d_1 + m_2 d_2 + m_3 d_3 + \cdots + m_n d_n,$$

unde $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ sînt distanţele de la fiecare dintre masele concentrate la dreapta Δ.

Calculul grafic al momentului static S este în acest caz identic cu calculul momentului în raport cu un punct oarecare de pe dreapta Δ al unui sistem de vectori $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_n$ paraleli cu dreapta Δ, de acelaşi sens, proporţionali cu masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ şi aplicaţi în punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$.

Aceasta se realizează cu ajutorul unui poligon de forţe şi a poligonului funicular respectiv, aşa cum se vede în fig. 10.27. Pentru cele patru mase m_1, m_2, m_3, m_4 din fig. 10.27, *a* s-au construit patru vectori $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ paraleli cu dreapta Δ, faţă de care trebuie calculat momentul static. Se construieşte poligonul vectorilor (forţelor) din fig. 10.27, *b* cu un pol arbitrar O. Cu ajutorul razelor polare respective se construieşte poligonul funicular $0'1'2'3'4'$. Valoarea momentului vectorilor $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ în raport cu un punct oarecare de pe dreapta Δ este Hm unde H este distanţa polară din fig. 10.27 *b*, iar m este segmentul BC interceptat pe dreapta Δ de prima şi ultima latură de poligon funicular. Deci momentul static al maselor m_1, m_2, m_3, m_4 în raport cu dreapta Δ este $S = Hm$, unde, aşa cum s-a arătat mai înainte, H se măsoară la scara vectorilor $\overline{F}$, iar s la scara lungimilor. Dacă un centimetru de pe desen reprezintă a metri din natură, iar un centimetru de pe desen reprezintă f unităţi de vectori $\overline{F}$ (adică de fapt f unităţi de masă), atunci S poate fi măsurat direct prin segmentul m, dacă se adoptă o scară pentru S astfel ca un centimetru de pe m să reprezinte af/H unităţi de moment static.

§ 17. Centrul maselor (centrul de greutate). Centrul maselor coincide cu centrul vectorilor paraleli $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. El nu se schimbă cînd vectorii paraleli $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ se rotesc în jurul punctelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ rămînînd paraleli. Este suficient deci să se determine suportul rezultantei vectorilor paraleli $\overline{F}_1$ $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ pentru două direcţii diferite. La intersecţia celor două suporturi se va găsi centrul maselor (centrul de greutate). În fig. 10.27, *a* prin punctul de intersecţie D al primei şi ultimei laturi de poligon funicular se duce paralela la dreapta Δ şi aceasta va reprezenta suportul rezultantei.

Se rotesc apoi vectorii $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ în jurul punctelor de aplicaţie A_1, A_2, A_3, A_4 pînă ajung paraleli cu o altă direcţie Δ_1 şi pentru această direc-

ţie cu un nou pol O_1 (fig. 10.27, *c*) se construieşte un nou poligon funicular $0_1'$, $1_1'$ $2_1'$ $3_1'$ $4_1'$ care determină punctul *E* de pe noul suport al rezultantei. Cele două suporturi se întîlnesc în *G* care este centrul maselor m_1, m_2, m_3, m_4.

Prin această metodă se poate determina centrul de greutate al unei figuri plane pe cale grafică, aşa cum este exemplificat în fig. 10.28. Prin

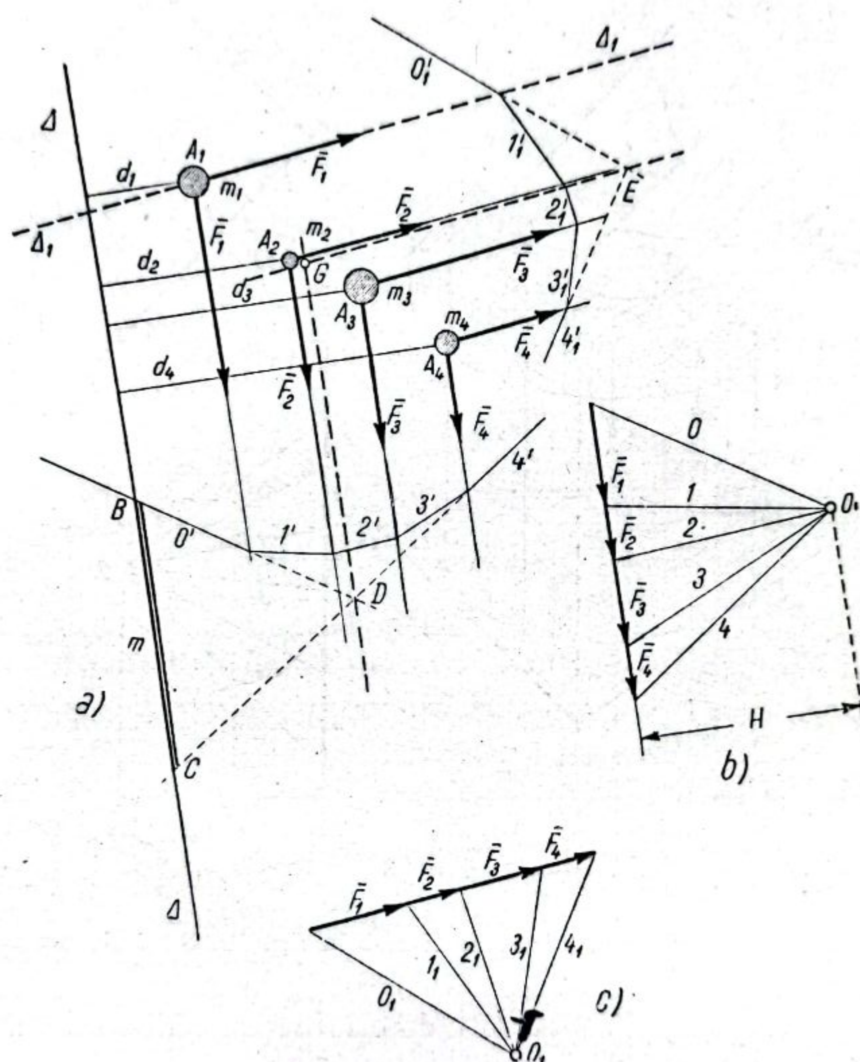


Fig. 10.27

drepte paralele cu o direcţie arbitrară se descompune suprafaţa într-o serie de suprafeţe mai mici, ale căror arii şi centre de greutate să se poată determina uşor şi destul de exact (triunghiuri, dreptunghiuri, trapeze). Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 aceste arii şi C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 centrele lor de greutate (fig. 10.28, *a*). Se determină centrul de greutate *C*, repetînd construcţia descrisă în fig. 10.27, cu ajutorul a două poligoane funiculare construite cu polii *O* (fig. 10.28, *b*) şi O_1 (fig. 10.28, *c*).

Observaţie. Dacă cele două poligoane funiculare se construiesc cu aceeaşi distanţă polară *H*, atunci fig. 10.28, *c*, se poate obţine direct din fig. 10.28, *b*, prin rotaţia ei

cu unghiul α. În acest caz, toate laturile poligonului funicular $0_1\ 1_1\ 2'_1\ 3'_1\ 4'_1$ sînt rotite cu unghiul α față de laturile funicularului $0'\ 1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'$. Dacă α este unghiul laturilor unui echer, nu mai este nevoie să se deseneze fig. 10.28, *c* și ambele poligoane funiculare se desenează concomitent trăgînd laturile $0'$ și $0'_1$, $1'$ și $1'_1$ etc. pe cele două laturi ale echerului. Pentru determinarea grafică corectă a lui C, unghiul α este bine să nu fie prea ascuțit. Se recomandă ca α să fie de 90°. De multe ori, pentru $\alpha=90°$, suporții vectorilor pentru una

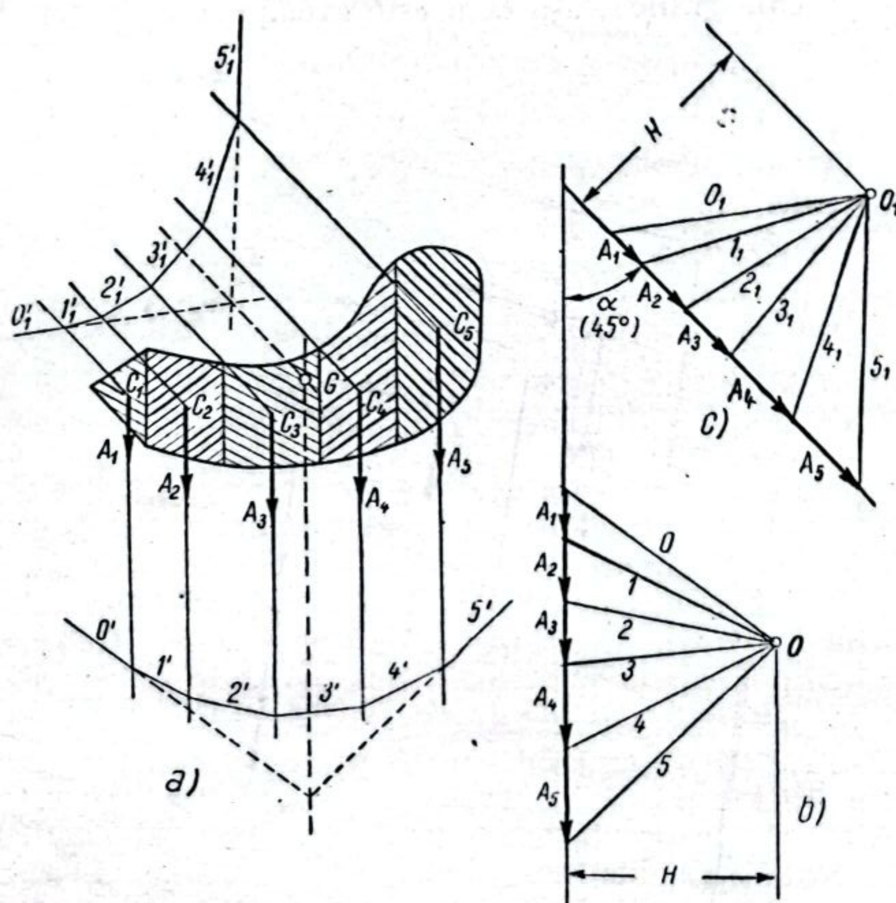


Fig. 10.28

dintre direcții sînt foarte apropiați, cum ar fi fost în fig. 10.28, și, în acest caz, se alege de obicei $\alpha=45°$.

Altă construcție grafică pentru determinarea centrului maselor (centrului de greutate) pleacă de la relația vectorială

$$M\bar{\rho}=m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2+m_3\bar{r}_3+\cdots=\sum m_i\bar{r}_i,$$

unde $M=m_1+m_2+\cdots=\sum m_i$ este masa totală a sistemului de puncte în același plan cu masele individuale $m_1, m_2, \ldots, m_n$; $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$ sînt vectorii de poziție de la originea (polul) O la masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$, iar $\bar{\rho}$ este vectorul de poziție de la aceeași origine (pol) O la centrul maselor C. Astfel, pentru aflarea centrului de greutate al liniei omogene din fig. 10.29, *a*, se împarte aceasta într-o serie de segmente ale căror mase m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 se concentrează la mijlocurile segmentelor și se unesc aceste puncte cu un punct arbitrar din plan O care definește vectorii de poziție $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4, \bar{r}_5$.

În fig. 10.29, *b*, se construiește poligonul vectorilor $m_1\bar{r}_1$, $m_2\bar{r}_2$ etc. care începe în A și se termină în B. Latura AB este rezultanta lor și conform formulei de mai sus este chiar $M\bar{\rho}$. Din O se duce paralela la AB. Pe această dreaptă se găsește centrul de greutate C, la distanța $\rho = OC$ de O, care se obține împărțind pe AB din fig. 10.29, *b*, la masa totală M.

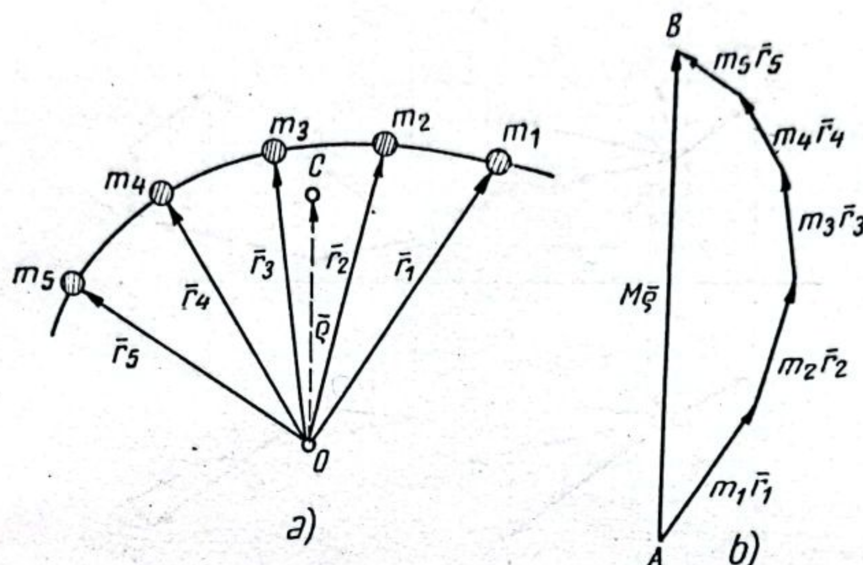


Fig. 10.29

Acest procedeu este mai economic din punct de vedere al desenului decît cel descris anterior, dar în practică se întrebuințează mai rar, deoarece determinarea vectorilor $m_i\bar{r}_i$ necesită atît evaluarea lui m_i cît și a vectorului de poziție $\bar{r}_i$, apoi înmulțirea lor, pe cînd în procedeul anterior se evaluează numai masele m_i.

§ 18. **Compunerea forțelor concurente în spațiu.** Un sistem de forțe concurente în spațiu se reduce la o rezultantă care trece prin punctul de concurență sau este echivalent cu zero.

Rezultanta se determină cu ajutorul unui poligon de forțe în spațiu, analog poligonului de forțe din plan. Pentru determinarea grafică se folosesc mijloacele geometriei descriptive, proiectînd sistemul de forțe pe două plane perpendiculare: orizontal și vertical.

Proiecțiile poligonului de forțe din spațiu pe cele două plane vor fi două poligoane de forțe plane alcătuite din proiecțiile forțelor pe aceste plane.

În fig. 10.30 forțele $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$ concurente în O sînt reprezentate în cele două plane de proiecție concurente în proiecțiile O' și O''.

Dintr-un punct arbitrar (A', A'') se construiesc poligoanele de forțe în cele două plane cu proiecțiile forțelor obținîndu-se punctul (B', B''). $\bar{R}' = \overline{A'B}$ și $\bar{R}'' = \overline{A''B''}$ reprezintă proiecțiile rezultantei forțelor $\bar{F}_1$, ..., $\bar{F}_4$. Poziția ei este determinată de punctul (O', O''). Mărimea reală a rezultantei se află prin metodele geometriei descriptive. În fig. 10.31, *a* se arată metoda rotirii în jurul unei axe verticale care ne duce la valoarea reală $\overline{c'd'_1}$,

iar în fig. 10.31, *b* este arătată metoda diferenței de cote care ne duce la valoarea reală $\overline{c''d''}_1$.

Observație. Din compunerea forțelor concurente rezultă că dacă poligonul de forțe este închis, adică în fig. 10.30, punctul (A', A'') coincide cu (B', B'') rezultanta sistemului de forțe este nulă și fiind vorba de forțe concurente, rezultă că forțele sînt în echilibru.

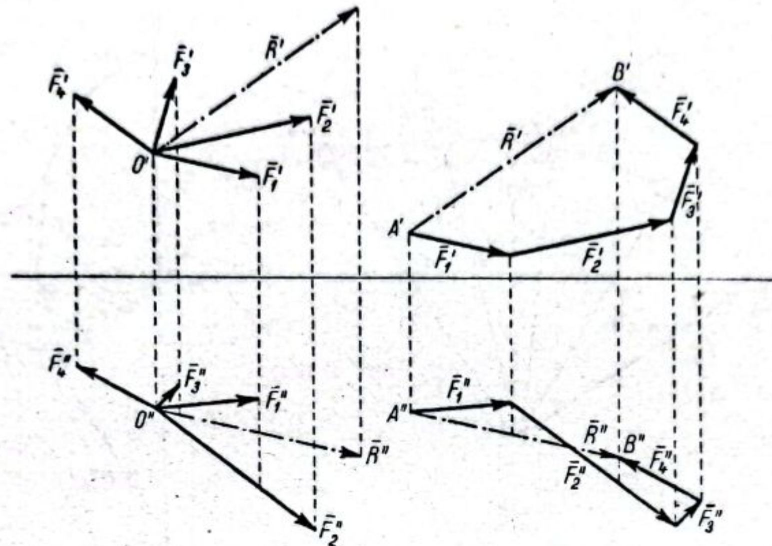


Fig. 10.30

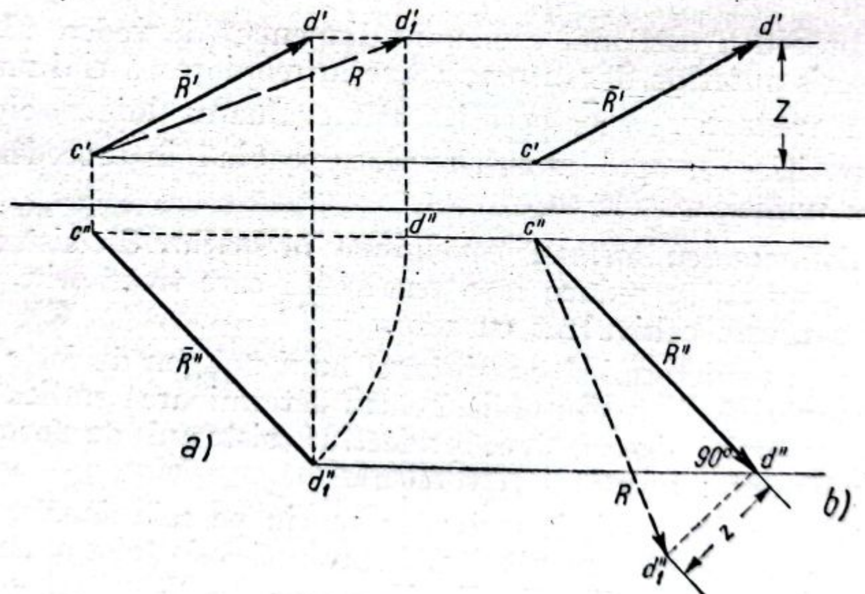


Fig. 10.31

Deci, condiția grafică de echilibru a forțelor concurente în plan și în spațiu este: poligon de forțe închis.

§ 19. Descompunerea unei forțe după trei suporturi necoplanare concurente pe forță. Aceasta revine teoretic la a construi un paralelipiped, care să aibă muchiile paralele cu cele trei suporturi și în care forța dată să fie diagonala lui.

Pentru obținerea grafică a celor trei componente se recurge la două plane de proiecție.

Dacă se pot alege planele de proiecție astfel încît pe unul dintre ele, două suporturi să se proiecteze după aceeași dreaptă, construcția grafică este foarte simplă, așa cum se arată în fig. 10.32, unde (O', O'') reprezintă pro-

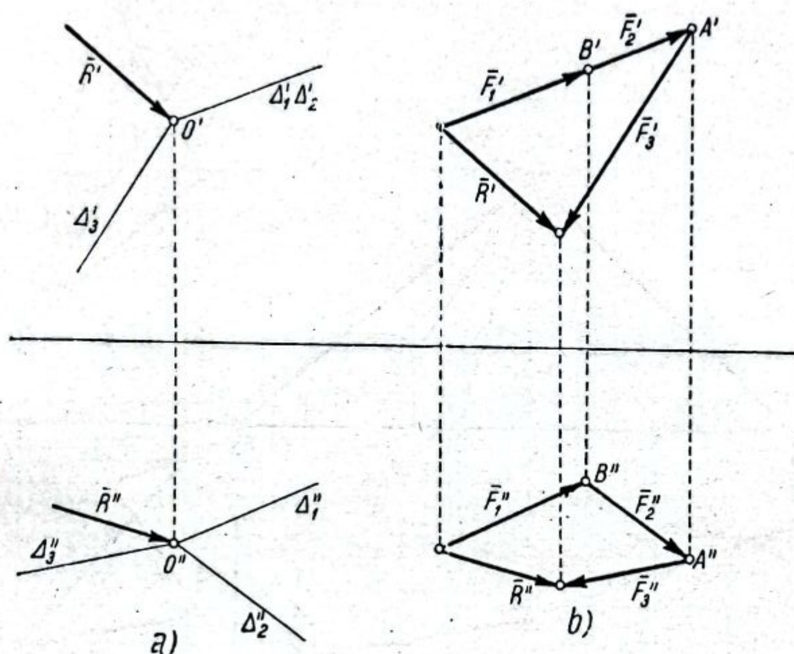


Fig. 10.32

iecțiile lui O pe cele două plane, vertical și orizontal. În planul vertical direcțiile Δ_1 și Δ_2 se proiectează după aceeași dreaptă Δ_1', Δ_2'. În planul orizontal suporturile Δ_1, Δ_2, Δ_3 se proiectează în Δ_1'', Δ_2'', Δ_3''. Forța exterioară $\overline{R}$ din O are proiecțiile $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$ pe cele două plane. Epura se începe în planul vertical unde poligonul de forțe din spațiu, cu patru laturi $\overline{R}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, se proiectează după un triunghi deoarece $\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$ se proiectează după aceeași dreaptă. Din extremitățile lui $\overline{R}'$ se duc paralele la Δ_3' și Δ_1' și în triunghiul astfel format $\overline{F}_3'$ este determinat. În planul orizontal prin extremitățile lui $\overline{R}''$ se duc paralele la Δ_1'' și Δ_3''. Cu ajutorul lui $\overline{F}_3''$ din planul vertical, se determină prin proiecția lui A' în A'' mărimea $\overline{F}_3''$ și din extremitatea acestuia se duce paralela la Δ_2'' care prin intersecția cu $\overline{F}_1''$ în B'' determină mărimile lui $\overline{F}_2''$ și $\overline{F}_1''$. Ridicînd pe B'' în B' (în planul vertical) se determină $\overline{F}_1'$ și $\overline{F}_2'$. Sensurile forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ se determină prin parcurgerea poligoanelor de forțe în cele două plane de proiecție de la origine spre extremitatea lor $(\overline{R}', \overline{R}'')$;.

Dacă se alege unul dintre planele de proiecție ca mai înainte și în fiecare dintre cele două plane cele trei forțe se proiectează după drepte distincte, se indică două procedee:

În primul se interpretează grafic metoda generală: prin suportul forței $\overline{R}$ și a uneia dintre direcții Δ_1 se duce un plan, iar prin celelalte două direcții Δ_2 și Δ_3 alt plan. Cele două plane se intersectează după o dreaptă OA. În planul $(\overline{R}, \Delta_1)$ se descompune $\overline{R}$ după Δ_1 și dreapta OA, iar în al doilea plan (Δ_2, Δ_3) se descompune componenta de pe OA după Δ_2 și Δ_3.

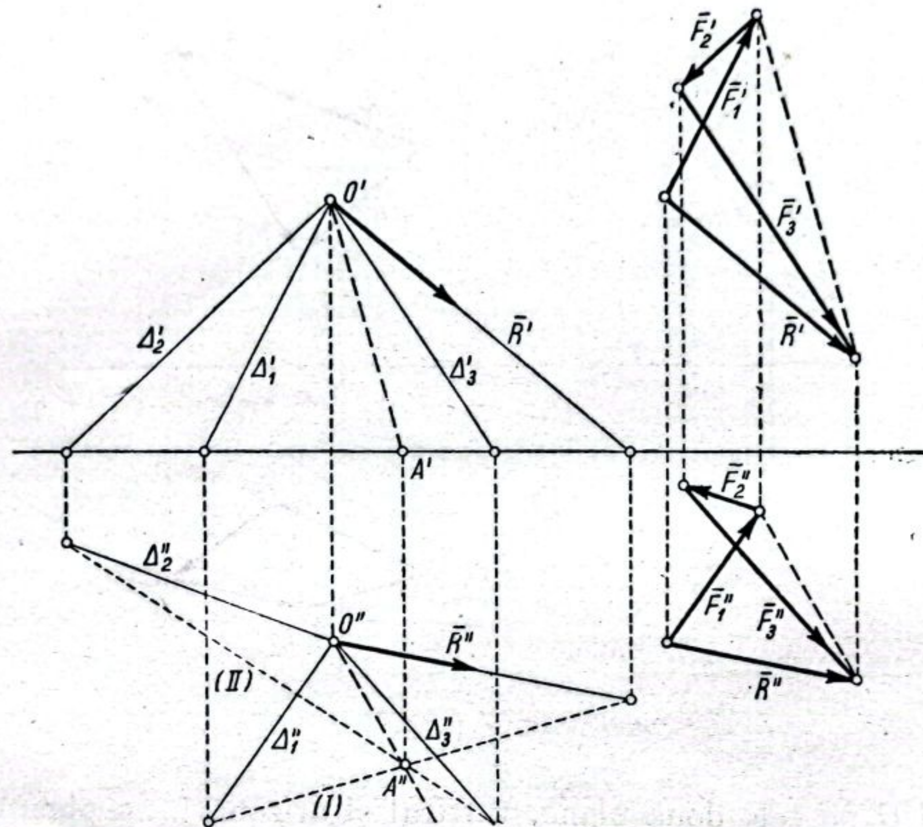


Fig. 10.33

În fig. 10.33 este indicată această construcție. Dreapta (I) reprezintă urma orizontală a planului $(\overline{R}, \Delta_1)$, iar dreapta (II) reprezintă urma orizontală a planului (Δ_2, Δ_3). Punctul A'' unde se întîlnesc cele două urme (I) și (II) este punctul unde dreapta de intersecție a planelor $(\overline{R}, \Delta_1)$ și (Δ_2, Δ_3) înțeapă planul orizontal. Punctul A' se va găsi deci pe linia de pămînt și $O'A'$, $O''A''$ reprezintă dreapta de intersecție OA. Se descompune în fiecare plan proiecția forței $\overline{R}$ după proiecțiile dreptelor Δ_1, și OA, iar apoi, componenta după OA se descompune după proiecțiile dreptelor Δ_2 și Δ_3. Sensurile forțelor $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ se obțin prin parcurgerea poligoanelor de la origine spre extremitatea lui $\overline{R}$.

Procedeul este simplu, dar de multe ori dreapta OA este greu de determinat, prin faptul că necesită intersecții care ies din cadrul epurei. De aceea este mai practic procedeul următor, indicat în fig. (10.34).

Prin extremitățile lui $\overline{R}'$ și $\overline{R}''$ se duc paralele la Δ_1' și Δ_3' respectiv Δ_1'' și Δ_3''. În planul orizontal se duce o paralelă $A''B''$ la dreapta Δ_2''. Punctul B'' se raportează în B', de aici se duce paralela la Δ_2', din A'', verticala care

determină pe A'. Punctul A' nu se va găsi, în general, pe F_3', deci poziţia $A''B''$ nu este cea justă. Dacă vom lua o altă dreaptă $A''B''$ paralelă cu F_2'' vom găsi un alt punct A'. Se observă că patrulaterul $A''B''B'A'$ se deformează, astfel încît toate laturile sale rămîn paralele, iar trei vîrfuri A'', B'' şi B' se deplasează pe trei drepte, deci în baza teoremei care a fost stabilită mai înainte, al patrulea vîrf A' se va deplasa şi el pe o dreaptă. Pentru a determina o a doua poziţie a punctului A' se porneşte de la o nouă poziţie pentru $A''B''$ paralelă cu Δ_2''. În figură s-a luat pentru această poziţie chiar punctul de intersecţie A_1'' al lui $\bar{F}_1''$ cu $\bar{F}_3''$. Punctul B_1'' se confundă cu A_1''. Acest punct se ridică pe verticală în A_1' pe dreapta F_1'. În A_1' se găseşte şi B_1'. Dreapta $A'A_1'$ întîlneşte dreapta $\bar{F}_3'$ în punctul A_2'. Din A_2' se duce $A_2'B_2'$ paralelă cu $\bar{F}_2'$. Proiectînd A_2' în A_2'' pe $\bar{F}_3''$ şi B_2' în B_2'' pe $\bar{F}_1''$ vom găsi dreapta $A_2''B_2''$, care pentru verificare, trebuie să fie paralelă cu $\bar{F}_2''$. În modul acesta au fost determinate componentele $(\bar{F}_1', \bar{F}_1'')$, $(\bar{F}_2', \bar{F}_2'')$ şi $(\bar{F}_3', \bar{F}_3'')$. Sensurile se obţin din urmărirea poligoanelor de forţe în fiecare dintre cele două plane de proiecţie.

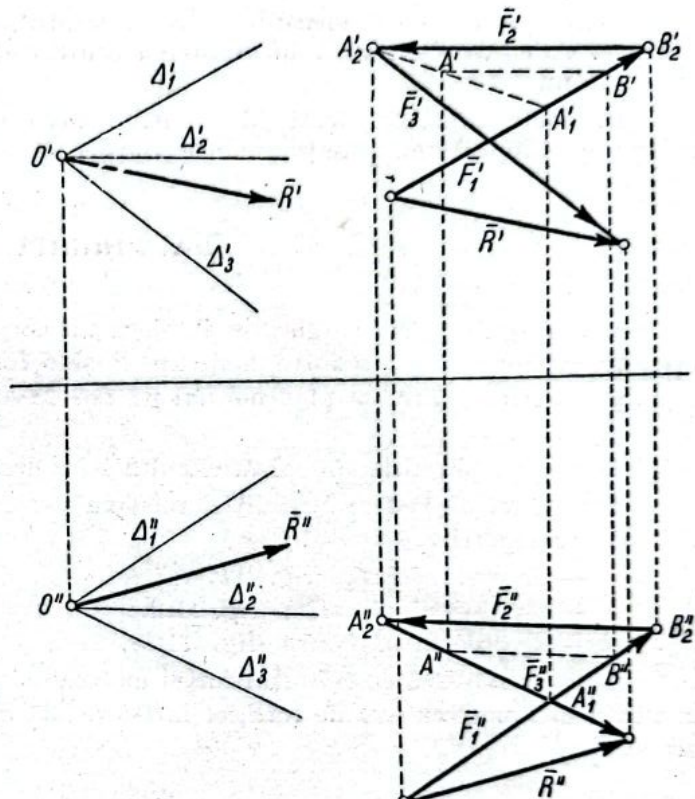


Fig. 10.34

XI. APLICAŢII ALE STATICII

§ 1. **Generalităţi.** Pentru a-şi uşura munca, din timpuri îndepărtate, omul a realizat şi folosit diferite dispozitive mecanice simple ca pîrghia, troliul, scripetele, planul înclinat şi şurubul, pe care apoi, în timp, a căutat să le perfecţioneze şi să le folosească fie direct, fie în construcţia diferitelor maşini şi instalaţii.

Din punct de vedere mecanic, aceste dispozitive sînt solide rigide sau sisteme de solide rigide, supuse la două categorii de forţe:

— *forţe de acţionare*, P (*forţe motoare*), care caută să pună sistemul în mişcare;

— *forţe rezistente*, Q, care se opun mişcării.

Sistemul de forţe care acţionează asupra acestor dispozitive trebuie să fie în echilibru; în consecinţă, pentru rezolvarea problemelor care se pun, se pot folosi rezultatele staticii teoretice.

Cu ajutorul acestor dispozitive, în genere, se pot învinge forțele rezistente Q, întrebuințînd forțe de acționare P mult mai mici. Uneori însă forța de acționare este egală sau chiar mai mare decît forța rezistentă. În astfel de cazuri, dispozitivul respectiv își justifică existența și utilizarea, fie prin posibilitatea de schimbare a direcției sau sensului forței motoare, fie prin echilibrarea dispozitivului într-un mod mai convenabil din punct de vedere practic.

Toate dispozitivele mecanice care se studiază la acest capitol au un singur grad de libertate. Calculul lor constă în studierea echilibrului lor, fie că sînt în repaus, fie că au o mișcare uniformă.

În unele manuale, aceste dispozitive mecanice simple sînt numite „mașini simple" În fond ele sînt cele mai simple unelte folosite de om.

A. PÎRGHIA

§ 2. **Pîrghia.** Prin pîrghie se înțelege un corp rigid cu un punct fix sau o axă fixă, acționat de două forțe: o forță motoare P și o forță rezistentă Q. Suporturile celor două forțe sînt conținute într-un plan normal pe axa de rotație a corpului și nu întîlnesc această axă (fig. 11.1).

De obicei pîrghiile sînt alcătuite din bare drepte, cotite sau curbe.

Din punct de vedere al poziției relative a axei O față de forțele P și Q pîrghiile pot fi de trei categorii:

a) — *de ordinul întîi* (fig. 11.1);
b) — *de ordinul al doilea* (fig. 11.2);
c) — *de ordinul al treilea* (fig. 11.3).

Dacă se notează cu p brațul forței motoare și cu q brațul forței rezistente, ecuația de momente în raport cu axa de rotație, într-o primă aproximație, cînd se neglijează frecările, este

$$Pp-Qq=0,$$

de unde

$$P=\frac{q}{p}Q. \tag{11.1}$$

La pîrghiile de ordinul întîi se poate întîlni unul dintre următoarele trei cazuri:

$p=q$, respectiv $P=Q$, cum este cazul balanțelor cu brațe egale;

$p>q$, respectiv $P<Q$, cazul general, pîrghia reprezentînd un dispozitiv care economisește forțele;

$p<q$, respectiv $P>Q$.

La pîrghiile de ordinul al doilea $p>q$ și deci întotdeauna $P<Q$. Aceste pîrghii economisind forța motoare sînt mult utilizate în construcția mașinilor, precum și în transmiterea și transformarea mișcărilor.

La pîrghiile de ordinul al treilea $p<q$ și deci întotdeauna $P>Q$.

Dacă se ține seama și de frecarea din lagăr, ecuația de momente devine:

$$Pp-Qq-\mu_1 Nr=0, \tag{11.2}$$

în care s-a notat cu μ_1 coeficientul de frecare în lagăr, cu N modulul reacțiunii și cu r raza fusului articulației.

Modulul reacțiunii N este dat de expresia

$$N=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}, \tag{11.3}$$

unde α reprezintă unghiul dintre suporturile forţelor P şi Q. Introducînd expresia lui N în (11.2) se obţine

$$Pp-Qq-\mu_1 r\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}=0. \tag{11.4}$$

În cazul particular cînd suporturile forţelor P şi Q sînt paralele, $\alpha=0°$ şi formula (11.4) devine

$$P=\frac{q+\mu_1 r}{p-\mu_1 r}Q=\frac{q}{p}\,\frac{1+\frac{\mu_1 r}{q}}{1-\frac{\mu_1 r}{p}}Q. \tag{11.5}$$

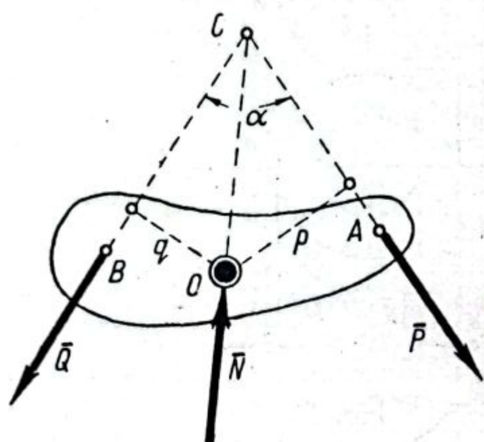


Fig. 11.1

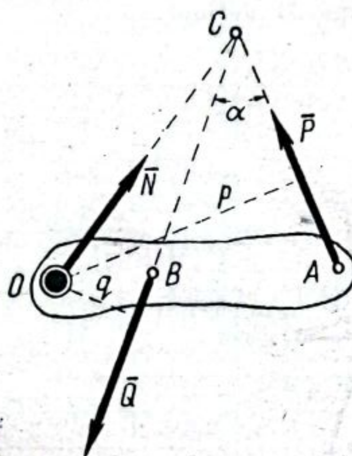


Fig. 11.2

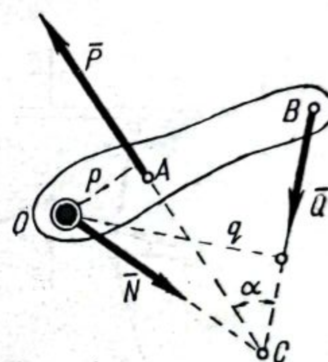


Fig. 11.3

Comparînd formulele (11.1) cu (11.5) se vede că, prin considerarea frecării, raportul $\frac{q}{p}$ se multiplică cu coeficientul

$$k=\frac{1+\frac{\mu_1 r}{q}}{1-\frac{\mu_1 r}{p}}>1, \tag{11.6}$$

adică forţa motoare P în acest caz este mai mare decît cea necesară în cazul cînd frecarea din lagăr ar fi neglijabilă.

§ 3. **Sisteme de pîrghii articulate.** În cazul unei singure pîrghii, raportul de demultiplicare este dependent de lungimea braţelor p şi q.

Pentru a se obţine rapoarte de demultiplicare mai importante se folosesc diferite grupări de pîrghii, constituind sisteme de pîrghii articulate. Acestea au o largă utilizare în construcţia maşinilor, a aparatelor de cîntărit, la frîne, regulatoare etc.

În fig. 11.4 este reprezentată schematic o presă cu genunchi, compusă din barele $B_1C_1=B_1D_1=B_2C_2=B_2D_2$, $A_1B_1=A_2B_2$ şi $A_1M=A_2M$ articulate ca în figură.

Piesa superioară E are o mişcare de translaţie verticală, între ghidajele G_1, G_2. Punctul M, articulat cu piciorul unei biele se deplasează sub acţiunea forţei P şi prin sistemul de pîrghii articulate produce barei E forţa Q, utilizată ca forţă de presare.

Între P şi Q există relaţia (se neglijează frecările)

$$P=\frac{2Q}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1}. \tag{11.7}$$

Considerînd spre exemplu, $P=2500$ kgf, $\alpha=76°$, $\beta=82°$ se obţine o forţă de presare Q de 34 400 kgf.

Un alt exemplu de pîrghii articulate se vede la frîna cu doi saboţi, arătată în fig. 11.5. Frîna se compune din pîrghiile O_1A_1 şi O_2A_2 articulate respectiv în punctele fixe O_1 şi O_2, capetele lor A_1 şi A_2 fiind articulate prin intermediul barelor A_1C_1şi A_2C_2 cu pîrghia cotită $DO_3C_1C_2$, care se roteşte în jurul lui O_3. De pîrghiile O_1A_1 şi O_2A_2 sînt fixaţi în punctele B_1 şi B_2 saboţii S_1 şi S_2 care pot fi presaţi asupra tamburului de frînare de rază R. Solidar cu acesta şi coaxial cu el, este un al doilea tambur, de rază r, pe care este înfăşurat un cablu, la capătul liber al căruia este atîrnată sarcina Q. Dacă forţa P acţionează

Fig. 11.4

Fig. 11.5

în D, forţele de frecare F_1 şi F_2 care iau naştere între saboţii S_1, S_2 şi tambur, menţin sarcina Q în echilibru.

Condiţia de echilibru a pîrghiei $DO_3C_1C_2$ este

$$PL=(T_1+T_2)l,$$

unde presupunem $T_1=T_2=\dfrac{PL}{2l}$

Pîrghia A_2O_2 este în echilibru sub acţiunea forţelor T_2 în A_2, N_2 şi $F_2=\mu N_2$ în B_2

$$T_2 \cos\alpha\, H-N_2h-\mu N_2a=0.$$

Pîrghia A_1O_1 este în echilibru sub acţiunea forţelor T_1 în A_1, N_1 şi $F_1=\mu N_1$ în B_1

$$T_1 \cos\alpha\, H-N_1h+\mu N_1a=0.$$

Din relaţiile de mai înainte rezultă presiunile celor doi saboţi asupra tamburului

$$N_1=T_1\frac{H\cos\alpha}{h-\mu a}, \quad N_2=T_2\frac{H\cos\alpha}{h+\mu a}.$$

Aceste presiuni sînt diferite. Deoarece $F_1=\mu N_1$ şi $F_2=\mu N_2$, rezultă că şi frecările celor doi saboţi pe tambur sînt diferite.

Pentru ca sarcina Q să fie menţinută în echilibru trebuie ca suma momentelor în raport cu axa O să fie nulă

$$Qr=\mu R(N_1+N_2), \quad Qr=P\,\frac{\mu\, RLH\cos\alpha}{2l}\left|\frac{1}{h+\mu a}+\frac{1}{h-\mu a}\right|,$$

de unde rezultă

$$P=Q\frac{rl(h^2-\mu^2a^2)}{\mu\, RLHh\cos\alpha}.$$

§ 4. **Aparate de cîntărit** a) *Balanţa cu braţe egale.* Din punct de vedere al mecanicii, o balanţă cu braţe egale este o pîrghie de ordinul întîi în care $p=q$. Dacă frecarea în axa de rotaţie este neglijabilă, din (11.1) rezultă

$$P=Q.$$

Calităţile unei balanţe sînt *exactitatea* şi *sensibilitatea*.

Se înţelege prin *exactitatea* unei balanţe calitatea ei de a avea braţul perfect orizontal atunci cînd platanele sînt neîncărcate, sau cînd pe cele două platane sînt aşezate greutăţi egale.

Exactitatea unei balanţe se asigură printr-o egalitate a braţelor p şi q şi prin reducerea frecărilor în axa de rotaţie (rezemări pe cuţite).

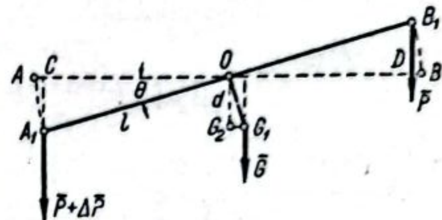


Fig. 11.6

Se înţelege prin *sensibilitatea* unei balanţe proprietatea pe care o are de a-şi modifica poziţia braţului atunci cînd în cele două platane sînt aşezate greutăţi diferite. Ca măsură a sensibilităţii se poate considera unghiul θ de înclinare a braţului, atunci cînd diferenţa dintre cele două greutăţi are o anumită valoare.

Dacă se notează cu l lungimea braţului, cu P sarcina de pe un platan, cu $P+\Delta P$ sarcina de pe celălalt platan, cu G greutatea proprie a braţelor şi cu d distanţa de la axa de rotaţie pînă la centrul de greutate al braţelor, ecuaţia de momente faţă de axa de rotaţie este (fig. 11.6)

$$(P+\Delta P)l\cos\theta-Pl\cos\theta-Gd\sin\theta=0, \tag{11.8}$$

de unde se deduce

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\Delta Pl}{Gd}. \tag{11.9}$$

Din expresia (11.9) rezultă că o balanţă este cu atît mai sensibilă, cu cît are braţele mai lungi, cu cît greutatea lor proprie G este mai mică şi cu cît centrul de greutate al braţelor situat sub axa de rotaţie, este mai aproape de această axă.

b) *Cîntarul roman.* Este din punctul de vedere al mecanicii, o pîrghie de ordinul întîi cu braţele neegale (fig. 11.7). Unul dintre braţe, OB, la extremitatea căruia se atîrnă platanul, are o lungime dată. În lungul celuilalt braţ poate aluneca un cursor de o anumită greutate P. Fie G greutatea braţului şi a platanului şi O_1 centrul de greutate respectiv.

În stare neîncărcată echilibrul are loc atunci cînd cursorul este aşezat în A_0. Ecuaţia de momente faţă de punctul O este

$$G\times OO_1=P\times OA_0. \tag{11.10}$$

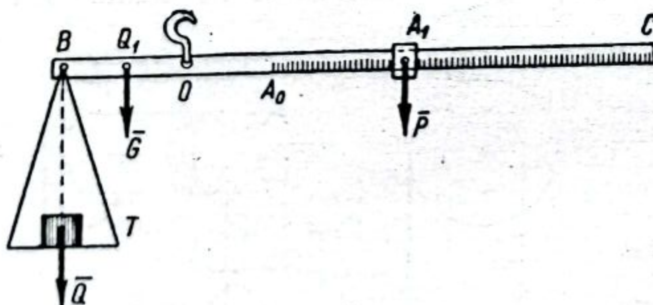


Fig. 11.7

Cînd se aşază pe platan o greutate Q, pentru restabilirea echilibrului, este necesar să fie deplasat cursorul din A_0 în A_1. Ecuaţia de momente în noua situaţie este

$$G\times OO_1+Q\times OB=P\times OA_1.$$

Comparînd această relaţie cu (11.10) se deduce

$$Q\times OB=P\times(OA_1-OA_0)=P\times A_1A_0. \tag{11.11}$$

Din relaţia (11.11) rezultă că *greutatea Q este proporţională cu lungimea A_1A_0*. Această proprietate permite să se dividă braţul lung al cîntarului în modul următor: pe platan se aşază o greutate cunoscută, de exemplu de 1 kgf şi se determină poziţia A_1 corespunzătoare a cursorului. Dacă $A_0A_1=\lambda$ atunci diviziunile corespunzătoare greutăţilor de 2 kgf, 3 kgf etc... vor fi respectiv 2λ, 3λ etc. Împărţind intervalele în părţi egale, se pot determina diviziunile corespunzătoare fracţiunilor de kilogramforţă.

c) *Cîntarul zecimal.* Este alcătuit dintr-un sistem de pîrghii articulate dispuse aşa cum se arată în fig. 11.8. Pe pîrghia DE este aşezată undeva, la distanţa d de extremitatea D, greutatea Q. Această pîrghie se sprijină în E pe un cuţit solidar cu pîrghia FG.

Pîrghia FG se sprijină la rîndul ei în G pe alt cuţit. Extremităţile D şi F ale celor două pîrghii sînt legate respectiv prin tiranţii DB şi FC de pîrghia ABC care se sprijină în O. În extremitatea A este legat un platan pe care se aşază greutatea P.

Relaţia între P şi Q se stabileşte din ecuaţiile de echilibru ale pîrghiilor DE, FG şi ABC. Rezultă

$$Q_1=\frac{Q\times(DE-d)}{DE},\quad Q_2=\frac{Q\times d}{DE},\quad Q_3=\frac{Q_2\times E'G}{FG}=Q\frac{d}{DE}\times\frac{E'G}{FG}$$

$$P=\frac{Q_1\times OB+Q_3\times OC}{OA}=\frac{Q}{OA}\left[OB+\left(\frac{OC}{DE}\times\frac{E'G}{FG}-\frac{OB}{DE}\right)d\right].$$

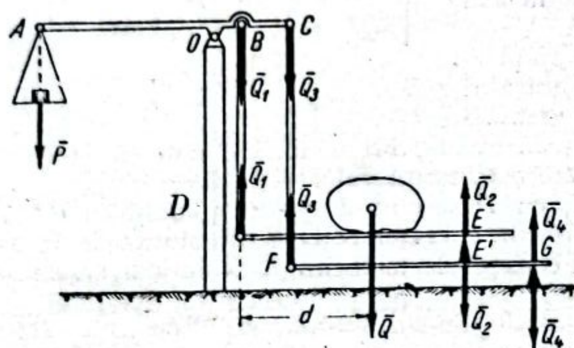


Fig. 11.8

Pentru ca rezultatul cîntăririi să fie independent de poziţia greutăţii Q pe cîntar, este necesar să se anuleze coeficientul lui d, adică

$$\frac{E'G}{FG}=\frac{OB}{OC}. \tag{11.12}$$

Dacă este îndeplinită condiţia (11.12) atunci

$$P=\frac{OB}{OA}Q. \tag{11.13}$$

Totul se comportă deci ca şi cînd sarcina Q ar acţiona în B. Alegînd $OA=10\ OB$ rezultă

$$P=\frac{Q}{10}.$$

Pe platanul cîntarului este necesar să se aşeze o greutate P de zece ori mai mică decît greutatea Q care trebuie cîntărită. De aici şi denumirea de cîntar zecimal.

B. TROLIUL

§ 5. **Troliul.** *Troliurile* servesc la ridicarea greutăţilor. Troliul simplu (fig. 11.9) se compune dintr-un tambur cilindric pe care este înfăşurat un cablu (sau un lanţ) care are un capăt fixat de tambur, iar de celălalt capăt atîrnă sarcina Q ce trebuie ridicată. Tamburul are la extremităţi două fusuri care se rotesc în lagăre. Pe tambur se află fixată o roată la extremitatea căreia se aplică, tangenţial, forţa motoare P.

Notînd cu r raza tamburului şi cu R raza roţii şi neglijînd frecările în lagăre, rigiditatea cablului şi greutatea acestuia, ecuaţia de momente în raport cu axa de rotaţie se scrie

$$PR-Qr=0,\ \text{de unde}\ P=Q\frac{r}{R}. \tag{11.14}$$

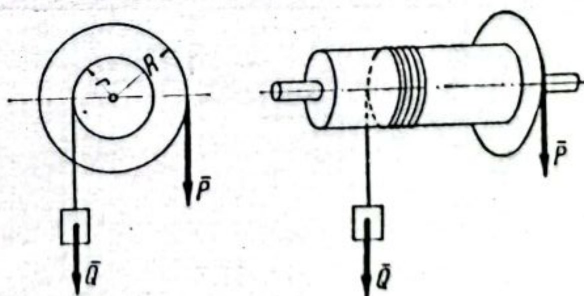


Fig. 11.9

Dacă se ţine seama de greutatea cablului, atunci, notînd cu q greutatea sa pe unitatea de lungime şi cu l lungimea porţiunii de cablu care atîrnă, ecuaţia de momente devine

$$PR-(Q+ql)r=0,\ \text{de unde}\ P=(Q+ql)\frac{r}{R}. \tag{11.15}$$

Se observă că sarcina P variază cu lungimea l a cablului desfăşurat. Pentru a menţine constantă sarcina P în timpul ridicării greutăţii Q, se utilizează un troliu cu tambur tronconic. În modul acesta, pe măsură ce greutatea Q se urcă (l descreşte) raza r creşte, astfel încît produsul $(Q+ql)r$ să rămînă constant. Ca urmare: $P=\text{const}$.

Un asemenea troliu se numeşte *troliu regulator* (fig. 11.10).

Troliul cu ax vertical se mai numeşte şi *cabestan*.

§ 6. **Troliul diferenţial.** Are tamburul format din două porţiuni cilindrice de raze diferite R şi r (fig. 11.11). Greutatea Q care trebuie ridicată este atîrnată de furca unui scripete mobil. Cablul, petrecut pe după scripete este înfăşurat în sensuri diferite pe cele două porţiuni de tambur. Cînd troliul este rotit astfel încît cablul să se înfăşoare pe porţiunea de tambur de rază R, el se va desfăşura de pe porţiunea de tambur de rază r. Deoarece $R>r$ rezultă că porţiunea de cablu care se înfăşoară este mai mare decît cea care se desfăşoară, deci greutatea Q se urcă.

Neglijînd frecările şi rigiditatea firelor, tensiunile din firele troliului sînt egale cu $Q/2$ şi ecuaţia de momente faţă de axa troliului se scrie

$$Pl+\frac{Q}{2}r-\frac{Q}{2}R=0, \text{ de unde } P=\frac{R-r}{2l}Q. \tag{11.16}$$

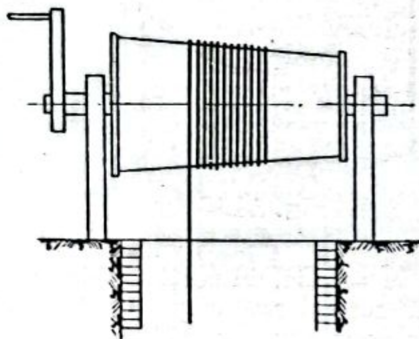


Fig. 11.10

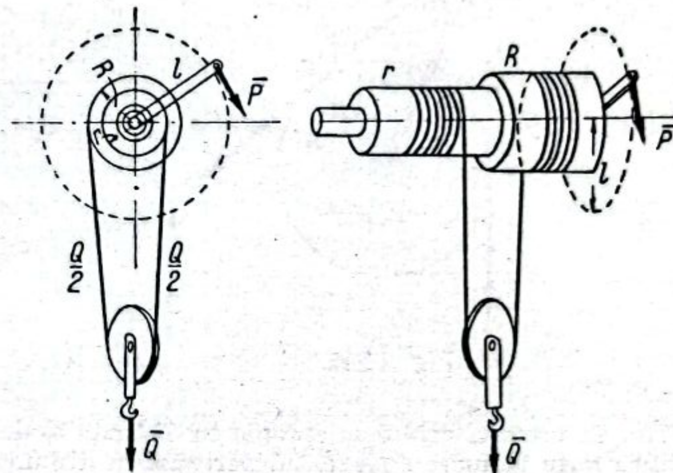


Fig. 11.11

Se observă că raportul dintre forţa motoare P şi cea rezistentă Q este proporţional cu diferenţa $R-r$ a razelor celor două porţiuni de tambur. De aci şi denumirea de troliu diferenţial.

C. SCRIPETELE

§ 7. **Scripetele.** Scripetele este alcătuit dintr-un disc circular avînd pe periferia lui un şanţ, prin care trece un cablu (sau un lanţ). Axul scripetelui este prins într-o furcă care se termină cu un cîrlig.

a) *Scripetele fix* (fig. 11.12). În acest caz, dacă se neglijează frecările şi rigiditatea firului, din ecuaţia de momente

$$PR-QR=0, \text{ rezultă } P=Q, \tag{11.17}$$

Dacă se ţine seama de frecarea în lagăre, ecuaţia de momente se scrie

$$PR-QR-\mu_1 Nr=0,$$

unde μ_1 este coeficientul de frecare în lagăre, r este raza fusului scripetelui, iar N este modulul reacţiunii din axă

$$N=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}.$$

În această expresie α este unghiul dintre suporturile forţelor P şi Q. În cazul cînd cele două suporturi sînt paralele $N=P+Q$ şi rezultă ecuaţia de momente

$$PR-QR-\mu_1 r(P+Q)=0, \text{ de unde } P=\frac{R+\mu_1 r}{R-\mu_1 r}Q. \tag{11.18}$$

În cele de mai înainte s-a presupus cablul perfect flexibil. În realitate el opune oarecare rezistență la încovoiere. Această rezistență este cunoscută sub numele de *rigiditate* şi ea se manifestă prin aceea că în regiunile BB_1 şi AA_1 în care cablul se înfăşoară, sau se desfăşoară de pe scripete (fig. 11.13), curbura variază continuu, de la valoarea $\frac{1}{R}$ pînă la valoarea 0 (zero) şi nu brusc, aşa cum ar fi posibil numai în cazul unei flexibilităţi per-

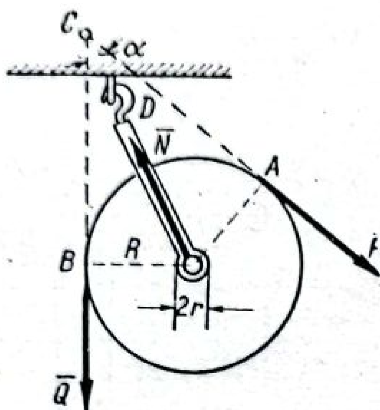


Fig. 11.12

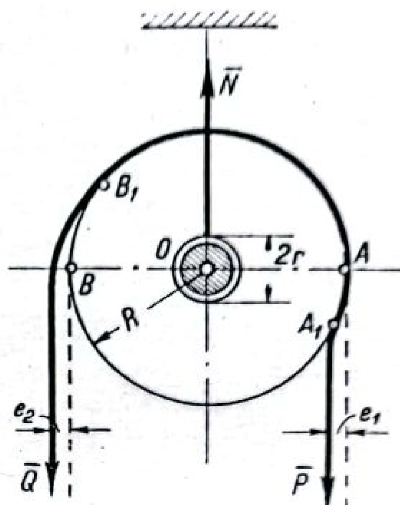


Fig. 11.13

fecte. Ca urmare, cablul se apropie cu distanţa e_1 de axa de rotaţie, în porţiunea în care se aplică forţa motoare P şi se îndepărtează cu distanţa e_2 de aceeaşi axă în porţiunea în care se aplică forţa rezistentă Q. Ecuaţia de momente se scrie în acest caz (fig. 11.13)

$$P(R-e_1)-Q(R+e_2)-\mu_1 Nr=0.$$

Dacă suporturile forţelor P şi Q sînt paralele, $N=P+Q$ şi, din ecuaţia de momente, se deduce

$$P=\frac{R+e_2+\mu_1 r}{R-e_1-\mu_1 r}\,Q. \qquad (11.19)$$

Deoarece mărimile e_1, e_2 şi r sînt foarte mici, formula (11.19) se poate scrie în mod aproximativ

$$P=\left[1+\frac{e_1+e_2+2\mu_1 r}{R-e_1-\mu_1 r}\right]Q\approx\left[1+\frac{e_1+e_2}{R}+\frac{2\mu_1 r}{R}\right]Q. \qquad (11.20)$$

Notînd $\lambda=\frac{e_1+e_2}{R}$ şi $k=1+\lambda+\frac{2\mu_1 r}{R}$, expresia forţei P se poate scrie

$$P\approx kQ. \qquad (11.21)$$

Deoarece $k>1$ rezultă $P>Q$. Scripetele simplu are rolul de a schimba direcţia de transmitere a forţei, din care cauză se întrebuinţează ca *scripete de ghidaj*.

Valorile coeficientului λ, în funcţie de diametrul d al cablului se pot lua:

$\lambda=0{,}02\ d^2$ .... $0{,}06\ d^2$ pentru funii de cînepă;

$\lambda=0{,}06\ d^2$ .... $0{,}09\ d^2$ pentru cabluri de oţel.

b) *Scripetele mobil.* Scripete mobil este orice scripete al cărui ax este deplasabil. De axul unui astfel de scripete se poate atîrna sarcina de ridicat Q (fig. 11.14, *a*) sau se aplică forţa motoare P (fig. 11.14, *b*); în primul caz scripetele mobil serveşte pentru demultiplicarea forţei motoare, iar în al doilea caz pentru demultiplicarea vitezei de acţionare a sarcinii.

Să considerăm cazul general al scripetelui mobil pentru demultiplicarea forței motoare (fig. 11.15), cu cele două ramuri făcînd între ele unghiul α.

În acest caz din ecuația de momente în raport cu axa de rotație a scripetelui

$$Pr - Tr = 0 \text{ se deduce } T = P, \quad (11.22)$$

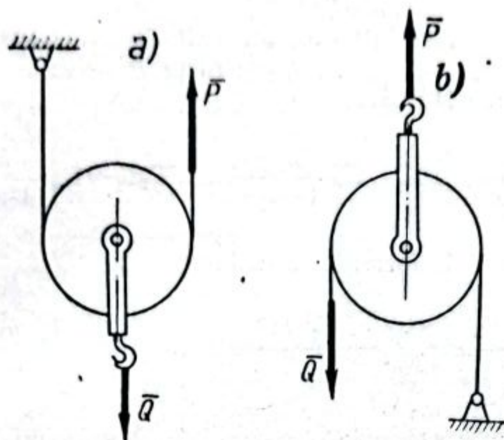


Fig. 11.14

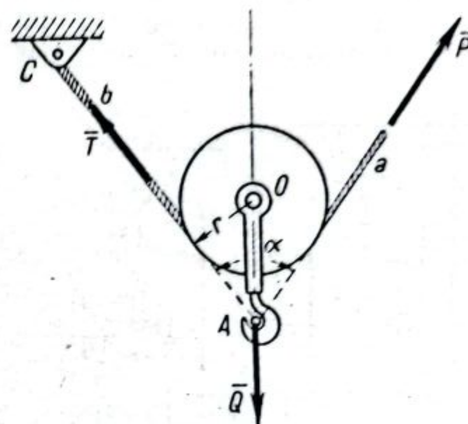


Fig. 11.15

iar din ecuația de proiecție pe direcția forței Q

$$Q - P\cos\frac{\alpha}{2} - T\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{se deduce} \quad P = \frac{Q}{2\cos\frac{\alpha}{2}}. \quad (11.23)$$

În cazul cînd forțele P și Q sînt paralele (fig. 11.14, a) $\alpha = 0$ și

$$P = \frac{Q}{2}. \quad (11.24)$$

Scripetele mobil, spre deosebire de scripetele fix, permite să se ridice o greutate Q folosindu-se o forță motoare $P < Q$. Comparînd formulele (11.23) și (11.24) se deduce că se utilizează cea mai mică forță motoare posibilă în cazul $\alpha = 0$, adică atunci cînd forța motoare este verticală.

Dacă se ține seama de frecări și de rigiditatea cablului se poate utiliza formula (11.21) stabilită în cazul scripetelui fix. Rezultă

$$P = kT, \; P + T = Q, \text{ de unde } \quad P = \frac{kQ}{1+k}. \quad (11.25)$$

§ 8. **Sisteme de scripeți.** a) Se poate alcătui un sistem de scripeți dintr-un scripete fix și un număr n de scripeți mobili. În fig. 11.16 se arată un astfel de sistem de scripeți cu $n = 3$. Notînd cu $T_1, T_2, \dots, T_n$ tensiunile din ramurile cablului care leagă între ei scripeții mobili și ultimul scripete mobil de scripetele fix și folosind formulele stabilite la paragraful precedent, avem

$$T_1 = \frac{k}{1+k} Q, \quad T_2 = \frac{k}{1+k} T_1, \dots,$$

$$T_n = \frac{k}{1+k} T_{n-1}, \quad P = kT_n.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități, se deduce

$$P = \frac{k^{n+1}}{(1+k)^n} Q. \quad (11.26)$$

În cazul cînd se neglijează frecările, $k=1$ şi formula (11.26) devine

$$P=\frac{Q}{2^n}. \qquad (11.27)$$

Faptul că în expresia forţei motoare numărul de scripeţi n intervine ca exponent, a făcut ca acest sistem de scripeţi să fie numit uneori *palan exponenţial.*

b) Un alt sistem de scripeţi este cel din fig. 11.17. El este alcătuit dintr-un scripete fix şi doi scripeţi mobili. Relaţiile dintre tensiunile $T_1, T_2, \ldots, T_n$ şi forţa P se scrie aplicînd formula (11.25)

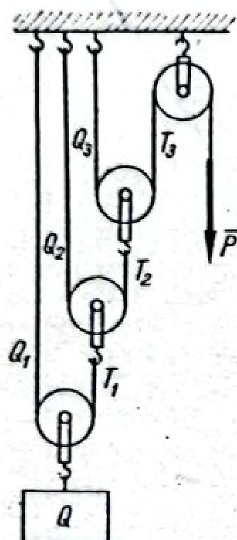


Fig. 11.16

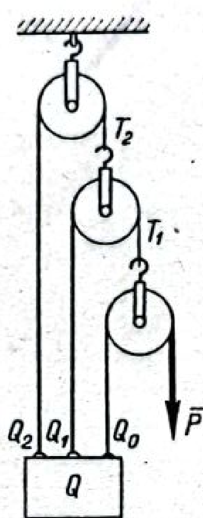


Fig. 11.17

$$P=T_1\frac{k}{1+k}, \quad T_1=T_2\frac{k}{1+k}, \ldots, \quad T_{n-1}=T_n\frac{k}{1+k}.$$

Din acest şir de formule se deduce

$$T_1=\frac{1+k}{k}P, \quad T_2=\frac{(1+k)^2}{k^2}P, \ldots, \quad T_n=\frac{(1+k)^n}{k^n}P.$$

Tensiunile $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ se vor scrie aplicînd formula (11.21)

$$P=kQ_0, \quad T_1=kQ_1, \ldots, \quad T_n=kQ_n.$$

Din aceste formule şi din cele precedente se deduce

$$Q_0=\frac{1}{k}P, \quad Q_1=\frac{1+k}{k^2}P,$$

$$Q_2=\frac{(1+k)^2}{k^3}P, \ldots, \quad Q_n=\frac{(1+k)^n}{k^{n+1}}P.$$

Ţinînd seama că

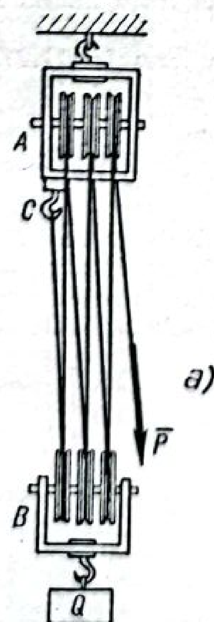
$$Q=Q_0+Q_1+\cdots+Q_n,$$

după efectuarea tuturor calculelor rezultă

$$P=\frac{Q}{\frac{(1+k)^{n+1}}{k^{n+1}}-1}. \qquad (11.28)$$

În cazul cînd nu se ţine seama de frecări, $k=1$ şi formula (11.28) devine

$$P=\frac{Q}{2^{n+1}-1}. \qquad (11.29)$$



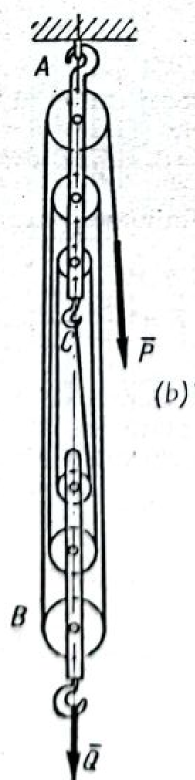


Fig. 11.18

§ 9. **Palanul** (fig. 11.18). Este un sistem de scripeţi alcătuit din două mufle, adică din două grupe de scripeţi montate fiecare pe cîte o furcă. Una dintre mufle A este fixă, iar de cealaltă B atîrnă greutatea. Un fir continuu legat de mufla superioară în C este petrecut succesiv peste scripeţii celor două mufle. La capătul firului acţionează forţa motoare P.

— Presupunînd că fiecare muflă are n scripeți și notînd cu $T_1, T_2, \ldots, T_{2n}$ tensiunile din fiecare ramură a firului, rezultă

$$Q = T_1 + T_2 + \cdots + T_{2n},$$

$$P = kT_1, \quad T_1 = kT_2, \ldots, \quad T_{n-1} = kT_n, \ldots, T_{2n-1} = kT_{2n}.$$

Din aceste relații se deduce

$$T_1 = \frac{1}{k} P, \quad T_2 = \frac{1}{k^2} P, \ldots, T_{2n} = \frac{1}{k^{2n}} P$$

și, după efectuarea tuturor calculelor

$$P = \frac{k^{2n}(k-1)}{k^{2n}-1} Q. \tag{11.30}$$

Dacă se neglijează frecările și rigiditatea firelor, formula (11.30) devine

$$P = \frac{Q}{2n}. \tag{11.31}$$

Palanul diferențial este utilizat în practică pentru ridicarea greutăților, folosindu-se în ateliere sub numele de *macara diferențială*.

El se compune dintr-un troliu A și un scripete mobil B (fig. 11.19). Troliul este format din două roți de raze R și r, iar scripetele mobil are raza r_1. Roțile au profil special pentru lanț, astfel încît, un lanț fără sfîrșit este petrecut peste cele două roți ale troliului și peste scripetele mobil. De scripetele mobil este atîrnată greutatea Q, iar forța motoare P acționează asupra ramurii b a lanțului, cînd voim să ridicăm sarcina Q, sau asupra ramurii a a lanțului, pentru coborîre.

Notînd cu T_1 și T_2 tensiunile din lanț, din ecuațiile de momente în raport cu axele

$$T_1 r_1 - T_2 r_1 = 0, \; PR + T_2 r - T_1 R = 0,$$

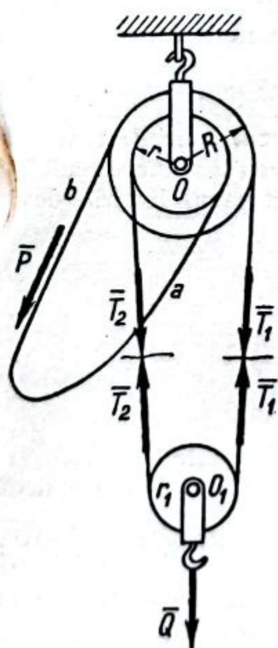


Fig. 11.19

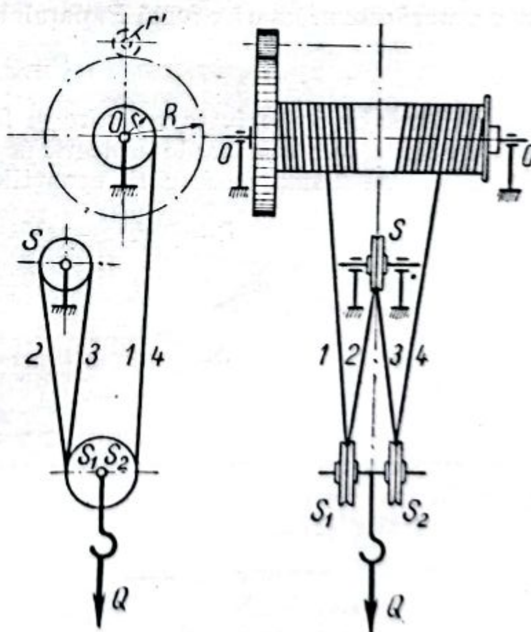


Fig. 11.20

rezultă $T_1 = T_2 = \frac{Q}{2}$ și deci

$$P = \frac{R-r}{2R} Q. \tag{11.32}$$

Raportul de demultiplicare depinde de diferența $R-r$ a razelor celor două roți ale troliului, motiv pentru care palanul a căpătat denumirea de *diferențial*.

Întrucît razele R şi r pot avea valori apropiate, raportul de demultiplicare $\frac{R-r}{2R}$ poate atinge valori mici, astfel încît cu o forţă motoare mică se poate ridica o sarcină mare.

E x e m p l u. Să considerăm un palan diferenţial avînd $R=200$ mm şi $r=180$ mm, cu care voim să ridicăm o sarcină $Q=1\,000$ kgf.

Raportul de demultiplicare este

$$\frac{R-r}{2R}=\frac{1}{20}.$$

Folosind expresia (11.32) se găseşte $P=50$ kg.

Palanul dublu este utilizat la maşinile de ridicat acţionate mecanic (fig. 11.20).

Cu ajutorul palanului dublu, sarcina Q este ridicată riguros după verticală, în timp ce, cu orice alt sistem de ridicare, sarcina are şi o oarecare deplasare orizontală.

Palanul dublu poate fi considerat ca două palane simple, care funcţionează concomitent fiecare fiind încărcat cu $Q/2$.

Caracteristica palanului dublu constă în faptul că ambele capete ale cablului sînt fixate de tambur, ramurile *1* şi *4* sînt trecute peste scripeţii coaxiali S_1 şi S_2 şi în continuare, ramurile *2* şi *3* trec peste scripetele S, care are rolul de a egaliza lungimea celor două ramuri ale cablului.

D. PLANUL ÎNCLINAT

§ 10. **Planul înclinat** (fig. 11.21). Serveşte la ridicarea şi la coborîrea corpurilor. Se ştie că pentru a ridica cu viteză constantă pe verticală un corp de greutate Q este necesară o forţă $P=Q$. Dacă acelaşi corp este însă ridicat pe un plan înclinat faţă de orizontală sub un unghi α atunci este necesară o forţă P, paralelă cu linia de cea mai mare pantă şi egală cu

$$P=Q\sin\alpha. \tag{11.33}$$

Această relaţie între forţa motoare şi forţa rezistentă rezultă imediat, în cazul cînd se neglijează frecările, din ecuaţia de proiecţie pe direcţia liniei de cea mai mare pantă a planului.

Dacă se ţine seama de frecări, ecuaţiile de echilibru, în cazul limită, devin

$$P-Q\sin\alpha-\mu N=0,\quad N-Q\cos\alpha=0,$$

din care se deduce

$$P=Q[\sin\alpha+\mu\cos\alpha]=Q\,\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}, \tag{11.34}$$

unde prin φ s-a notat unghiul de frecare ($\operatorname{tg}\varphi=\mu$). Comparînd formulele (11.33) şi (11.34) se observă că în cazul unui plan aspru este necesară o forţă activă P mai mare decît în cazul unui plan luciu ($\mu=0$).

Din formula (11.33) rezultă că întotdeauna $P<Q$. Din formula (11.34) rezultă că, pentru ca $P<Q$ este necesar ca $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}<1$ sau $\sin(\alpha+\varphi)<\sin(90°-\varphi)$, sau încă

$$\alpha+2\varphi<90°. \tag{11.35}$$

În cazul cînd condiţia (11.35) nu este îndeplinită, $P>Q$ şi forţa necesară pentru a ridica corpul pe planul înclinat este mai mare decît aceea necesară pentru a-l ridica pe verticală; planul înclinat îşi pierde avantajul.

Cînd planul înclinat serveşte la coborîrea greutăţilor, atunci sensul de alunecare este cel descendent. Formula (11.33) nu suferă nici o schimbare. Formula (11.34) devine

$$P=Q\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}. \tag{11.36}$$

Formula (11.36) dă mărimea necesară a forţei P pentru a împiedica corpul de greutate Q să alunece în jos.

În cazurile cînd $\alpha \leqslant \varphi$ valoarea dată de (11.36) este negativă sau nulă. În aceste cazuri corpul de greutate Q se autofixează pe plan. Forţele de frecare sînt suficiente pentru a asigura

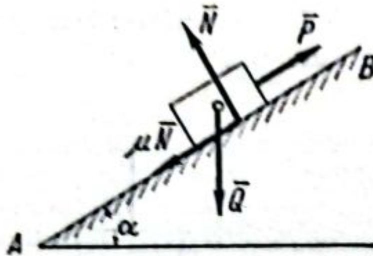


Fig. 11.21

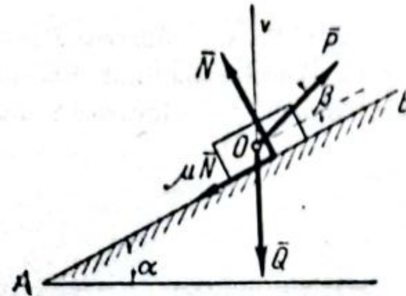


Fig. 11.22

aceasta. Cînd $\alpha=\varphi$, $P=0$. Rezultă că, la cel mai mic deranjament, corpul începe să alunece. Cînd $\alpha<\varphi$, $P<0$. Rezultă că, pentru a face corpul să alunece este necesar să se exercite o forţă paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului, dirijată în sens descendent.

În cazul cînd forţa P nu este paralelă cu linia de cea mai mare pantă a planului, ci face un unghi β cu aceasta (fig. 11.22), ecuaţiile de echilibru se scriu

$$P \cos\beta - Q \sin\alpha - \mu N = 0, \quad N - Q \cos\alpha + P \sin\beta = 0,$$

din care

$$P = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} Q = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\varphi)} Q. \tag{11.37}$$

Formula (11.37) dă valoarea forţei P necesară pentru a ridica corpul de greutate Q pe planul inclinat. În cazul cînd planul înclinat serveşte pentru coborîrea greutăţilor Q, se obţine

$$P_1 = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)} Q. \tag{11.38}$$

Condiţia de autofixare rămîne, ca şi în cazul precedent

$$\alpha \leqslant \varphi. \tag{11.39}$$

Forţa P_1 dată de (11.38) este mai mică decît forţa P dată de (11.37) deoarece diferenţa lor

$$P - P_1 = \frac{\sin 2\varphi \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta-\varphi)\cos(\beta+\varphi)} Q$$

este o cantitate pozitivă, atît timp cît $\alpha+\beta<90°$, ceea ce are loc întotdeauna, deoarece pentru a menţine corpul în echilibru, forţa P trebuie să se găsească la dreapta verticalei OV.

Adesea planul înclinat se combină cu un troliu, ca în fig. 11.23. Notăm cu $\mu=\operatorname{tg}\varphi$ coeficientul de frecare dintre corp şi planul înclinat, cu μ_1 coeficientul de frecare la fusul troliului, cu r raza tamburului pe care se înfăşoară cablul, cu R raza roţii la extremitatea căreia acţionează forţa P şi cu a raza fusului.

Se consideră că se taie cablul şi se scrie separat echilibrul corpului pe planul înclinat şi echilibrul troliului.

Cînd tendinţa mişcării corpului este în sensul urcării pe planul înclinat

$$T = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi} Q, \quad PR = Tr + \mu_1 N_1 a,$$

unde $N_1 = \sqrt{P^2+T^2+2PT\sin\alpha}$, iar P are valoarea P_{max}.

Cînd tendința mișcării este în sensul coborîrii pe plan

$$T=\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}Q, \qquad PR=Tr-\mu_1 N_1 a.$$

În acest caz P are valoarea P_{min}.

Principiul planului înclinat este folosit în practică sub forme variate: transportoare gravitaționale, tobogane, elevatoare oblice, funiculare pe șine etc.

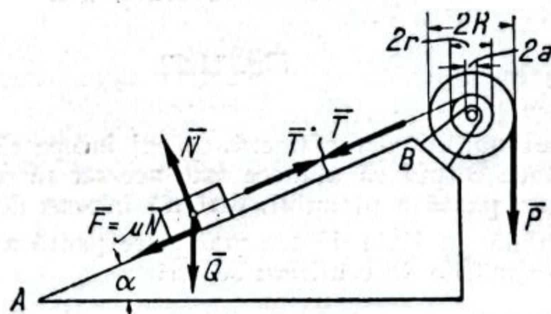


Fig. 11.23

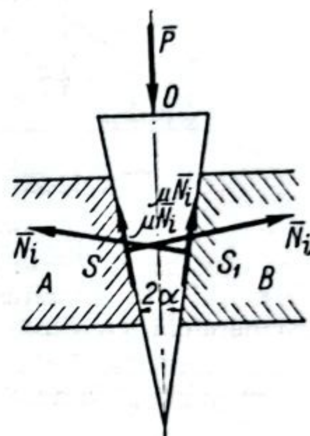


Fig. 11.24

§ 11. **Pana** (fig. 11.24). Este un organ de îmbinare demontabil avînd forma unei prisme triunghiulare care se introduce între două piese A și B. Pana acționează asupra pieselor A și B prin presiunile și forțele de frecare pe care le exercită pe fețele ei laterale. Dacă se notează cu 2α unghiul la vîrf, cu P forța de acționare, cu N_i și μN_i respectiv reacțiunea normală și cea de frecare într-un punct oarecare al suprafeței laterale a penei, ecuația de proiecție pe direcția forței P este

$$P=2\Sigma N_i \sin\alpha+2\Sigma\mu N_i\cos\alpha=2\,(\Sigma N_i)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha).$$

Forța cu care pana împinge lateral una dintre piesele A sau B este

$$Q=\Sigma N_i\cos\alpha-\Sigma\mu N_i\sin\alpha=(\Sigma N_i)(\cos\alpha-\mu\sin\alpha).$$

Din expresiile găsite pentru P și Q se deduce prin împărțire:

$$P=2\,\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\,Q=2Q\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi). \tag{11.40}$$

Din această formulă rezultă că, cu cît α și φ sînt mai mici, cu atît se realizează o presiune mai mare Q, cu o aceeași forță P.

În cazul cînd se scoate pana dintre cele două piese A și B, sensul forțelor de frecare se schimbă și forța P necesară este

$$P=2Q\,\mathrm{tg}(\alpha-\varphi). \tag{11.41}$$

Pentru ca pana să rămînă autofixată după batere este necesar ca valoarea sarcinii P dată de (11.41) să fie nulă sau negativă, adică $\alpha\leqslant\varphi$.

E. ŞURUBUL

§ 12. **Şurubul (fig. 11.25).** Este alcătuit dintr-un cilindru circular drept pe suprafaţa laterală a căruia este săpat un şanţ, numit *filet*, în forma unei elice circulare. Dacă se consideră desfăşurată suprafaţa laterală a cilindrului (fig. 12.13), se poate verifica uşor că între panta tg α a elicei, raza r a cilindrului şi pasul p al elicei există relaţia simplă

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{2\pi r}. \tag{11.42}$$

Şurubul se înşurubează într-o piesă denumită piuliţă, care are un gol cilindric pe suprafaţa căruia este săpat un filet de asemenea elicoidal, avînd aceleaşi elemente geometrice ca şi filetul şurubului.

Mişcarea relativă a şurubului faţă de piuliţă este o mişcare elicoidală particulară, numită *mişcare de şurub*, caracterizată prin aceea că viteza de înaintare este proporţională cu viteza unghiulară de rotaţie.

Există cazuri cînd piuliţa este fixă, iar şurubul are o mişcare elicoidală (de exemplu presa cu şurub, şurubul de presiune), cazuri cînd şurubul este fix şi piuliţa are o mişcare elicoidală (de exemplu şuruburile de asamblare), cazuri cînd piuliţa are mişcare de rotaţie, iar şurubul mişcare de translaţie (de exemplu şurubul binoclului) şi cazuri cînd şurubul are mişcare de rotaţie şi piuliţa mişcare de translaţie (de exemplu şurubul conducător de la strung).

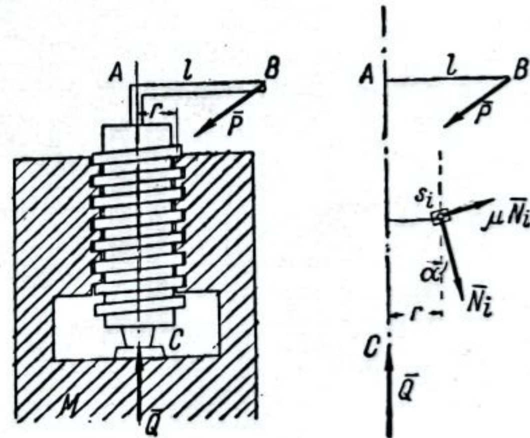


Fig. 11.25

În cele ce urmează se va presupune piuliţa fixă şi şurubul mobil. Rezultatele care vor fi stabilite sînt valabile şi în toate celelalte cazuri.

Asupra şurubului acţionează:

— la una dintre extremităţi un cuplu motor de moment $\mathcal{M}$, al cărui vector este coliniar cu axa şurubului (de exemplu în cazul cînd şurubul este rotit cu o cheie de braţ l la capătul căreia acţionează o forţă P, momentul $\mathcal{M}=Pl$);

— la cealaltă extremitate o forţă rezistentă Q avînd direcţia axei şurubului şi sensul opus celui de înaintare al şurubului;

— în lungul filetului său, în fiecare punct A_i de contact cu filetul piuliţei, o forţă de presiune din partea acestuia, care poate fi descompusă într-o componentă N_i, normală la filet şi o componentă μN_i tangenţială la filet şi dirijată în sens invers sensului de deplasare al filetului şurubului faţă de acela al piuliţei.

Dacă se caută numai relaţia dintre momentul motor $\mathcal{M}$ şi forţa rezistentă Q, este suficient să se scrie ecuaţia de proiecţie pe axa şurubului şi ecuaţia de momente în raport cu această axă.

Aceste ecuaţii sînt:

$$Q-\Sigma N_i\cos\alpha+\Sigma\mu N_i\sin\alpha=0,$$

$$\mathcal{M}-\Sigma rN_i\sin\alpha-\Sigma r\mu N_i\cos\alpha=0.$$

Ele se mai scriu, considerînd μ constant în lungul filetului

$$Q=(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)\,\Sigma N_i,$$

$$\mathcal{M}=r(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\,\Sigma N_i,$$

de unde prin împărţire

$$\mathcal{M}=Qr\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}=Qr\operatorname{tg}(\alpha+\varphi). \tag{11.43}$$

Formula (11.43) arată legătura între momentul motor şi forţa rezistentă, atunci cînd are loc „înşurubarea". La „deşurubare" sensul forţelor de frecare se schimbă şi formula (11.43) devine

$$\mathcal{M}=Qr\ \mathrm{tg}\ (\alpha-\varphi). \qquad (11.44)$$

Pentru ca şurubul să se autofixeze este necesar ca valoarea momentului, dată de (11.44), să fie negativă sau nulă, cu alte cuvinte pentru deşurubare, este necesar un moment de sens opus celui care a produs înşurubarea. Această condiţie este realizată, indiferent de forţa de strîngere Q, dacă $\alpha\leqslant\varphi$.

În exemplul arătat în fig. 11.25 s-a considerat că asupra şurubului acţionează o forţă P normală pe manivela AB. Dacă forţa P face cu AB un unghi diferit de 90°, ea va produce presarea şurubului pe faţa laterală a piuliţei şi va rezulta o frecare de care trebuie să se ţină seama. Se evită aceasta acţionînd asupra şurubului cu un cuplu al cărui plan este normal la axa şurubului.

PARTEA A TREIA

CINEMATICA

XII. CINEMATICA PUNCTULUI

A. GENERALITĂŢI. DEFINIŢII

§ 1. **Generalităţi.** Problema centrală a cinematicii (κίνημα=mişcare) este studiul mişcării mecanice a sistemelor de puncte, fără a se ţine seama de masele acestor puncte şi de forţele care acţionează asupra lor.

În cinematică se folosesc noţiunile fundamentale de spaţiu şi de timp. În mecanica clasică se presupune că spaţiul este: absolut, euclidian şi tridimensional; iar timpul: absolut, avînd caracterul unui parametru continuu unidimensional, independent de spaţiu şi de orice altă mărime.

Mişcarea unui sistem de puncte se raportează în general la un reper, care este presupus, în mod convenţional, «*fix*». Orice reper, solidar cu reperul fix este considerat de asemenea fix. Orice alt reper care nu este solidar cu reperul fix este considerat «*mobil*». Mişcarea sistemului de puncte în raport cu un reper fix se numeşte *mişcare absolută*, iar mişcarea aceluiaşi sistem faţă de un reper mobil se numeşte *mişcare relativă*.

În cele ce urmează se va studia în prealabil mişcarea în raport cu un reper fix şi apoi mişcarea în raport cu un reper mobil. Se va analiza, de fiecare dată, mai întîi cazul unui singur punct şi apoi cazul unui sistem de puncte. Dintre sisteme, se vor cerceta mai amănunţit sistemele rigide (corpurile rigide).

§ 2. **Mişcarea punctului.** Mişcarea unui punct faţă de un reper fix este definită atunci cînd este posibil să se determine la orice moment t poziţia punctului. În general vom presupune că se defineşte vectorul de poziţie $\bar{r}$ al punctului faţă de originea O a reperului, ca funcţie de timp

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \tag{12.1}$$

Funcţia vectorială, definită de (12.1) trebuie să satisfacă, în intervalul de timp în care este valabilă, anumite restricţii impuse de fenomenul fizic al mişcării punctului. Astfel, ea trebuie să fie *continuă, uniformă* (deoarece punctul material nu poate ocupa simultan mai multe poziţii distincte în spaţiu), *finită în modul* şi *derivabilă* (primele două derivate definesc două mărimi fizice, viteza şi acceleraţia punctului la momentul t).

Cu toate aceste restricţii, clasa funcţiilor (12.1) este foarte cuprinzătoare.

Definirea vectorului de poziţie $\bar{r}$ poate fi făcută în general cu ajutorul a trei funcţii scalare. Astfel, dacă se folosesc coordonate carteziene, cunoaş-

terea vectorului $\bar{r}=\bar{r}(t)$ echivalează cu cunoaşterea abscisei, ordonatei şi cotei punctului, ca funcţii scalare de timp, adică

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \tag{12.2}$$

Dacă se folosesc coordonate cilindrice, cunoaşterea vectorului $\bar{r}=\bar{r}(t)$ echivalează cu cunoaşterea razei polare r, a unghiului polar θ şi a cotei z, ca funcţii scalare de timp, adică

$$r=r(t), \quad \theta=\theta(t), \quad z=z(t). \tag{12.3}$$

Dacă se folosesc coordonate sferice, cunoaşterea vectorului $\bar{r}=\bar{r}(t)$ echivalează cu cunoaşterea razei vectoare r, a azimutului θ şi a longitudinii φ ca funcţii de timp, adică

$$r=r(t), \quad \theta=\theta(t), \quad \varphi=\varphi(t). \tag{12.4}$$

În general, dacă se folosesc coordonatele, q_1, q_2 şi q_3, care determină biunivoc poziţia punctului, cunoaşterea vectorului $\bar{r}=\bar{r}(t)$, echivalează cu cunoaşterea funcţiilor scalare q_1, q_2, q_3, adică

$$q_1=q_1(t), \quad q_2=q_2(t), \quad q_3=q_3(t). \tag{12.5}$$

În cele ce urmează, se va folosi forma (12.1) la studiul proprietăţilor generale ale mişcării. În aplicaţii vom folosi alături de forma (12.1), una dintre formele echivalente (12.2), (12.3), (12.4) sau (12.5).

§ 3. **Traiectorie.** Locul geometric al poziţiilor succesive pe care le ocupă punctul în mişcare se numeşte *traiectorie*.

Ecuaţiile (12.2), (12.3), (12.4) sau (12.5) pot fi considerate ca fiind ecuaţiile parametrice ale traiectoriei.

În unele probleme de cinematică se cunoaşte traiectoria. În acest caz, dacă traiectoria este o curbă continuă, rectificabilă şi are în orice punct o tangentă unică, mişcarea punctului material poate fi definită, printr-o singură ecuaţie scalară, în felul următor:

Se alege pe curbă un punct arbitrar A_0. Un punct oarecare A poate fi definit prin valoarea s a arcului A_0A. Pentru ca să existe o corespondenţă biunivocă între arcul s şi poziţia punctului A este necesar să se stabilească pe traiectorie un sens pozitiv de măsurare a arcelor. O dată această convenţie făcută, mişcarea mobilului este definită dacă se cunoaşte legea de variaţie a arcului s în funcţie de timpul t

$$s=s(t). \tag{12.6}$$

Ecuaţia (12.6) se numeşte *ecuaţia orară* a mişcării.

§ 4. **Invarianţii mişcării unui punct faţă de schimbarea reperului.** Să considerăm un reper fix faţă de care, mişcarea unui punct material este definită prin legea $\bar{r}=\bar{r}(t)$. Schimbînd reperul, vectorul de poziţie, care va defini mişcarea faţă de noul reper fix va fi

$$\bar{r}_1(t)=\bar{r}_0+\bar{r}(t), \tag{12.7}$$

unde prin $\overline{r}_1(t)$ s-a notat noul vector de poziţie, iar prin $\overline{r_0}$ vectorul $\overline{O_1O}$ care uneşte originile celor două repere fixe. Vectorul $\bar{r}_0$ nu depinde, evident, de timpul t, deoarece O şi O_1 sînt două puncte fixe. Se pot obţine invarianţi ai mişcării dacă se elimină vectorul $\bar{r}_0$ din (12.7). Această eliminare se poate realiza prin derivări succesive ale acestei relaţii, în raport cu timpul. Se obţine

$$\dot{\overline{r}}_1=\dot{\overline{r}},\ \ddot{\overline{r}}_1=\ddot{\overline{r}},\ \dddot{\overline{r}}_1=\dddot{\overline{r}} \text{ etc. } \dots \tag{12.8}$$

Conchidem că *toate derivatele vectorului de poziţie în raport cu timpul sînt invariante faţă de schimbările de reper fix.*

Proprietăţile intrinseci ale mişcării unui punct material sînt determinate de invarianţii (12.8). Primii doi invarianţi

$$\overline{v}=\dot{\overline{r}}, \tag{12.9}$$

$$\overline{a}=\ddot{\overline{r}}, \tag{12.10}$$

care se numesc respectiv *viteza* şi *acceleraţia* mobilului la momentul t, intervin în formularea principiilor dinamicii.

§ 5. Viteza medie. Viteza la un moment dat. Să presupunem că la momentul t mobilul se găseşte în A, iar la momentul $t+\Delta t$ în A_1 (fig. 12.1).

Să notăm cu Δs lungimea arcului de curbă AA_1. Se numeşte *viteză medie* în intervalul de timp $(t,\ t+\Delta t)$ raportul dintre lungimea arcului Δs şi durata Δt, adică

$$v_{\substack{m \\ AA_1}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{12.11}$$

Viteza medie depinde de perechea de puncte A, A_1, care se consideră pe traiectoria mobilului. Această mărime ne dă o idee destul de vagă despre mişcarea punctului. Pentru a obţine o precizie a acestei noţiuni considerăm punctul A fix şi facem ca Δt şi Δs să tindă către zero. În acest caz raportul $\Delta s/\Delta t$ tinde în general către o limită (presupunem funcţia $s=s(t)$ continuă şi derivabilă), iar formula (12.11) devine

$$v_A=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{12.12}$$

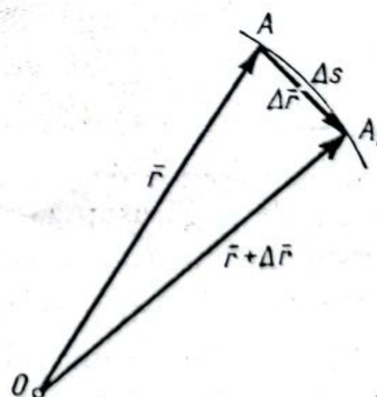


Fig. 12.1

Mărimea scalară definită de (12.12) caracterizează *viteza mobilului* în A. Această mărime scalară poate fi transformată într-o mărime vectorială dacă convenim să se atribuie vitezei din A direcţia tangentei din acest punct, iar ca sens acela considerat pozitiv pentru arcele s. În acest caz, viteza în A va fi definită prin vectorul

$$\overline{v}_A=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overline{\tau}, \tag{12.13}$$

în care s-a notat cu $\bar{\tau}$ versorul tangentei în A la traiectorie. Sensul vectorului $\bar{\tau}$ coincide cu sensul pozitiv ales pentru arcul s.

Se poate arăta că relația de definiție a vitezei în A (12.13) coincide cu relația de definiție a aceleiași mărimi (12.9), dată la paragraful precedent.

Într-adevăr, să considerăm (fig. 12.1) vectorii $\bar{r}$ și $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ care caracterizează pozițiile A și A_1 ale mobilului. Se poate scrie

$$\dot{\bar{r}}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}\bar{\tau}, \qquad (12.14)$$

deoarece:

— vectorul $\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}$ este un vector unitar care are direcția coardei AA_1. La limită coarda tinde către tangenta în A, deci vectorul $\frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta\bar{r}|}$ tinde către $\bar{\tau}$;

— raportul $\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta s}$ este raportul dintre lungimea coardei AA_1 și aceea a arcului corespunzător. Acest raport, la limită, tinde către unitate, deoarece curba a fost presupusă rectificabilă;

— raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tinde la limită către $\frac{ds}{dt}$.

Unități de măsură. Din definiție rezultă că ecuația dimensională a vitezei se va scrie

$$[v]=\frac{L}{T}=LT^{-1}.$$

Unitatea de măsură pentru viteză va fi egală cu unitatea de măsură pentru lungime divizată prin unitatea de măsură pentru timp.

În sistemul CGS viteza se măsoară în centimetri pe secundă, iar în sistemul SI, viteza se măsoară în metri pe secundă.

§ 6. Accelerația. Să considerăm din nou mobilul în cele două poziții A și A_1 și să presupunem că vitezele corespunzătoare sînt $\bar{v}$ și $\bar{v}+\Delta\bar{v}$. Mărimea $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ caracterizează variația vectorului viteză în unitatea de timp. Această mărime depinde de perechea de puncte A și A_1 aleasă și ne dă o noțiune destul de vagă asupra variației vectorului viteză. Pentru a o preciza vom presupune punctul A fix și vom trece la limită făcînd Δt și $\Delta\bar{v}$ să tindă către zero. Dacă se admite că vectorul $\bar{v}$ este o funcție continuă și derivabilă de timp, raportul $\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ va tinde către o limită, care se numește *accelerația mobilului în punctul A*

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}. \qquad (12.15)$$

Unități de măsură. Din definiție rezultă că ecuația dimensională a accelerației va fi

$$[a]=\frac{L}{T^2}=LT^{-2}.$$

Unitatea de măsură pentru accelerație va fi deci egală cu unitatea de măsură pentru lungime, divizată prin pătratul unității de măsură pentru timp. În sistemul CGS accelerația se măsoară în centimetri pe secundă la pătrat, iar în sistemul SI în metri pe secundă la pătrat.

§ 7. **Hodograful vitezei.** Se consideră un punct arbitrar O în spațiu, în care se aplică un vector echipolent cu vectorul viteză. Cînd mobilul descrie traiectoria (Γ), vîrful vectorului viteză, aplicat în O descrie o curbă (γ). Această curbă poartă numele de *hodograful vitezei* (fig. 12.2).

Cu ajutorul hodografului se poate da o interpretare interesantă accelerației unui mobil într-un punct. Dacă se consideră două poziții apropiate A_1 și A_2 ale mobilului pe traiectoria (Γ), vitezele lor corespunzătoare $\bar{v}$ și $\bar{v}+\Delta\bar{v}$, punctele B_1 și B_2 corespunzătoare pe hodograful (γ), atunci viteza extremității B a vectorului $\bar{v}$ pe hodograf va fi

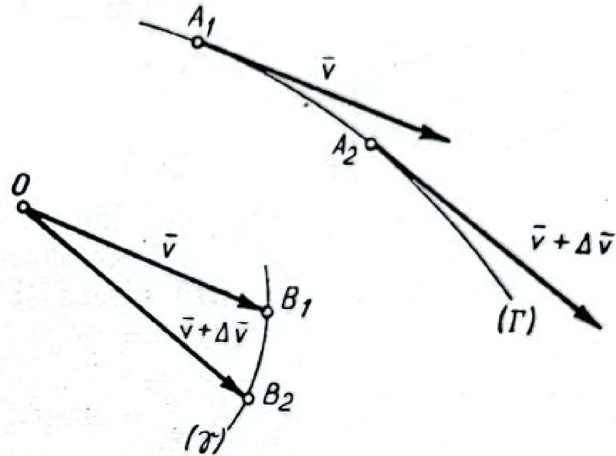


Fig. 12.2

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{B_1B_2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\bar{v}+\Delta\bar{v})-\bar{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}=\dot{\bar{v}}=\bar{a},$$

adică *accelerația mobilului pe traiectoria* (Γ) *este egală cu viteza extremității vectorului viteză pe hodograful* (γ).

§ 8. **Aproximarea mișcării unui punct în vecinătatea unei poziții. Deviație.** S-a presupus că funcția $\bar{r}=\bar{r}(t)$ care definește mișcarea unui punct, este continuă și derivabilă de două ori, derivatele ei fiind și ele continue. Aceasta permite să se dezvolte în serie Taylor sub forma

$$\bar{r}(t+\Delta t)=\bar{r}(t)+\Delta t\cdot\dot{\bar{r}}(t)+\frac{1}{2}(\Delta t)^2\cdot\ddot{\bar{r}}(t)+\bar{\varepsilon}(t,\ \Delta t). \qquad (12.16)$$

Relația (12.16) ne permite să aproximăm mișcarea unui punct în vecinătatea unei poziții A. Pentru intervale de timp Δt foarte mici, mișcarea curbilinie poate fi înlocuită cu aceea a unui mobil fictiv care s-ar mișca după legea

$$\overline{AA'}=\Delta t\cdot\dot{\bar{r}}(t). \qquad (12.17)$$

Deoarece $\dot{\bar{r}}(t)$ este un vector tangent la traiectorie, rezultă că mișcarea are loc pe tangenta la curbă. Considerînd $t=$const și $\Delta t=$variabil, rezultă că viteza mobilului fictiv este

$$\frac{\mathrm{d}\overline{AA'}}{\mathrm{d}(\Delta t)}=\dot{\bar{r}}(t),$$

deci constantă. O asemenea mișcare se numește *mișcare rectilinie și uniformă*.

În concluzie, *o mişcare curbilinie poate fi asimilată, în vecinătatea de ordinul întîi a punctului A, cu o mişcare rectilinie şi uniformă, pe tangenta în A la traiectorie, avînd viteza egală cu viteza din A a mobilului.*

În vecinătatea de ordinul al doilea [pentru valori Δt mai mari, dar totuşi suficient de mici, ca $\bar{\varepsilon}(t, \Delta t)$ să fie neglijabil] este necesar să se introducă o corecţie sub forma mişcării unui mobil fictiv care se face după legea

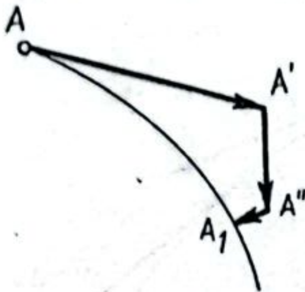


Fig. 12.3

$$\overline{A'A''}=\frac{1}{2}(\Delta t)^2\ddot{\bar{r}}(t). \qquad (12.18)$$

Traiectoria acestei mişcări este o dreaptă avînd aceeaşi direcţie ca $\ddot{\bar{r}}(t)$. Considerînd şi de data aceasta timpul t constant şi intervalul de timp Δt variabil, pentru viteza şi acceleraţia mobilului fictiv obţinem expresiile

$$\frac{\mathrm{d}\overline{A'A''}}{\mathrm{d}(\Delta t)}=\Delta t\ddot{\bar{r}}(t), \quad \frac{\mathrm{d}^2\overline{A'A''}}{\mathrm{d}(\Delta t)^2}=\ddot{\bar{r}}(t).$$

O asemenea mişcare, cu acceleraţie constantă, poartă numele de *mişcare rectilinie uniform variată.*

În concluzie, *o mişcare curbilinie poate fi asimilată în vecinătatea de ordinul al doilea a punctului A, cu două mişcări rectilinii: una, uniformă pe tangenta la traiectorie, cu viteza din A a mobilului şi a doua, uniform variată cu acceleraţia din A a mobilului.*

Vectorul $\overline{A'A''}$ poartă numele de *deviaţie.*

În fig. 12.3 au fost desenate segmentele $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$ şi $\overline{A''A_1}$. Ultimul segment, $\overline{A''A_1}=\bar{\varepsilon}(t, \Delta t)$, uneşte punctul A'' cu punctul A_1 de pe curbă, în care se găseşte mobilul în momentul $t+\Delta t$.

B. COMPONENTELE VITEZEI ŞI ACCELERAŢIEI ÎN DIFERITE SISTEME DE COORDONATE

§ 9. **Sistemul de coordonate carteziene.** Într-un sistem de coordonate carteziene (fig. 12.4) vectorul de poziţie este definit prin coordonatele x, y şi z ale punctului. Cunoaşterea mişcării punctului revine la cunoaşterea acestor coordonate ca funcţii de timp

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Aceste ecuaţii pot fi considerate că definesc parametric traiectoria (Γ). Dacă se elimină timpul, ecuaţiile traiectoriei mai pot fi scrise şi sub forma implicită

$$f_1(x, y, z)=0, \quad f_2(x, y, z)=0.$$

Vectorul de poziţie $\bar{r}$ se va scrie

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}.$$

Viteza $\bar{v}$ se deduce prin derivarea vectorului de poziție în raport cu timpul

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}. \tag{12.19}$$

Accelerația $\bar{a}$ se deduce derivînd de două ori vectorul de poziție în raport cu timpul

$$\bar{a}=\ddot{\bar{r}}=\ddot{x}\,\bar{i}+\ddot{y}\,\bar{j}+\ddot{z}\,\bar{k}. \tag{12.20}$$

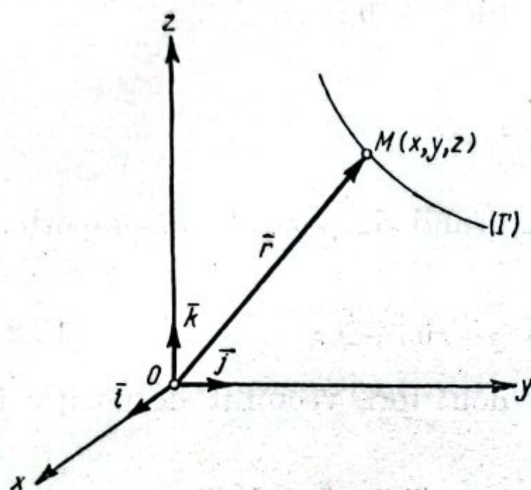


Fig. 12.4

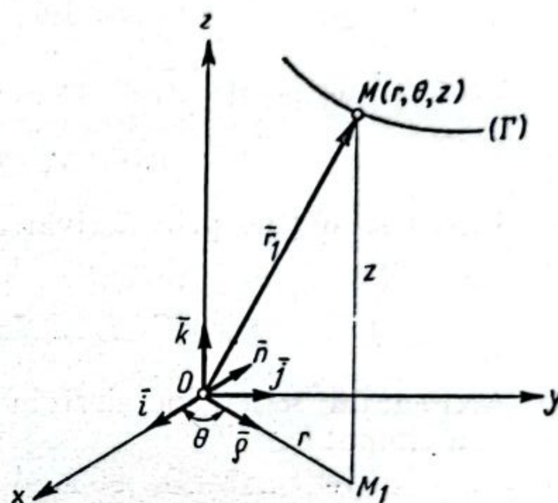


Fig. 12.5

În aceste derivări s-a ținut seama că axele triedrului fiind fixe, versorii lor $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ sînt constanți, deci $\dot{\bar{i}}=\dot{\bar{j}}=\dot{\bar{k}}=0$.

Din relațiile (12.19) și (12.20) deducem proiecțiile pe axe ale vectorilor viteză și accelerație

$$\begin{aligned} v_x&=\dot{x}, & v_y&=\dot{y}, & v_z&=\dot{z},\\ a_x&=\ddot{x}, & a_y&=\ddot{y}, & a_z&=\ddot{z}. \end{aligned} \tag{12.21}$$

§ 10. Sistemul de coordonate cilindrice. În sistemul de coordonate cilindrice (fig. 12.5), vectorul de poziție $\bar{r}_1$ este definit de coordonatele θ (unghiul polar), r (raza polară) și z (cota). Cunoașterea mișcării punctului revine la cunoașterea funcțiilor

$$r=r(t) \quad \theta=\theta(t) \quad z=z(t).$$

Aceste ecuații pot fi considerate ca ecuații parametrice ale mișcării. Direcțiile pe care se proiectează sînt: a) direcția razei polare OM_1 caracterizată prin versorul $\bar{\rho}$, b) direcția normală la raza polară din planul xOy, caracterizată prin versorul $\bar{n}$ și c) direcția axei Oz caracterizată prin versorul $\bar{k}$.

Se observă că versorul $\bar{k}$ este constant, deci $\dot{\bar{k}}=0$, iar ceilalți doi versori, $\bar{\rho}$ și $\bar{n}$ sînt mobili. Se pot calcula derivatele lor, în raportul cu timpul, calculînd proiecțiile lor pe axele fixe de versori $\bar{i}$ și $\bar{j}$.

Obţinem

$$\bar{\rho}=\cos\theta\bar{i}+\sin\theta\bar{j},\quad \bar{n}=-\sin\theta\bar{i}+\cos\theta\bar{j},$$

de unde, prin derivare,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\rho}}&=-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{i}+\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{j}=\dot{\theta}\,\bar{n},\\ \dot{\bar{n}}&=-\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{i}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\bar{j}=-\dot{\theta}\,\bar{\rho}.\end{aligned}\tag{12.22}$$

Vectorul de poziţie $\bar{r}_1$ se va scrie

$$\bar{r}_1=r\bar{\rho}+z\bar{k}.$$

Viteza se obţine prin derivarea vectorului de poziţie $\bar{r}_1$ în raport cu timpul

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}_1=\dot{r}\bar{\rho}+r\dot{\bar{\rho}}+\dot{z}\bar{k}=\dot{r}\bar{\rho}+r\dot{\theta}\bar{n}+\dot{z}\bar{k}.\tag{12.23}$$

Acceleraţia se obţine derivînd de două ori vectorul de poziţie în raport cu timpul

$$\begin{aligned}\bar{a}=\ddot{\bar{r}}_1=\ddot{r}\,\bar{\rho}+\dot{r}\,\dot{\bar{\rho}}+\dot{r}\,\dot{\theta}\,\bar{n}+r\,\ddot{\theta}\,\bar{n}+r\,\dot{\theta}\,\dot{\bar{n}}+\ddot{z}\,\bar{k}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\bar{\rho}+\\ +(r\,\ddot{\theta}+2\dot{r}\,\dot{\theta})\bar{n}+\ddot{z}\,\bar{k}.\end{aligned}\tag{12.24}$$

Din (12.23) şi (12.24) deducem componentele vitezei şi acceleraţiei în coordonatele cilindrice

$$\begin{aligned}&v_\rho=\dot{r},\ v_n=r\dot{\theta},\ v_z=\dot{z},\\ &a_\rho=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\ a_n=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z=\ddot{z}.\end{aligned}\tag{12.25}$$

Observaţie. În cazul unei mişcări a mobilului în planul coordonatelor r, θ (coordonate polare) rezultă

$$z=0,\quad v_z=0\quad \text{şi}\quad a_z=0,$$

şi obţinem

$$\begin{aligned}&v_\rho=\dot{r},\quad v_n=r\dot{\theta},\\ &a_\rho=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2,\quad a_n=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}.\end{aligned}\tag{12.26}$$

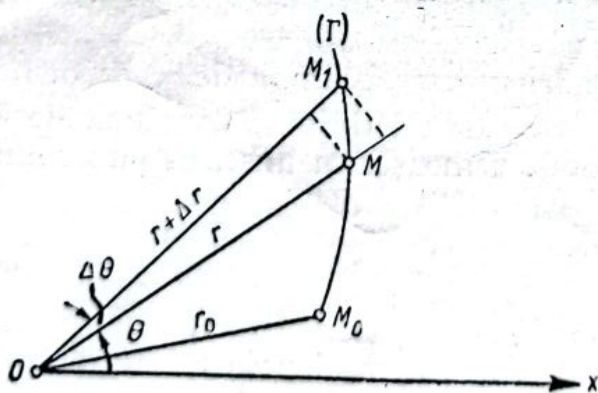


Fig. 12.6

Se poate defini o mărime care caracterizează creşterea ariei sectoriale, cuprinsă între două raze vectoare şi arcul de traiectorie cînd mobilul descrie traiectoria. Ea se numeşte *viteză areolară* Ω.

Se consideră pentru aceasta aria sectorială A la momentul t şi la momentul $t+\Delta t$. Creşterea ariei, ΔA, este reprezentată în fig. 12.6 prin aria triunghiului curbiliniu OMM_1. S-a presupus că derivata $\dot{\bar{r}}(t)$ nu se anulează de o infinitate de ori în vecinătatea punctului M, astfel încît se

poate alege un arc MM_1 pe care funcţia $\bar{r}(t)$ să fie monotonă, de exemplu, în cazul fig. 12.6, monoton crescătoare. Se observă că

$$\frac{r^2\Delta\theta}{2}<\Delta A<\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\theta}{2}.$$

Împărţind cu timpul Δt şi trecînd la limită putem scrie

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r^2\Delta\theta}{2\Delta t}\leqslant\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}\leqslant\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\theta}{2\Delta t}.$$

Cum

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r^2\Delta\theta}{2\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(r+\Delta r)^2\Delta\theta}{2\Delta t}=\frac{r^2\dot{\theta}}{2},$$

rezultă pentru viteza areolară expresia

$$\Omega=\frac{r^2\dot{\theta}}{2}. \tag{12.27}$$

Observaţie. Se poate arăta că viteza areolară Ω are ca valoare absolută jumătate din modulul produsului vectorial $\bar{r}\times\bar{v}$. Într-adevăr

$$\bar{r}\times\bar{v}=r\bar{\rho}\times(v_\rho\bar{\rho}+v_n\bar{n})=rv_n\bar{\rho}\times\bar{n}=r^2\dot{\theta}\bar{k}.$$

Rezultă

$$|\bar{r}\times\bar{v}|=|r^2\dot{\theta}|=2|\Omega|,$$

de unde

$$|\Omega|=\frac{1}{2}|\bar{r}\times\bar{v}|. \tag{12.28}$$

§ 11. Coordonate sferice. Vectorul de poziţie este definit în acest caz prin raza vectoare r, azimutul θ şi longitudinea φ (fig. 12.7). Mişcarea este definită, cînd se cunosc funcţiile

$$r=r(t),\quad \theta=\theta(t),\quad \varphi=\varphi(t),$$

care pot fi privite ca ecuaţii parametrice ale traiectoriei. Proiecţiile vitezei şi acceleraţiei se vor calcula pe:

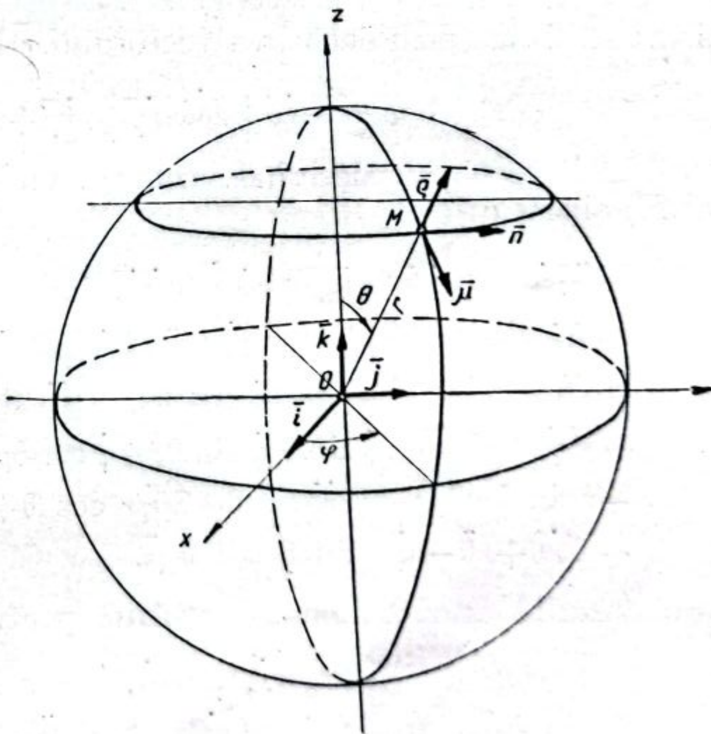


Fig. 12.7

a) direcţia razei vectoare OM orientată de versorul $\bar{\rho}$;

b) direcţia tangentei la paralela care trece prin M, orientată de versorul $\bar{n}$;

c) direcţia tangentei la meridianul care trece prin M, orientată de versorul $\bar{\mu}$.

Se observă că toți acești versori sînt variabili. Pentru a calcula derivatele lor în raport cu timpul, îi vom proiecta pe axele fixe Ox, Oy, și Oz. Obținem

$$\bar\rho=\sin\theta\cos\varphi\,\bar i+\sin\theta\sin\varphi\,\bar j+\cos\theta\,\bar k,$$

$$\bar n=-\sin\varphi\,\bar i+\cos\varphi\,\bar j,$$

$$\bar\mu=\cos\theta\cos\varphi\,\bar i+\cos\theta\sin\varphi\,\bar j-\sin\theta\,\bar k.$$

Prin derivare în raport cu timpul rezultă

$$\begin{aligned}\dot{\bar\rho}&=\dot\theta\cos\theta\cos\varphi\,\bar i+\dot\theta\cos\theta\sin\varphi\,\bar j-\dot\theta\sin\theta\,\bar k-\\&-\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi\,\bar i+\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi\,\bar j=\dot\theta\bar\mu+\dot\varphi\sin\theta\,\bar n,\\ \dot{\bar n}&=-\dot\varphi\cos\varphi\,\bar i-\dot\varphi\sin\varphi\,\bar j=-\dot\varphi\sin\theta\,\bar\rho-\dot\varphi\cos\theta\,\bar\mu,\\ \dot{\bar\mu}&=-\dot\theta\sin\theta\cos\varphi\,\bar i-\dot\theta\sin\theta\sin\varphi\,\bar j-\dot\theta\cos\theta\,\bar k-\\&-\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi\,\bar i+\dot\varphi\cos\theta\cos\varphi\,\bar j=-\dot\theta\bar\rho+\dot\varphi\cos\theta\,\bar n.\end{aligned}\tag{12.29}$$

În coordonate sferice, vectorul de poziție poate fi scris sub forma

$$\bar r=r\bar\rho.$$

Viteza se obține prin derivarea vectorului $\bar r$ în raport cu timpul

$$\bar v=\dot{\bar r}=\dot r\bar\rho+r\dot{\bar\rho}=\dot r\bar\rho+r\dot\theta\bar\mu+r\dot\varphi\sin\theta\,\bar n.\tag{12.30}$$

Accelerația se obține derivînd vectorul viteză (12.30). Ținînd seama de (12.29) obținem

$$\begin{aligned}\bar a&=\ddot r\bar\rho+\dot r\dot{\bar\rho}+(\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)\bar\mu+r\dot\theta\dot{\bar\mu}+[\dot r\dot\varphi\sin\theta+r\ddot\varphi\sin\theta+\\&+r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta]\bar n+r\dot\varphi\sin\theta\,\dot{\bar n}=\ddot r\bar\rho+\dot r(\dot\theta\bar\mu+\dot\varphi\sin\theta\,\bar n)+\\&+(\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)\bar\mu+r\dot\theta(-\dot\theta\bar\rho+\dot\varphi\cos\theta\,\bar n)+[\dot r\dot\varphi\sin\theta+r\ddot\varphi\sin\theta+\\&+r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta]\bar n-r\dot\varphi\sin\theta[\dot\varphi\sin\theta\,\bar\rho+\dot\varphi\cos\theta\,\bar\mu]=[\ddot r-r\dot\theta^2-\\&-r\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2]\bar\rho+[2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2\dot\theta\dot\varphi r\cos\theta+r\ddot\varphi\sin\theta]\bar n+\\&+[2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta]\bar\mu.\end{aligned}\tag{12.31}$$

Rezultă următoarele componente pentru viteză și accelerație:

$$\begin{gathered}v_\rho=\dot r,\ v_\mu=r\dot\theta,\ v_n=r\sin\theta\dot\varphi,\\ a_\rho=\ddot r-r\dot\theta^2-r\sin^2\theta\cdot\dot\varphi^2,\quad a_\mu=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2,\\ a_n=r\sin\theta\cdot\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2\dot\theta\dot\varphi r\cos\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot\varphi).\end{gathered}\tag{12.32}$$

§ 12. **Componentele vitezei și accelerației pe axele triedrului lui Frenet** (fig. 12.8). Se presupune că este cunoscută traiectoria prin ecuația

$$\bar r=\bar r(s)\tag{12.33}$$

unde s este arcul de curbă, măsurat de la un anumit punct M_0, al curbei, considerat ca origine a arcelor. În acest caz s-a arătat că mişcarea este definită printr-o singură funcţie scalară

$$s=s(t). \qquad (12.34)$$

Ecuaţia (12.34) este *ecuaţia orară a mişcării*. Se consideră un triedru mobil, cu originea în M, avînd ca axe tangenta la curbă, orientată de versorul $\bar{\tau}$, normala principală orientată de versorul $\bar{\nu}$ şi binormala orientată de versorul $\bar{\beta}$ (triedrul lui Frenet sau triedrul natural).

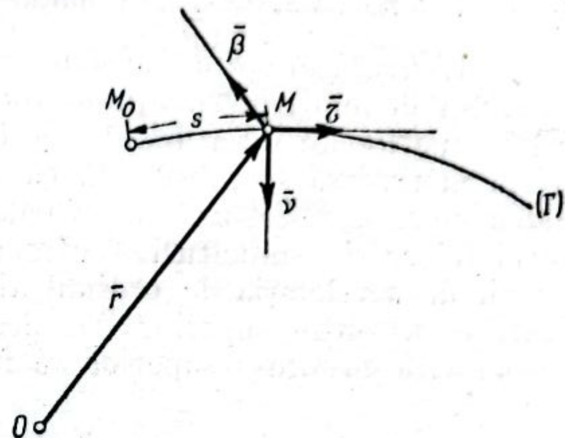


Fig. 12.8

Folosind ecuaţia parametrică a traiectoriei (12.33) şi ecuaţia orară (12.34) se determină componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet, ţinîndu-se seama de definiţiile generale ale acestor vectori

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}=\frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\dot{s}\bar{\tau}, \qquad (12.35)$$

căci $\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{\tau}$[(v. cap. I, § 29)]. Mai departe

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\ddot{s}\bar{\tau}+\dot{s}\dot{\bar{\tau}}.$$

Dar

$$\dot{\bar{\tau}}=\frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{\dot{s}}{\rho}\bar{\nu},$$

căci $\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\bar{\nu}$ [prima formulă a lui Frenet, v. cap.I. formula (1.86)].
Rezultă

$$\bar{a}=\ddot{s}\bar{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{\nu}. \qquad (12.36)$$

Din formulele (12.35) şi (12.36) rezultă componentele vitezei şi acceleraţiei pe axele triedrului lui Frenet

$$\left.\begin{array}{lll} v_\tau=\dot{s}=v, & v_\nu=0, & v_\beta=0 \\ a_\tau=\ddot{s}=\dot{v}, & a_\nu=\frac{\dot{s}^2}{\rho}=\frac{v^2}{\rho}, & a_\beta=0. \end{array}\right\} \qquad (12.37)$$

Rezultă că viteza este tangentă la traiectorie în M, iar acceleraţia este conţinută în planul osculator la traiectorie în punctul M. Componenta a_τ a acceleraţiei se numeşte *acceleraţie tangenţială*, iar a_ν *acceleraţie normală*.

Observaţii. 1°. Dacă într-un anumit interval de timp $a_\tau=0$, rezultă $v=$const şi mişcarea curbilinie se numeşte *uniformă*.

2°. Dacă a_τ şi v au acelaşi semn, viteza creşte în valoare absolută şi mişcarea se numeşte *accelerată*. Dacă a_τ şi v au semne contrarii mişcarea se numeşte *întîrziată* (decelerată).

3°. Dacă a_τ = const. mişcarea se numeşte *uniform variată*, ea putînd fi *uniform accelerată* dacă a_τ şi v sînt de acelaşi semn şi *uniform întîrziată* dacă a_τ şi v sînt de semne contrarii.

4°. Scalarul accelerației normale, a_ν fiind în general pozitiv, accelerația normală are sensul versorului $\bar{\nu}$, adică este dirijată către centrul de curbură (este centripetă).

5°. Accelerația normală poate fi nulă (exceptînd cazul $v=0$), cînd $\frac{1}{\rho}=0$, adică în punctele de inflexiune ale traiectoriei, sau în cazul cînd traiectoria este o linie dreaptă.

6°. Singura mişcare în care *accelerația este nulă*, este mişcarea rectilinie şi uniformă, căci din $\bar{a}=0$ rezultă $a_\nu=0$ şi $a_\tau=0$, adică $\frac{1}{\rho}=0$ şi $v=$ const.

Accelerație de ordinul al doilea. Derivînd expresia accelerației se obține un vector denumit *accelerație de ordinul al doilea*. Deşi această accelerație de ordin superior nu intervine direct în ecuațiile fundamentale ale dinamicii, există motive să se presupună că anumite mărimi fizice care intervin în fenomene ce se desfăşoară cu o variație foarte rapidă, în timp, a intensității forței (ciocniri, smucituri, cutremure etc.) se pot exprima nemijlocit în funcție de accelerația de ordinul al doilea şi în general în funcție de accelerațiile de ordin superior. De aceea accelerația de ordinul al doilea şi accelerațiile de ordin superior au format obiectul a numeroase studii teoretice [1].

Cu notațiile de mai înainte avem

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\dot{v}\bar{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\bar{\nu}\right]=\ddot{v}\bar{\tau}+\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\rho}\right)\cdot\bar{\nu}+\dot{v}\dot{\bar{\tau}}+\frac{v^2}{\rho}\dot{\bar{\nu}}.$$

Dar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\rho}\right)=\frac{2v\dot{v}}{\rho}-\frac{v^2}{\rho^2}\cdot\dot{\rho}=\frac{2v\dot{v}}{\rho}-\frac{v^2}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{2v\dot{v}}{\rho}-\frac{v^3}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{ds}.$$

În baza formulelor lui Frenet

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\bar{\nu} \quad \text{şi} \quad \frac{d\bar{\nu}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\bar{\tau}+\frac{1}{\rho_t}\cdot\bar{\beta},$$

unde ρ_t este raza de torsiune, avem

$$\dot{\bar{\tau}}=\frac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{v}{\rho}\bar{\nu}, \qquad \dot{\bar{\nu}}=\frac{d\bar{\nu}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=-\frac{v}{\rho}\bar{\tau}+\frac{v}{\rho_t}\bar{\beta}.$$

Rezultă atunci

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\ddot{v}\bar{\tau}+\left(\frac{2v\dot{v}}{\rho}-\frac{v^3}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{ds}\right)\bar{\nu}+\frac{v\dot{v}}{\rho}\bar{\nu}-\frac{v^3}{\rho^2}\bar{\tau}+\frac{v^3}{\rho\rho_t}\bar{\beta}.$$

Grupînd termenii găsim

$$\frac{d\bar{a}}{dt}=\left(\ddot{v}-\frac{v^3}{\rho^2}\right)\bar{\tau}+\left(\frac{3v\dot{v}}{\rho}-\frac{v^3}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{ds}\right)\bar{\nu}+\frac{v^3}{\rho\rho_t}\cdot\bar{\beta}.$$

Accelerația de ordinul al doilea, are deci, în cazul general, componente diferite de zero, pe toate axele triedrului lui Frenet.

---

[1] *A. A. Beleş*, La notion de secousse et son rôle dans la dynamique (Bulletin de Mathématique et de Physique pures et appliquées de l'école Polytehnique de Bucarest, Nr. 1, 2, 3, 1936–1937, Anul VIII).

C. MIŞCĂRI PARTICULARE ALE PUNCTULUI

§ 13. Mişcarea rectilinie uniformă. Se numeşte mişcare rectilinie uniformă o mişcare a cărei traiectorie este o linie dreaptă şi a cărei viteză este constantă.

Pentru uşurinţa studiului se presupune că mişcarea are loc pe axa Ox a unui triedru cartezian. Datele problemei sînt

$$v_x=C_1, \quad y=0, \quad z=0.$$

Ţinînd seama că $v_x=\dot{x}$ rezultă $\dot{x}=C_1$ şi, prin integrare

$$x=C_1 t+C_2.$$

Constanta C_1 reprezintă viteza v a mobilului la un moment dat. Constanta C_2 reprezintă abscisa punctului la momentul iniţial ($t=0$). Convenim s-o numim *spaţiu iniţial* şi o notăm cu x_0. Ecuaţia mişcării rectilinii uniforme devine

$$x=vt+x_0. \tag{12.38}$$

Aceasta este forma cea mai generală a unei mişcări rectilinii uniforme pe axa Ox. Dacă se calculează acceleraţia, se găseşte $\ddot{x}=0$.

Se poate arăta, reciproc, că singura mişcare pentru care $\bar{a}=0$ este mişcarea rectilinie şi uniformă. Într-adevăr, proiectînd relaţia $\bar{a}=0$ pe axele unui triedru cartezian se obţine

$$\ddot{x}=0, \quad \ddot{y}=0, \quad \ddot{z}=0,$$

din care se deduc prin integrare

$$x=at+x_0, \quad y=bt+y_0\ , \quad z=ct+z_0,$$

unde a, b, c, x_0, y_0, z_0 sînt şase constante de integrare. Eliminînd timpul între aceste ecuaţii parametrice se obţine

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

adică ecuaţia unei drepte. Componentele vitezei vor fi

$$v_x=a, \quad v_y=b, \quad v_z=c.$$

Rezultă

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\text{const}$$

(vezi şi observaţia 6° de la § 12).

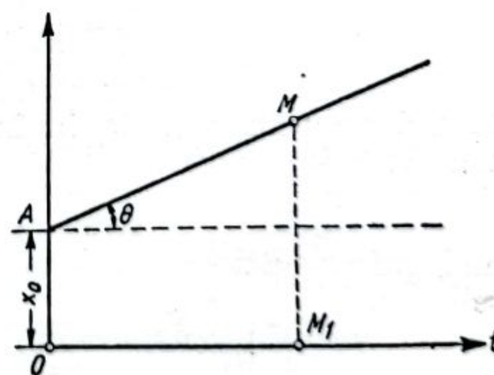


Fig. 12.9

Diagrama mişcării. În fig. 12.9 s-a reprezentat grafic mişcarea rectilinie şi uniformă pe axa Ox. În abscisă s-a înscris timpul t iar în ordonată spaţiul x. Diagrama este o linie dreaptă. Ordonata la origine reprezintă spaţiul iniţial x_0. Dacă timpul a fost reprezentat la scara $1/m$, iar spaţiile x la scara $1/n$ atunci scalarul vitezei v se poate obţine cu formula

$$v=\frac{n}{m}\operatorname{tg}\theta.$$

§ 14. **Mişcarea rectilinie uniform variată.** Se numeşte mişcare rectilinie uniform variată o mişcare a cărei traiectorie este o linie dreaptă şi a cărei acceleraţie este constantă. Vom considera că mişcarea are loc pe axa Ox a unui triedru cartezian. Din definiţia mişcării rezultă

$$a_x=a, \quad y=0, \quad z=0.$$

Cum $a_x=\ddot{x}$ rezultă $\ddot{x}=a$ şi, integrînd succesiv

$$\dot{x}=at+C_1, \quad x=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2.$$

Semnificaţia fizică a constantelor de integrare C_1 şi C_2 se obţine dacă se înlocuieşte în expresiile vitezei $\dot{x}$ şi spaţiului x, valoarea timpului t, cu 0. Obţinem $\dot{x}(0)=C_1$ şi $x(0)=C_2$. Deci constantele C_1 şi C_2 reprezintă respectiv viteza şi abscisa mobilului în momentul iniţial. Se vor nota $C_1=v_0$ şi $C_2=x_0$. Atunci legea spaţiilor şi a vitezelor în mişcarea uniform variată vor căpăta formele

$$x=\frac{a}{2}t^2+v_0t+x_0, \quad v=at+v_0. \tag{12.39}$$

În aplicaţii este uneori util să se exprime viteza v a mobilului în funcţie de abscisa x. Eliminînd timpul t între relaţiile (12.39), se obţine

$$t=\frac{v-v_0}{a} \text{ apoi } x=\frac{a}{2}\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2+v_0\frac{v-v_0}{a}+x_0$$

şi efectuînd toate calculele,

$$v=\sqrt{v_0^2+2a(x-x_0)}. \tag{12.40}$$

Această formulă este cunoscută sub numele de *formula lui Torricelli*. Cînd mobilul pleacă din origine fără viteză iniţială ($x_0=0$, $v_0=0$)

$$v=\sqrt{2ax}.$$

În cazul particular al unui punct material greu, lăsat liber să cadă în vid pe verticală, de la înălţimea h, viteza cu care atinge pămîntul este dată de expresia

$$v=\sqrt{2gh},$$

unde prin g s-a notat acceleraţia gravitaţiei (la Bucureşti $g=9{,}8053\ \text{m/s}^2\approx\approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$).

Se deosebesc două feluri de mişcări rectilinii uniform variate: accelerate şi întîrziate.

O mişcare uniform variată este *accelerată*, într-un interval de timp, dacă, în acel interval viteza şi acceleraţia au acelaşi sens şi este *întîrziată*, dacă viteza şi acceleraţia au sensuri opuse.

Este posibil ca o mişcare uniform variată să aibă ambele faze, accelerată şi întîrziată, sau numai una dintre ele. De exemplu un punct material greu, lăsat liber să cadă pe verticală sau aruncat cu o viteză iniţială descendentă, are o mişcare uniform accelerată, deoarece în tot timpul mişcării viteza şi acceleraţia au acelaşi sens (descendent).

În cazul unui mobil, care frînează, mişcarea este definită din momentul $t=0$ pînă în momentul cînd se opreşte. În tot timpul mişcării, acceleraţia (presupusă constantă) este dirijată în sens invers vitezei, deci mişcarea este întîrziată.

În sfîrşit, în cazul unui punct material greu aruncat pe verticală în sus, mişcarea este întîrziată pînă în momentul cînd este atinsă înălţimea maximă, iar după aceea este accelerată.

Diagrama mişcării. În fig. 12.10 s-a reprezentat diagrama unei mişcări uniform variate. Diagrama este o parabolă. Ordonata la origine este spaţiul iniţial. Dacă $1/m$ este scara timpurilor şi $1/n$ este scara spaţiilor x, iar θ_0 este unghiul dintre tangenta la parabolă în A_0 şi axa Ot, avem

$$v_0=\frac{n}{m}\ \mathrm{tg}\ \theta_0.$$

Iar într-un punct oarecare A, viteza este dată de

$$v=\frac{n}{m}\ \mathrm{tg}\ \theta,$$

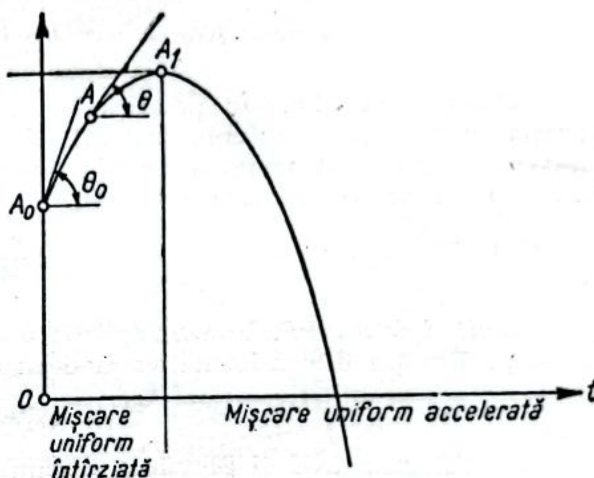


Fig. 12.10

unde θ este unghiul dintre tangenta la diagramă în A şi axa Ot. Se observă că unghiul θ descreşte din A în A_1 apoi devine obtuz. Rezultă că viteza descreşte din A_0 în A_1 apoi îşi schimbă sensul şi creşte în valoare absolută.

§ 15. **Mişcarea circulară**. a) *Mişcare circulară uniformă*. Se numeşte mişcare circulară uniformă mişcarea a cărei traiectorie este un cerc şi în care modulul vitezei este constant.

Să presupunem că mobilul se găsea în momentul iniţial în A şi la un moment dat se află în M (fig. 12.11, *a*). Mişcarea fiind uniformă, arcul AM

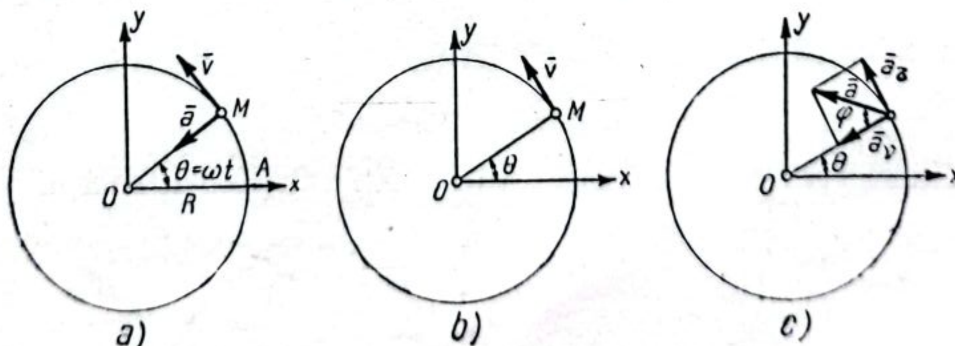


Fig. 12.11

şi unghiul θ descris de raza OM cresc proporţional cu timpul t. Se numeşte *viteză unghiulară* ω unghiul descris de raza vectoare în unitatea de timp. Rezultă

$$\theta=\omega t. \qquad (12.41)$$

Viteza şi acceleraţia mişcării se determină calculînd proiecţiile pe axele triedrului lui Frenet. Ecuaţia orară este

$$s=AM=R\theta=R\omega t. \qquad (12.42)$$

Folosind expresiile (12.37) în cazul mişcării circulare uniforme, se găseşte

$$v=\dot{s}=R\omega, \quad a_\tau=\ddot{s}=0, \quad a_\nu=\frac{\dot{s}^2}{\rho}=\frac{R^2\omega^2}{R}=R\omega^2. \qquad (12.43)$$

O b s e r v a ţ i e. În practică se cunoaşte de obicei numărul de rotaţii pe minut (turaţia) n pe care le execută punctul M. În acest caz viteza unghiulară ω se calculează observînd că în timp de un minut unghiul descris de raza OM este $2\,n$. În timp de o secundă raza OM va descrie un unghi

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{n\pi}{30}. \qquad (12.44)$$

Unităţi de măsură. Viteza unghiulară se exprimă prin numărul de radiani pe unitatea de timp. Ecuaţia dimensională va fi deci:

$$[\omega]=T^{-1}.$$

În sistemele CGS şi SI viteza unghiulară se exprimă în radiani pe secundă.

b) *Mişcarea circulară neuniformă.* În cazul mişcării circulare neuniforme unghiul θ este o funcţie oarecare de timpul t. Prin analogie cu viteza şi acceleraţia în mişcarea rectilinie, viteza şi acceleraţia unghiulară se definesc prin relaţiile

$$\omega=\dot{\theta} \text{ şi } \dot{\omega}=\ddot{\theta}. \qquad (12.45)$$

Ecuaţia orară a mişcării este

$$s=AM=R\theta. \qquad (12.46)$$

Folosind expresiile (12.37), în cazul mişcării circulare neuniforme se găseşte

$$v=\dot{s}=R\dot{\theta}=R\omega, \; a_\tau=\ddot{s}=R\ddot{\theta}=R\dot{\omega}, \; a_\nu=\frac{\dot{s}^2}{\rho}=\frac{R^2\omega^2}{R}=R\omega^2. \qquad (12.47)$$

Modulul acceleraţiei va fi

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_\nu^2}=R\sqrt{\dot{\omega}^2+\omega^4}. \qquad (12.48)$$

Unghiul dintre vectorul acceleraţie şi raza OM este dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_\tau}{a_\nu}=\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \qquad (12.49)$$

În fig. 12.11, *b* şi *c* s-au desenat vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{a}$ în cazul unei mişcări circulare neuniforme.

O b s e r v a ţ i e. Sensul indicat în fig. 12.11, *b*, pentru vectorul $\bar{v}$ corespunde cazului în care $\omega>0$. În cazul $\omega<0$ sensul se schimbă. De asemenea sensul indicat în fig. 12.11, *c* pentru acceleraţia tangenţială a_τ corespunde cazului $\dot{\omega}>0$. În cazul $\dot{\omega}<0$ sensul se schimbă. Acceleraţia normală a_ν are întotdeauna sensul indicat în fig. 12.11, *c*, adică este centripetă.

Aplicaţii. 1°. *Mişcarea pe cicloidă.* Să se studieze mişcarea unui punct de pe periferia unei roţi de rază R (situată într-un plan vertical), care se rostogoleşte fără să alunece pe un plan orizontal, ştiind că centrul roţii se deplasează uniform cu viteza v_0 (fig. 12.12).

Rezolvare. Condiţia de rostogolire fără alunecare conduce la egalitatea

$$\overline{OA} = \text{arc } \widehat{AM}.$$

Dar $\overline{OA} = v_0 t$ iar

$$\text{arc } \widehat{AM} = R\theta.$$

Rezultă

$$v_0 t = R\theta$$

de unde

$$\theta = \frac{v_0}{R} t = \omega t.$$

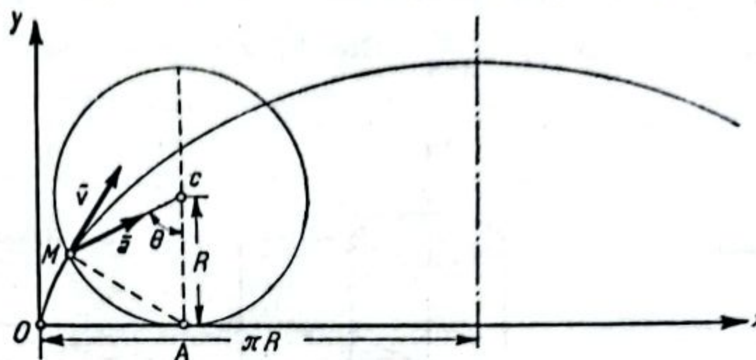


Fig. 12.12

Coordonatele punctului M, în funcţie de unghiul θ, vor fi

$$x = R\theta - R\sin\theta, \qquad y = R - R\cos\theta.$$

Din geometria analitică se ştie că aceste ecuaţii definesc parametric o *cicloidă*. Înlocuind $\theta = \omega t$, se obţine

$$x = R(\omega t - \sin\omega t), \qquad y = R(1 - \cos\omega t).$$

Componentele vitezei şi acceleraţiei sînt

$$v_x = \dot{x} = R\omega(1 - \cos\omega t), \qquad v_y = \dot{y} = R\omega\sin\omega t,$$
$$a_x = \ddot{x} = R\omega^2\sin\omega t, \qquad a_y = \ddot{y} = R\omega^2\cos\omega t.$$

Se pot arăta unele proprietăţi interesante ale vectorilor $\bar{v}$ şi $\bar{a}$. Astfel vectorul $\bar{v}$ este normal pe vectorul $\overline{AM}$ şi egal în modul cu $AM\omega$, iar vectorul acceleraţie are direcţia razei $\overline{MC}$ şi este egal în modul cu $MC\omega^2$.

Într-adevăr $\overline{AM} = -R\sin\omega t\bar{i} + R(1-\cos\omega t)\bar{j}$ şi $\bar{v} = R\omega(1-\cos\omega t)\bar{i} + R\omega\sin\omega t\bar{j}$. Considerăm produsul scalar

$\overline{AM}\cdot\bar{v} = -R^2\omega\sin\omega t(1-\cos\omega t) + R^2\omega(1-\cos\omega t)\sin\omega t \equiv 0$, deci $\overline{AM}$ şi $\bar{v}$ sînt ortogonali. Apoi

$$|\bar{v}| = \sqrt{R^2\omega^2(1-\cos\omega t)^2 + R^2\omega^2\sin^2\omega t} = R\omega\sqrt{(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t},$$

$$|\overline{AM}| = \sqrt{R^2\sin^2\omega t + R^2(1-\cos\omega t)^2} = R\sqrt{\sin^2\omega t + (1-\cos\omega t)^2}.$$

Rezultă

$$|\bar{v}| = |\overline{AM}|\omega.$$

Vectorul $\bar{a}$ se scrie $\bar{a} = R\omega^2\sin\omega t\bar{i} + R\omega^2\cos\omega t\bar{j}$. Vectorul $\overline{MC}$ se scrie $\overline{MC} = R\sin\omega t\bar{i} + R\cos\omega t\bar{j}$. Rezultă că proiecţiile celor doi vectori sînt proporţionale, deci vectorii $\bar{a}$ şi $\overline{MC}$ sînt coliniari. Factorul de proporţionalitate fiind ω^2 rezultă $|\bar{a}| = |\overline{MC}|\omega^2$.

Aceste proprietăţi arată că, în ceea ce priveşte vitezele, un punct de pe periferia unei roţi se comportă ca şi cînd s-ar roti uniform cu viteza unghiulară ω în jurul punctului A, iar în ceea ce priveşte acceleraţiile, ca şi cînd s-ar roti în jurul punctului C.

2°. *Mişcarea uniformă pe elice.* Se consideră un mobil care se deplasează uniform pe o elice de pas p, situată pe un cilindru de rază R (fig. 12.13). Desfăşurînd cilindrul, se observă că dacă mişcarea este uniformă, deci arcul de elice A_0A creşte proporţional cu timpul, atunci şi arcul de cerc A_0A_1 şi unghiul $\theta=\widehat{A_0OA_1}$ cresc proporţional cu timpul. Dacă se notează $\theta=\omega t$, atunci $x=R\cos\omega t$, $y=R\sin\omega t$. Cota $z=A_1A$ se determină din asemănarea a două triunghiuri $\frac{z}{p}=\frac{R\omega t}{2\pi R}$. Rezultă $z=\frac{p\omega}{2\pi}t$.

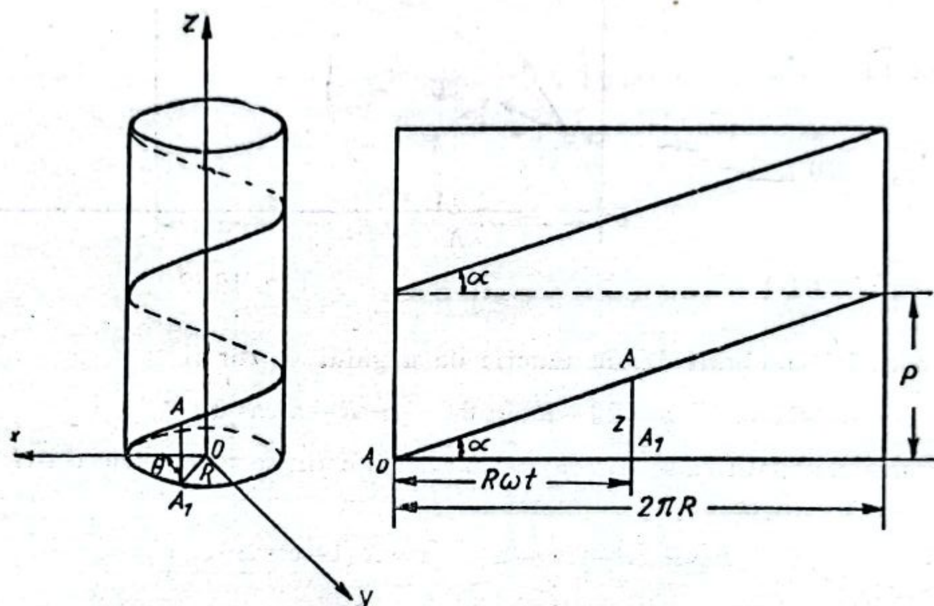


Fig. 12.13

Proiecţiile vitezei sînt

$$v_x=\dot{x}=-R\omega\sin\omega t,\quad v_y=\dot{y}=R\omega\cos\omega t,\quad v_z=\dot{z}=\frac{p\omega}{2\pi}.$$

Modulul vitezei este

$$|\overline{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\omega\sqrt{R^2+\frac{p^2}{4\pi^2}}.$$

Proiecţiile acceleraţiei sînt

$$a_x=\ddot{x}=-R\omega^2\cos\omega t,\quad a_y=\ddot{y}=-R\omega^2\sin\omega t,\quad a_z=\ddot{z}=0.$$

Modulul acceleraţiei este

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=R\omega^2.$$

O b s e r v a ţ i e. Pe baza acestor rezultate se poate calcula raza de curbură a elicei. Într-adevăr, deoarece mişcarea pe elice este uniformă, rezultă că acceleraţia se reduce la componenta normală $a=a_\nu=\frac{v^2}{\rho}$. Ţinînd seama de expresiile găsite pentru v şi a rezultă

$$\frac{\omega^2\left(R^2+\frac{p^2}{4\pi^2}\right)}{\rho}=R\omega^2,\quad \text{de unde}\quad \rho=R+\frac{p^2}{4\pi^2R}.$$

c) *Determinarea razei de curbură a traiectoriei în cazul general.* Să considerăm mişcarea definită prin vectorul $\overline{r}=\overline{r}(t)$. Rezultă $\overline{v}=\dot{\overline{r}}$, $\overline{a}=\ddot{\overline{r}}$. Dar $\overline{v}=v\overline{\tau}$ şi $\overline{a}=a_\tau\overline{\tau}+a_\nu\overline{\nu}$. Atunci $\overline{v}\times\overline{a}=va_\nu\overline{\tau}\times\overline{\nu}=v\frac{v^2}{\rho}\overline{\beta}$.

Rezultă $|\bar{v}\times\bar{a}|=\frac{v^3}{\rho}$, de unde $\rho=\frac{v^3}{|\bar{v}\times\bar{a}|}$.

Folosind coordonatele carteziene, obţinem

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}{[(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2]^{1/2}}.$$

Se regăseşte astfel cunoscuta formulă din geometria diferenţială.

XIII. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

A. GENERALITĂŢI

§ 1. **Generalităţi.** A cunoaşte mişcarea unui solid rigid echivalează cu a găsi expresiile generale pentru vectorul de poziţie, viteza şi acceleraţia unui punct oarecare al rigidului faţă de un reper care se consideră, în mod convenţional, fix.

Fie $T_1(O_1x_1y_1z_1)$ un triedru cartezian fix şi $T(Oxyz)$ un triedru solidar cu rigidul, deci în mişcare faţă de triedrul fix (fig. 13.1).

Poziţia unui punct oarecare A al rigidului se defineşte în raport cu triedrul mobil prin vectorul de poziţie $\bar{r}$, respectiv prin coordonatele x, y, z ale punctului în raport cu T. *Aceste coordonate rămîn evident constante în timpul mişcării.*

Poziţia triedrului mobil T faţă de triedrul fix T_1 se caracterizează prin vectorul de poziţie $\bar{r}_0=\bar{r}_0(t)$ al originii triedrului mobil şi prin versorii $\bar{i}=\bar{i}(t)$, $\bar{j}=\bar{j}(t)$ şi $\bar{k}=\bar{k}(t)$ ai axelor Ox, Oy şi Oz. (Cunoaşterea acestor patru funcţii vectoriale echivalează cu cunoaşterea coordonatelor punctului O şi a cosinusurilor directoare ale axelor mobile faţă de axele triedrului fix, ca funcţii scalare de timp).

Poziţia punctului A faţă de triedrul fix se defineşte prin vectorul de poziţie $\bar{r}_1=\bar{r}_1(t)$.

Între vectorii $\bar{r}_1$, $\bar{r}$ şi $\bar{r}_0$ există relaţia:

$$\bar{r}_1=\bar{r}_0+\bar{r}, \tag{13.1}$$

sau, punînd în evidenţă coordonatele x, y, z ale punctului A faţă de triedrul mobil

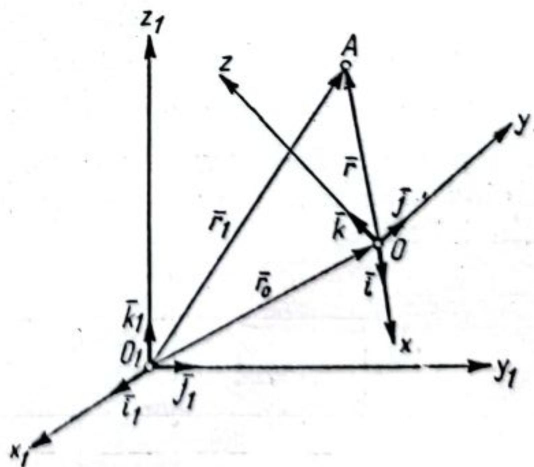


Fig. 13.1

$$\bar{r}_1=\bar{r}_0+x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}. \tag{13.2}$$

Relativ la funcţiile vectoriale $\bar{r}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$, se observă că în timp ce $\bar{r}_0$ este supusă la puţine restricţii (continuitate, uniformitate, derivabilitate

de două ori), funcțiile $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$, reprezentînd versorii axelor unui triedru ortogonal trebuie să aibă modulul egal cu unitatea și să fie ortogonale, două cîte două.

Aceste condiții se exprimă prin relațiile

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=1,\quad \bar{j}\cdot\bar{j}=1,\quad \bar{k}\cdot\bar{k}=1,$$

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=0,\quad \bar{j}\cdot\bar{k}=0,\quad \bar{k}\cdot\bar{i}=0. \tag{13.3}$$

Relațiile (13.3) permit să fie redus numărul parametrilor cinematici care caracterizează mișcarea unui rigid.

§ 2. **Distribuția vitezelor într-un rigid.** Viteza punctului A al rigidului în raport cu triedrul fix T_1 se obține prin derivarea relației (13.2) în raport cu timpul

$$\bar{v}=\dot{\bar{r}}_1=\dot{\bar{r}}_0+x\dot{\bar{i}}+y\dot{\bar{j}}+z\dot{\bar{k}}. \tag{13.4}$$

În această derivare s-au considerat constante coordonatele x, y, z, deoarece triedrul mobil este solidar cu rigidul și deci poziția punctului A nu se schimbă față de $Oxyz$. Derivata $\dot{\bar{r}}_0$ reprezintă viteza originii O, a triedrului mobil. Pentru a găsi o semnificație a celorlalți termeni din (13.4), se derivează relațiile (13.3) în raport cu timpul. Se obține

$$2\bar{i}\dot{\bar{i}}=0,\quad 2\bar{j}\dot{\bar{j}}=0,\quad 2\bar{k}\dot{\bar{k}}=0$$

$$\dot{\bar{i}}\bar{j}+\bar{i}\dot{\bar{j}}=0,\quad \dot{\bar{j}}\bar{k}+\bar{j}\dot{\bar{k}}=0,\quad \dot{\bar{k}}\bar{i}+\bar{k}\dot{\bar{i}}=0. \tag{13.5}$$

Să notăm

$$\dot{\bar{j}}\bar{k}=-\bar{j}\dot{\bar{k}}=\omega_x,\quad \dot{\bar{k}}\bar{i}=-\bar{k}\dot{\bar{i}}=\omega_y,\quad \dot{\bar{i}}\bar{j}=-\bar{i}\dot{\bar{j}}=\omega_z. \tag{13.6}$$

Ținînd seama că proiecția unui vector pe o axă este egală cu produsul scalar dintre vector și versorul axei, se găsesc pentru proiecțiile vectorilor $\dot{\bar{i}}$, $\dot{\bar{j}}$ și $\dot{\bar{k}}$ pe axele Ox, Oy și Oz valorile din tabela 8 de mai jos. La fel, ținînd seama de (13.5) și de (13.6) rezultă pentru aceste proiecții valorile din tabela 9.

Tabela 8

	Ox	Oy	Oz
$\dot{\bar{i}}$	$\dot{\bar{i}}\,\bar{i}$	$\dot{\bar{i}}\,\bar{j}$	$\dot{\bar{i}}\,\bar{k}$
$\dot{\bar{j}}$	$\dot{\bar{j}}\,\bar{i}$	$\dot{\bar{j}}\,\bar{j}$	$\dot{\bar{j}}\,\bar{k}$
$\dot{\bar{k}}$	$\dot{\bar{k}}\,\bar{i}$	$\dot{\bar{k}}\,\bar{j}$	$\dot{\bar{k}}\,\bar{k}$

Tabela 9

	Ox	Oy	Oz
$\dot{\bar{i}}$	0	ω_z	$-\omega_y$
$\dot{\bar{j}}$	$-\omega_z$	0	ω_x
$\dot{\bar{k}}$	ω_y	$-\omega_x$	0

Atunci

$$\dot{\bar{r}}=x\dot{\bar{i}}+y\dot{\bar{j}}+z\dot{\bar{k}}=x(\omega_z\bar{j}-\omega_y\bar{k})+y(-\omega_z\bar{i}+\omega_x\bar{k})+z(\omega_y\bar{i}-\omega_x\bar{j})=$$
$$=\bar{i}(\omega_y z-\omega_z y)+\bar{j}(\omega_z x-\omega_x z)+\bar{k}(\omega_x y-\omega_y x).$$

Sub această formă se recunoaşte că expresia derivatei vectorului de poziţie este un produs vectorial dintre un vector $\bar{\omega}$, ale cărui proiecţii ar fi ω_x, ω_y şi ω_z şi vectorul de poziţie, ale cărui proiecţii sînt x, y şi z.

În definitiv se poate scrie

$$\dot{\bar{r}}=\bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{13.7}$$

Înlocuind acest rezultat în (13.4), pentru viteza unui punct oarecare al rigidului se obţine următoarea expresie

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}. \tag{13.8}$$

Se observă că distribuţia vitezelor într-un rigid este definită de două funcţii vectoriale: $\bar{v}_0=\bar{v}_0(t)$, care reprezintă viteza originii triedrului mobil şi $\bar{\omega}=\bar{\omega}(t)$, un vector a cărui semnificaţie se va vedea mai tîrziu şi ale cărui componente ω_x, ω_y, ω_z pe axele triedrului mobil sînt date de relaţiile (13.6).

Proiecţiile pe axe ale vitezei $\bar{v}$ sînt

$$\begin{aligned} v_x&=v_{Ox}+\omega_y z-\omega_z y\\ v_y&=v_{Oy}+\omega_z x-\omega_x z\\ v_z&=v_{Oz}+\omega_x y-\omega_y x. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Observaţie. Uneori componentele vectorului $\bar{\omega}$ se notează

$$\omega_x=p,\quad \omega_y=q,\quad \omega_z=r.$$

§ 3. **Distribuţia acceleraţiilor într-un rigid.** Derivînd relaţia (13.8) în raport cu timpul, se obţine

$$\dot{\bar{v}}=\dot{\bar{v}}_0+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times\dot{\bar{r}}.$$

Ţinînd seama că $\dot{\bar{v}}=\bar{a}$, $\dot{\bar{v}}_0=a_0$, iar $\dot{\bar{r}}=\bar{\omega}\times\bar{r}$(13.7), rezultă următoarea lege de distribuţie a acceleraţiilor într-un rigid

$$\bar{a}=\bar{a}_0+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}). \tag{13.10}$$

Proiecţiile acceleraţiei $\bar{a}$ pe axe sînt

$$\begin{aligned} a_x&=a_{Ox}-(\omega_y^2+\omega_z^2)x+(\omega_x\omega_y-\dot{\omega}_z)y+(\omega_x\omega_z+\dot{\omega}_y)z,\\ a_y&=a_{Oy}-(\omega_z^2+\omega_x^2)y+(\omega_y\omega_z-\dot{\omega}_x)z+(\omega_y\omega_x+\dot{\omega}_z)x,\\ a_z&=a_{Oz}-(\omega_x^2+\omega_y^2)z+(\omega_z\omega_x-\dot{\omega}_y)x+(\omega_z\omega_y+\dot{\omega}_x)y. \end{aligned} \tag{13.11}$$

B. MIŞCĂRI PARTICULARE ALE RIGIDULUI

§ 4. Mişcarea de translaţie. Un solid rigid are o mişcare de translaţie dacă o dreaptă oarecare a rigidului rămîne în tot timpul mişcării paralelă cu ea însăşi.

Ca exemplu de mişcări de translaţie cităm:

a) *Translaţii rectilinii*: mişcarea sertarului mesei, mişcarea caroseriei unui vehicul care parcurge un drum rectiliniu, mişcarea unui ascensor, mişcarea unui piston în interiorul unui cilindru etc.

b) *Translaţii circulare*: mişcarea bielei de cuplare a două roţi ale căror axe sînt fixe, mişcarea unui scrînciob etc.

c) *Alte translaţii*: biela de cuplare a roţilor unei locomotive (un punct al bielei descrie o cicloidă scurtată) etc.

Într-o mişcare de translaţie, traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului sînt identice, ele putînd fi suprapuse printr-o translaţie geometrică. Această proprietate rezultă din relaţia

$$\bar{r}_1=\bar{r}_0+\bar{r}$$

dintre vectorii de poziţie $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_0$ ai punctelor A şi O (fig. 13.1). Se observă că, în cazul translaţiei, vectorul $\bar{r}$ este constant şi deci traiectoria punctului O poate fi făcută să coincidă cu traiectoria punctului A printr-o translaţie geometrică de vector $\bar{r}$.

Pentru ca orice dreaptă a rigidului să rămînă paralelă cu ea însăşi în timpul mişcării este suficient ca această condiţie să fie îndeplinită de axele Ox, Oy, Oz ale triedrului mobil.

Rezultă că versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ ai acestor axe trebuie să fie constanţi, atît ca mărime cît şi ca direcţie. Deci,

$$\dot{\bar{i}}=0,\quad \dot{\bar{j}}=0,\quad \dot{\bar{k}}=0.$$

Folosind formulele (13.6), deducem $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=0$, deci $\bar{\omega}=0$. Legea de distribuţie a vitezelor (13.8) se reduce la

$$\bar{v}=\bar{v}_0, \tag{13.12}$$

iar legea de distribuţie a acceleraţiilor (13.10) se reduce la

$$\bar{a}=\bar{a}_0. \tag{13.13}$$

Relaţiile (13.12) şi (13.13) arată că, *la un moment dat, toate punctele unui rigid, aflat în mişcare de translaţie, au aceeaşi viteză şi aceeaşi acceleraţie.*

Vectorii „viteză de translaţie" şi „acceleraţie de translaţie" sînt deci *vectori liberi*, ei putînd fi aplicaţi în orice punct al rigidului.

§ 5. Mişcarea de rotaţie. Un solid rigid are o mişcare de rotaţie, dacă în tot timpul mişcării două puncte, aparţinînd rigidului, rămîn fixe în spaţiu. Consideraţii geometrice elementare arată că toate punctele care aparţin dreptei ce uneşte cele două puncte fixe rămîn de asemenea fixe. Această dreaptă se numeşte *axă de rotaţie*.

Ca exemple de mişcări de rotaţie cităm: mişcarea unei roţi a cărei axă este fixată de batiul (elementul fix) unei maşini, mişcarea acelor unui ceasornic în raport cu cadranul, a unui pendul, mişcarea Pămîntului în jurul axei polilor, abstracţie făcînd de mişcarea lui în jurul Soarelui etc. ...

Pentru studiul mişcării vom considera un triedru mobil $Oxyz$, solidar cu rigidul, a cărui axă Oz coincide cu axa de rotaţie şi un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ a cărui origine O_1 coincide cu O şi a cărui axă Oz_1 coincide ca suport şi sens cu Oz (fig. 13.2). Dacă se notează cu θ unghiul axelor (O_1x_1, Ox), mişcarea rigidului este definită, dacă se cunoaşte funcţia scalară:

$$\theta=\theta(t).$$

Un rigid cu o axă fixă are deci un singur grad de libertate.

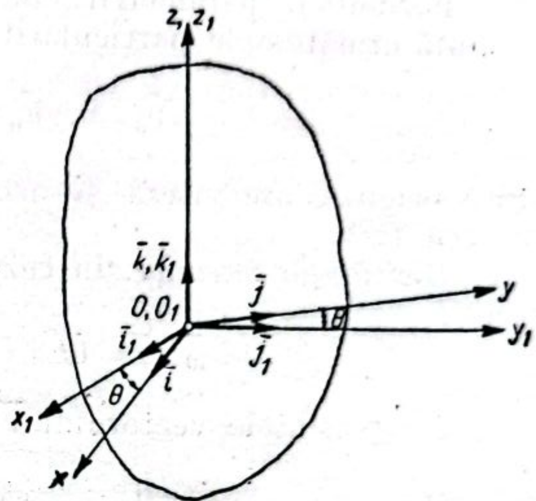


Fig. 13.2

Consideraţii geometrice elementare arată că traiectoriile diferitelor puncte ale rigidului sînt cercuri, situate în plane normale pe axa de rotaţie şi avînd centrul pe această axă. Punctele rigidului au deci mişcări circulare. Din cauza rigidităţii, aceste mişcări circulare nu sînt independente. Legătura dintre aceste mişcări va rezulta din studiul distribuţiei vitezelor şi acceleraţiilor. În acest scop, în formulele (13.8) şi (13.10) este necesar să se determine parametrii cinematici $\bar{v}_0$, $\bar{a}_0$, $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$. Din cauză că O este fix, rezultă $\bar{v}_0=0$ şi $\bar{a}_0=0$.

Pentru determinarea vectorului $\bar{\omega}$ se folosesc relaţiile (13.6). În cazul de faţă, proiectînd vectorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ şi $\bar{k}$ pe axele fixe, de versori $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$ şi $\bar{k}_1$, se obţine

$$\bar{i}=\cos\theta\,\bar{i}_1+\sin\theta\,\bar{j}_1,\quad \bar{j}=-\sin\theta\,\bar{i}_1+\cos\theta\,\bar{j}_1,\quad \bar{k}=\bar{k}_1.$$

Derivînd aceste relaţii

$$\dot{\bar{i}}=-\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{i}_1+\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{j}_1=\dot{\theta}\,\bar{j},\quad \dot{\bar{j}}=-\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{i}_1-\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{j}_1=-\dot{\theta}\,\bar{i},\quad \dot{\bar{k}}=0,$$

rezultă

$$\omega_x=\dot{\bar{j}}\bar{k}=-\bar{j}\dot{\bar{k}}=0;\quad \omega_y=\dot{\bar{k}}\bar{i}=-\bar{k}\dot{\bar{i}}=0,\quad \omega_z=\dot{\bar{i}}\bar{j}=-\bar{i}\dot{\bar{j}}=\dot{\theta}. \qquad (13.14)$$

Vectorul $\bar{\omega}$ este deci dirijat în sensul axei Oz şi are ca mărime viteza unghiulară $\dot{\theta}$. În cele ce urmează $\bar{\omega}$ se va numi *vectorul viteză unghiulară al mişcării de rotaţie.*

Pentru determinarea vectorului $\dot{\bar{\omega}}$ se derivează componentele vectorului $\bar{\omega}$. Rezultă

$$\dot{\omega}_x=0,\quad \dot{\omega}_y=0,\quad \dot{\omega}_z=\ddot{\theta}. \qquad (13.15)$$

Observație. Valorile găsite pentru componentele ω_x, ω_y, ω_z ale vectorului $\overline{\omega}$ rămîn valabile și în cazul mai general al mișcării unui rigid în care planul mobil xOy rămîne paralel cu un plan fix din spațiu (respectiv axa Oz a triedrului mobil are o direcție fixă).

În cele ce urmează, $\dot{\overline{\omega}}$ se va numi *vectorul accelerație unghiulară al mișcării* (notat uneori cu $\overline{\varepsilon}$).

Rezumînd, parametrii cinematici ai mișcării de rotație analizate prezintă următoarele particularități:

$$\overline{v}_0=0,\quad \overline{a}_0=0,\quad \overline{\omega}=\dot{\theta}\overline{k},\quad \dot{\overline{\omega}}=\ddot{\theta}\overline{k},$$

adică originea are viteza și accelerația zero, iar vectorii $\overline{\omega}$ și $\dot{\overline{\omega}}$ au o direcție fixă.

Distribuția vitezelor: în cazul mișcării de rotație, din formula (13.8) rezultă

$$\overline{v}=\overline{\omega}\times\overline{r}=\dot{\theta}\overline{k}\times(x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k})=-\dot{\theta}y\overline{i}+\dot{\theta}x\overline{j}.$$

Componentele vectorului $\overline{v}$ pe axele triedrului mobil sînt

$$v_x=-\dot{\theta}y=-\omega y,\qquad v_y=\dot{\theta}x=\omega x,\qquad v_z=0. \tag{13.16}$$

Din expresiile componentelor vitezei $\overline{v}$ pe axe, rezultă următoarele proprietăți ale cîmpului de viteze într-o mișcare de rotație:

a) Singurele puncte de viteză nulă sînt cele pentru care $x=0$ și $y=0$, adică punctele de pe axa de rotație Oz.

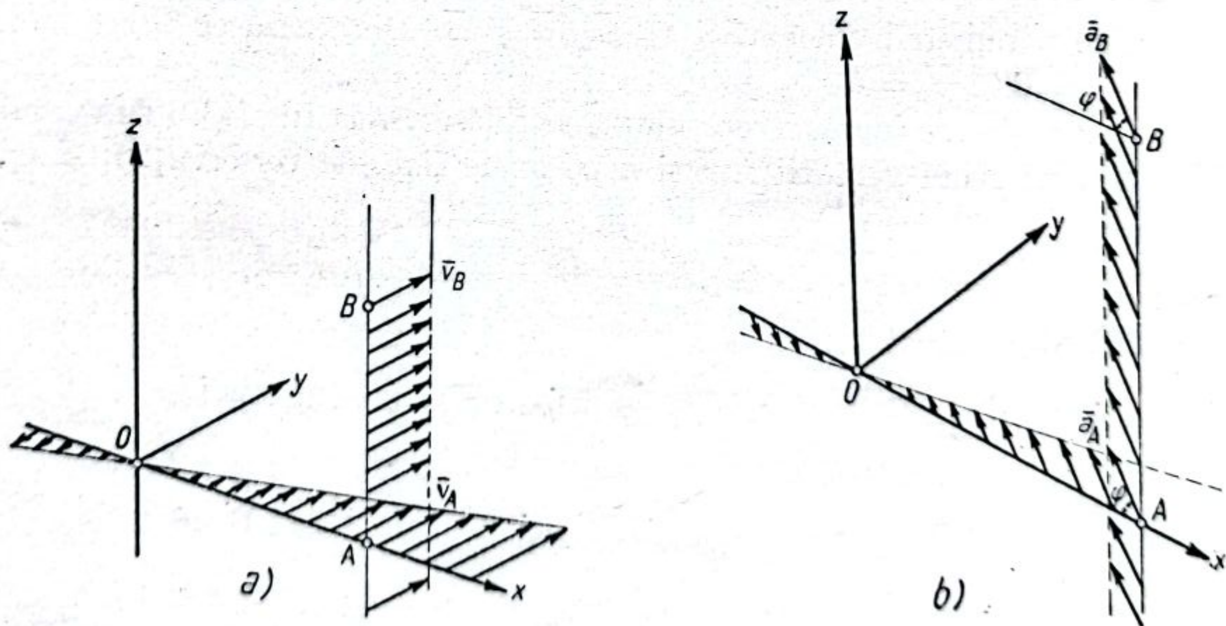


Fig. 13.3

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.3, *a*) paralelă cu axa de rotație, vitezele sînt aceleași, deoarece expresiile componentelor v_x, v_y și v_z nu conțin cota z.

c) Vitezele sînt conținute în plane normale pe axa de rotație Oz, deoarece $v_z=0$.

d) Pe o dreaptă OA ce întîlneşte axa de rotaţie sub un unghi drept, vitezele sînt normale la ea şi variază liniar, fiind proporţionale cu distanţa OA. Aceasta rezultă imediat dacă se consideră ca dreaptă OA, axa Ox, ceea ce nu particularizează poziţia ei, axa Ox putînd fi orice dreaptă ce întîlneşte axa sub un unghi drept. Rezultă atunci $v_x=0$, $v_y=\omega x$, $v_z=0$. Se recunoaşte aci formula $v=R\omega (R=x)$ stabilită în cazul mişcării circulare. Rezultă deci că *mişcările circulare ale diferitelor puncte ale rigidului se fac cu aceeaşi viteză unghiulară.*

Distribuţia acceleraţiilor: în cazul mişcării de rotaţie, din formula (13.10) rezultă

$$\bar{a}=\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=\ddot{\theta}\bar{k}\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})+\dot{\theta}\bar{k}\times(-\dot{\theta}y\bar{i}+\dot{\theta}x\bar{j})=$$
$$=(-y\ddot{\theta}-\dot{\theta}^2x)\bar{i}+(x\ddot{\theta}-y\dot{\theta}^2)\bar{j}=-(\dot{\omega}y+\omega^2x)\bar{i}+(\dot{\omega}x-\omega^2y)\bar{j}.$$

Rezultă următoarele componente ale vectorului $\bar{a}$ pe axele triedrului mobil:

$$a_x=-\dot{\omega}y-\omega^2x,\quad a_y=\dot{\omega}x-\omega^2y,\quad a_z=0. \tag{13.17}$$

Din expresiile componentelor acceleraţiei $\bar{a}$ pe axe, rezultă următoarele proprietăţi ale cîmpului acceleraţiilor într-o mişcare de rotaţie:

a) Punctele de acceleraţie nulă sînt cele pentru care

$$-\omega^2x-\dot{\omega}y=0,\quad \dot{\omega}x-\omega^2y=0.$$

Sistemul fiind omogen, iar determinantul $\omega^4+\dot{\omega}^2\neq 0$, rezultă singurele valori posibile $x=0$ şi $y=0$, deci *singurele puncte de acceleraţie nulă sînt cele de pe axa de rotaţie.*

b) Pe o dreaptă AB, paralelă cu axa de rotaţie (fig. 13.3, *b*), acceleraţiile sînt aceleaşi, deoarece componentele a_x, a_y şi a_z nu depind de cota z.

c) Acceleraţiile sînt conţinute în plane normale pe axa de rotaţie Oz, deoarece $a_z=0$.

d) Pe o dreaptă ce întîlneşte axa de rotaţie sub un unghi drept, acceleraţiile variază liniar (fig. 13.3, *b*), fiind proporţionale cu OA şi fac un unghi constant φ cu raza OA. Dacă se consideră ca dreaptă OA, axa Ox, ceea ce, evident, nu particularizează poziţia ei, atunci din (13.17) rezultă

$$a_x=-\omega^2x,\ a_y=\dot{\omega}x,\ a_z=0,\ \text{apoi}\ a=x\sqrt{\omega^4+\dot{\omega}^2}\ \text{şi}\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}=\text{const}.$$

Se recunosc aici rezultatele obţinute la mişcarea circulară [formulele (12.48) şi (12.49) în care $R=x$]. Rezultă că *mişcările circulare ale diferitelor puncte ale rigidului se fac cu aceeaşi viteză unghiulară* ω *şi cu aceeaşi acceleraţie unghiulară* $\dot{\omega}$.

Observaţii. 1° În cazul cînd vectorul acceleraţie unghiulară $\dot{\bar{\omega}}$ este nul într-un anumit interval de timp, mişcarea de rotaţie este *uniformă*.

2° Dacă vectorii $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ au acelaşi sens, viteza unghiulară creşte în valoare absolută şi mişcarea este *accelerată*.

3° Dacă vectorii $\dot{\bar{\omega}}$ şi $\bar{\omega}$ au sensuri opuse, viteza unghiulară descreşte în valoare absolută şi mişcarea este *întîrziată*.

4° În cazul $\dot{\omega}=\text{const}$ mişcarea de rotaţie este *uniform variată*, şi anume *uniform accelerată*, dacă $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ au acelaşi sens, sau *uniform întîrziată* dacă $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ au sensuri opuse.

§ 6. **Mişcarea elicoidală.** Un solid rigid are o mişcare elicoidală dacă două puncte aparţinînd rigidului rămîn, tot timpul mişcării, pe o dreaptă fixă din spaţiu. Această dreaptă se numeşte *axa mişcării elicoidale*.

Ca exemple de mişcări elicoidale cităm: mişcarea unui şurub, mişcarea unui corp care ar cădea pe verticală rotindu-se în acelaşi timp în jurul unei axe verticale, mişcarea unui glonte în interiorul ţevii armei sau pe o porţiune de traiectorie care ar putea fi asimilată cu o linie dreaptă etc.

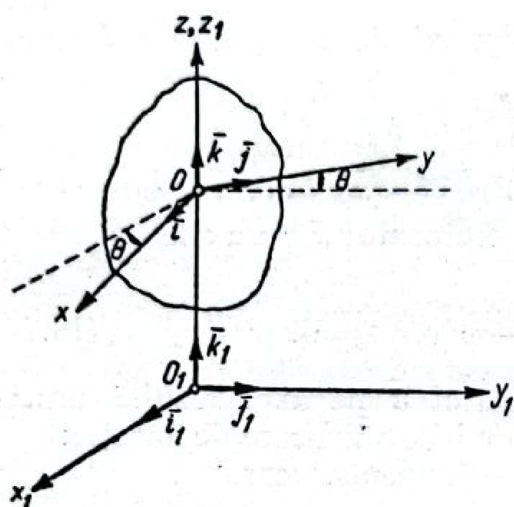


Fig. 13.4

Pentru studiul mişcării se va considera un triedru fix $O_1x_1y_1z_1$ astfel încît axa Oz_1 să coincidă cu axa mişcării elicoidale şi un triedru mobil $Oxyz$ a cărui axă Oz coincide cu Oz_1 (fig. 13.4). Spre deosebire de mişcarea de rotaţie, punctul O se poate mişca pe O_1z_1.

Mişcarea elicoidală este cunoscută cînd se definesc funcţiile scalare

$$z_0=z_0(t) \text{ şi } \theta=\theta(t),$$

unde s-a notat $O_1O=z_0$ şi $(\widehat{O_1x_1, O_x})=\theta$. Rezultă că rigidul are două grade de libertate.

Traiectoriile pe care le descriu diferitele puncte ale rigidului depind de funcţiile $z_0(t)$ şi $\theta(t)$. În particular, dacă aceste funcţii satisfac condiţia $z_0=k\theta$ (k=const), caz frecvent întîlnit în practică, traiectoriile sînt elicoidale. Mişcarea elicoidală poartă în acest caz particular denumirea de *mişcare de şurub*.

În cazul mişcării elicoidale vectorii $\bar{v}_0$, $\bar{a}_0$, $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ au următoarele expresii:

a) Deoarece originea O a triedrului mobil se deplasează în direcţia comună a axelor Oz şi Oz_1 rezultă

$$\bar{v}_0=\dot{z}_0\bar{k}=v_0\bar{k} \text{ şi } \bar{a}_0=\ddot{z}_0\bar{k}=a_0\bar{k}.$$

b) Deoarece planul xOy al triedrului mobil rămîne paralel cu planul fix $x_1O_1y_1$, vectorii $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ vor avea aceleaşi expresii ca în cazul mişcării de rotaţie (vezi prima observaţie de la § 5)

$$\bar{\omega}=\dot{\theta}\bar{k}=\omega\bar{k} \text{ şi } \dot{\bar{\omega}}=\ddot{\theta}\bar{k}=\dot{\omega}\bar{k}.$$

Distribuţia vitezelor: în cazul mişcării elicoidale din formula (13.8) rezultă

$$\bar{v}=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{r}=v_0\bar{k}+\omega\bar{k}\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})=-\omega y\bar{i}+\omega x\bar{j}+v_0\bar{k},$$

deci componentele vectorului $\bar{v}$ pe axele triedrului mobil sînt

$$v_x=-\omega y, \qquad v_y=\omega x, \qquad v_z=v_0. \qquad (13.18)$$

Din aceste expresii rezultă următoarele proprietăţi ale distribuţiei vitezelor într-o mişcare elicoidală:

a) Nu există în general nici un punct al rigidului în care viteza să fie nulă. Axa mişcării elicoidale se bucură de proprietatea că viteza în punctele ei are valoarea minimă şi egală cu $\bar{v}_0$.

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.5) paralelă cu axa mişcării elicoidale vitezele punctelor sînt aceleaşi.

c) Pe o dreaptă OA, perpendiculară pe axa mişcării elicoidale care poate fi aleasă ca axă Ox, proiecţiile vitezei sînt $v_x=0$, $v_y=\omega x$, $v_z=v_0$. Rezultă deci că proiecţia vitezei pe axa mişcării elicoidale este constantă, iar proiecţia pe planul normal la axa mişcării elicoidale variază proporţional cu OA (la fel ca la mişcarea de rotaţie) iar unghiul α dintre viteză şi axa mişcării elicoidale este dat de $\operatorname{tg}\alpha=\omega x/v_0$. Distribuţia vitezelor într-o mişcare elicoidală se poate deci obţine din compunerea unei distribuţii de viteze de translaţie, în direcţia axei mişcării elicoidale şi a unei distribuţii de viteze de rotaţie în jurul aceleiaşi axe.

Distribuţia acceleraţiilor: în cazul particular al mişcării elicoidale, din formula (13.10) rezultă

$$\bar{a}=\bar{a}_0+\dot{\bar{\omega}}\times\bar{r}+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=a_0\bar{k}+\dot{\omega}\bar{k}\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})+\omega\bar{k}\times[\omega\bar{k}\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})]=$$
$$=(-\dot{\omega}y-\omega^2x)\bar{i}+(\dot{\omega}x-\omega^2y)\bar{j}+a_0\bar{k}.$$

Componentele acceleraţiei $\bar{a}$ pe axele triedrului mobil au următoarele expresii:

$$a_x=-\dot{\omega}y-\omega^2x,\quad a_y=\dot{\omega}x-\omega^2y,\quad a_z=a_0. \qquad (13.19)$$

Din aceste expresii rezultă unele proprietăţi ale distribuţiei acceleraţiilor într-o mişcare elicoidală:

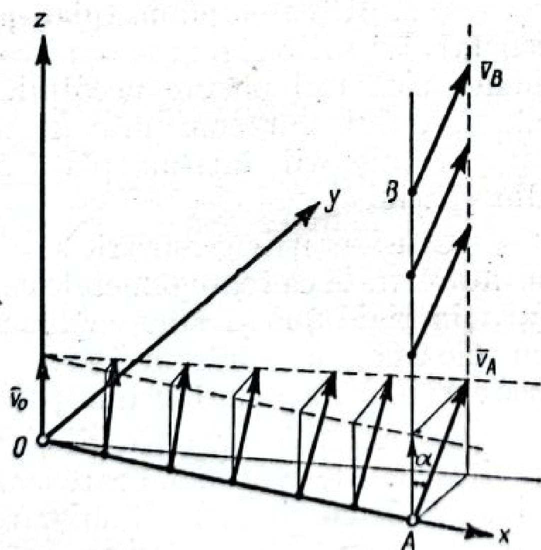


Fig. 13.5

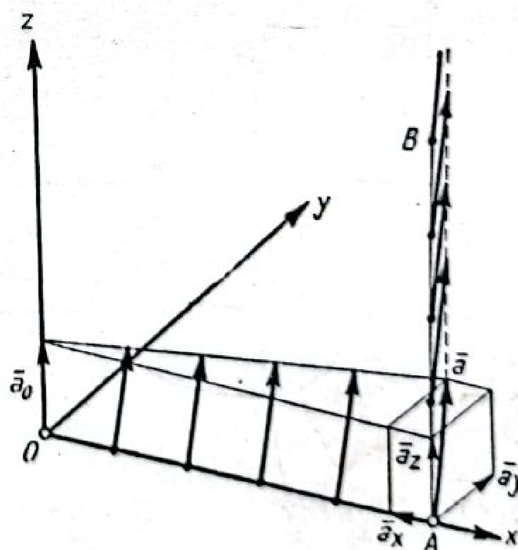


Fig. 13.6

a) Nu există, în general, nici un punct al rigidului în care acceleraţia să fie nulă. Axa mişcării se bucură de proprietatea că în punctele ei acceleraţia are valoarea minimă şi egală cu $\bar{a}_0$.

b) Pe o dreaptă AB (fig. 13.6) paralelă cu axa mişcării elicoidale acceleraţiile sînt constante.